

# AZ EGYENESFOGÚ METSZŐKERÉK GEOMETRIAI MODELL SZÁMÍTÓGÉPES KIÉRTÉKELÉSÉNEK HIBÁI

## THE NUMERICAL EVALUATION ERRORS OF THE GEOMETRIC MODEL OF THE STRAIGHT TEETHED SHAPER CUTTER

Máté Márton,<sup>1</sup> Hollanda Dénes<sup>2</sup>

*Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia*

<sup>1</sup> [mmate@ms.sapientia.ro](mailto:mmate@ms.sapientia.ro)

<sup>2</sup> [hollanda@ms.sapientia.ro](mailto:hollanda@ms.sapientia.ro)

### Abstract

It is well known that straight teathed shaper cutters present a theoretical profile error. The side edges are situated on a common conical rack face with the result that they and their projection in the generating plane can't be involute curves. The optimization of the cutter requires such a correlation of the edge defining parameters that the potential theoretical profile error is kept to the minimum possible. Thus the relevance of the edge equations is of great importance. This paper deals with the analysis of the edge equations, presenting two different forms of it. The comparison between the two different forms is realized by applying the numerical evaluation, by substitution of the edge point coordinates in the implicit equations of the originating surfaces. The obtained results present a difference of magnitude  $10^{-3}$ . Finally, it can be concluded that the two forms of the edge equations cannot be used randomly but only in correlation with the goal proposed by the running application.

**Keywords:** *shaper cutter, model, edge, profile error, computing error.*

### Összefoglalás

Az egyenesfogú metszőkerék közismerten elméleti profilhibával rendelkezik. Ez a klasszikus, léccel való lefejtés következménye. A szerszám optimalizálásakor az élalakot meghatározó paramétereket kell oly módon összehangolni, hogy a lehető legkisebb elméleti profilhiba keletkezzen. Ezért az él egyenletei igen fontos szerepet töltenek be. Jelen dolgozat az egyenesfogú metszőkerék élegyenleteinek két különböző alakját mutatja be. Ezek összehasonlítását numerikus vizsgálattal végeztük el, úgy, hogy az élpontok koordinátáit visszahe-lyettesítettük az éleket meghatározó felületek implicit egyenleteibe. A különbségek kiértékelése során ezres nagyságrendnyi eltérést veszünk észre, de a hiba abszolút értéke  $10^{-12}$ - $10^{-16}$ . Következtetésként kijelenthetjük, hogy az egyes egyenletalakok használata nem történhet véletlenszerűen, hanem az alkalmazásban kijelentett céltól függően kell ezeket alkalmazni.

**Kulcsszavak:** *metszőkerék, modell, él, profilhiba, számítási hiba.*

### 1. Az egyenesfogú metszőkerék geometriai modellje

Az egyenesfogú metszőkerék geometriai modellje a klasszikus, léccel való generálás elméletén alapul [1, 2, 3, 4]. A szerszámléc egyenes profilú,

$\alpha_{os}$  kapcsolószögű, mely lefejtés közben a metszőkeréken ennek alapsíkjától a felső határsíkig lineárisan csökkenő profileltolást hoz létre. A metszőkerék fogát ennek következtében az alsó és a felső határ-homloksík közé zárt két, egymással

szembeforduló csavarevolvens-felületdarab és egy  $\alpha_v$  félkúpszögű, az  $R_a$  sugarú fejkörre illesztett egyenes körkúp-felületszelet határoz meg. A csavarevolvens-felület osztóhengeri csavarvonalának  $\beta_0$  dőlésszögét a szakirodalomban egyszerű geometriai számítások alapján levezethető [3, 4]

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \alpha_v \operatorname{tg} \alpha_{0s} \quad (1)$$

képlettel számítják. Figyelembe véve az osztókör és az alapkör sugarainak kapcsolatát, az alapköri csavarvonal dőlésszögét a

$$\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \alpha_v \sin \alpha_{0s} \quad (2)$$

összefüggés adja meg.

A  $z_s$  fogszám és a  $\xi_s$  szerszámprofil-eltolás és a modul függvényében, az evolvenstrigonometria második alapegyenletének használatával [5] kapjuk az alapsíkbeli evolvensgörbe alapköri pontjának polársugara és az  $O_s x_s$  tengely által bezárt  $\eta$  helyzetszög értékét:

$$\eta = \frac{\pi}{2z_s} + 2 \frac{\xi_s}{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{0s} + \operatorname{inv} \alpha_{0s} \quad (3)$$

Megjegyezzük, hogy az  $O_s x_s$  tengely a szerszámfog alapszélvényének szimmetriatengelye.

### 1.1. Az oldal-hátfelület

Az oldal-hátfelület egyenleteit az 1. ábra alapján vezetjük le. Az evolvens-csavarfelület képzésére több technológiai módszer létezik [4, 6, 7, 8],

viszont a kinematikai geometria két lehetőséget kínál:

- az alapsíkbeli evolvensgörbére csavartranszformációt alkalmazunk, vagy
- az alaphengeren legördítünk egy [S] síkot, mely ennek tengelyével  $\beta_b$  szöget bezáró egyenest tartalmaz.

Az első esetben, az 1. ábrán látható jelölésekkel, az evolvensgörbe, vagyis a generáló görbe egyenletei a következők [9]:

$$\begin{cases} x(u) = R_b (\cos(u - \eta) + u \sin(u - \eta)) \\ y(u) = R_b (\sin(u - \eta) - u \cos(u - \eta)) \end{cases} \quad (4)$$

Ha erre  $p = R_0 / \cos \beta_0 = R_b \cos \beta_b$  paraméterű,  $Oz_s$  tengelyű,  $p_w$  értékű csavartranszformációt alkalmazunk, akkor a következő egyenletekhez jutunk [9]:

$$\begin{cases} x_s(u, w) = R_b (\cos(u - \eta + w) + u \sin(u - \eta + w)) \\ y_s(u, w) = R_b (\sin(u - \eta + w) - u \cos(u - \eta + w)) \\ z_s(u, w) = pw \end{cases} \quad (5)$$

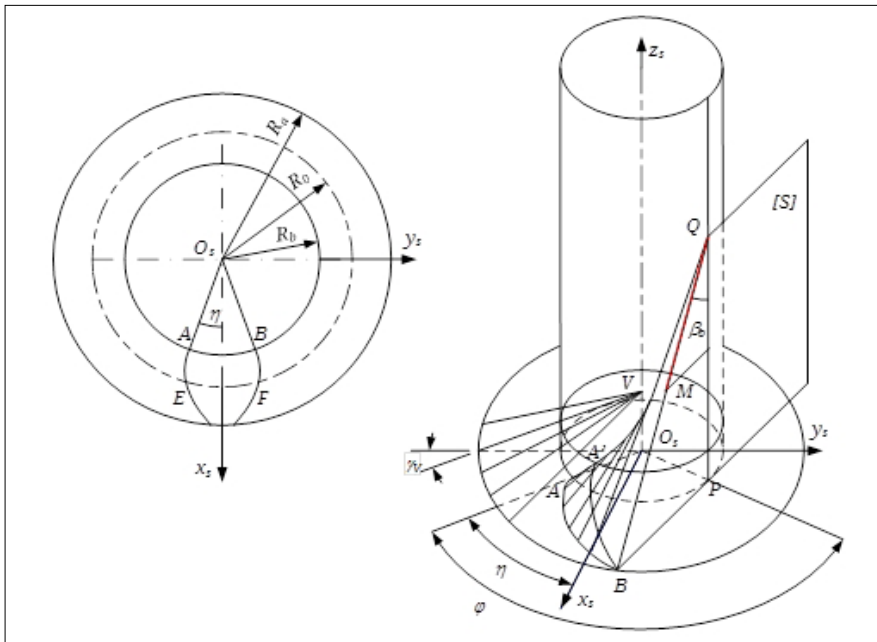
Az 1. ábrán szemléltetett geometriai elemek vizsgálata alapján azonnal felírhatók az alábbi összefüggések:

$$O_s M = O_s P + PQ + QM$$

$$PQ = p\varphi$$

$$QM = \lambda$$

(6)



1. ábra. A csavarevolvens lefejtésének geometriai összefüggései

A vektoregyenlet mátrixos alakja a következő:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_b \cos(\varphi - \eta) \\ R_b \sin(\varphi - \eta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \sin \beta_b \sin(\varphi - \eta) \\ -\lambda \sin \beta_b \cos(\varphi - \eta) \\ -\lambda \cos \beta_b \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ha a (7) egyenletekben a  $\lambda$  paraméterre a  $v = \lambda \sin \beta_b / R_b$  lineáris transzformációt alkalmazzuk, a számítások elvégzése után a

$$\begin{cases} x_s(\varphi, v) = R_b (\cos(\varphi - \eta) + v \sin(\varphi - \eta)) \\ y_s(\varphi, v) = R_b (\sin(\varphi - \eta) - v \cos(\varphi - \eta)) \\ z_s(\varphi, v) = p(\varphi - v) \end{cases} \quad (8)$$

Az (5) és (8) egyenletalakok összevetéséből a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} \varphi - \eta &= u - \eta + w \\ w &= \varphi - v \end{aligned} \quad (9)$$

A két egyenlet típusban a paraméterek geometriai értelmezése különböző. Az (5) egyenletekben az  $u$  paraméter az evolvens lefejtő egyenes alapkörön való legördülésének szöge, a  $w$  pedig a teljes, lefejtett evolvens-ívdarab  $z$  tengely menti csavarmozgásának paramétere, tehát mindkettő értelmezése szög. Ettől eltérően, a (9) egyenletben a  $\varphi$  szög az  $S$  generáló egyenest hordozó sík legördülési útját mérő központi szög, míg  $v$  az alaphenger és a generáló egyenes  $Q$  érintkezési pontjától mért szakasz  $xy$  síkra (lényegében az alapkör PB érintőjére) bocsátott vetületének és az alapkör sugarának az aránya.

A (9) egyenlőségekből kifejezve a  $\varphi$  szöget, a

$$w + v = w + u \Leftrightarrow v = u \quad (10)$$

egyenlőséghez jutunk. Ez azonban nem szabad megtéveszsen a paraméterek variációs intervalumának meghatározásakor, ugyanis az (5) felírás esetében az  $u$  paraméter változása csupán az alapsíkbeli evolvensív hosszát befolyásolja, míg a  $v$  a (8) alakban az evolvensív hosszát és ennek  $xy$  sík feletti magasságát is befolyásolja.

Mindkét esetben a fogoldal evolvens csavarfelületének vezérgörbéje az alaphengerre illeszkedő,  $\beta_b$  dőlésszögű csavarvonal. A generáló görbék viszont különböznek. Első esetben a felület generáló görbéje az  $xy$  síkban definiált evolvens, melyet az alap- és fejkörök között értelmezünk. A második esetben a generáló görbe az  $S$  síkba illeszkedő, az alaphenger generátorával  $\beta_b$  szöget bezáró egyenes.

A parametrikus reprezentáció, illetve a pontfelhő előállításánál fontos, hogy egyenlő – vagy minél egyenletesebb – sűrűségű pontfelhőt hoz-

zunk létre [10]. Első esetben az evolvens ívdarab egyenlő hosszúságú ívszakaszokra való felosztása, illetve a csavarvonalon való elmozdítás  $w$  szögparaméterének egyenletes felosztása jelenti a megoldást. Ismert tény, hogy ha az alapkörön legördülő egyenes figyelembe vett érintési pontjai egyenlő hosszúságú köríveket határoznak meg, akkor a megfelelő evolvensívek hossza mértani sorozatot alkot [5]. A (4) egyenletekből felírható az evolvens elemi ívhossza:

$$ds = R_b u du \quad (11)$$

Ha az  $u$  paraméter-intervalluma  $[u_p, u_z]$ , a megfelelő ívhossz

$$s_{i,i+1} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} ds = \frac{1}{2} R_b (u_{i+1}^2 - u_i^2) \quad (12)$$

Az alapkör és a fejkör között elterülő evolvensív hossza

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{R_a^2 - R_b^2}, \quad (13)$$

vagyis a legördülő egyenes szakasz hosszának a felével egyenlő.

Az íven felvett  $N$  pont  $N-1$  ívszakaszt határoz meg, melyek hossza

$$\Delta L = L / (N - 1) \quad (14)$$

A (12) és (14) képletek összevetésével kapjuk az egyenletes felosztáshoz szükséges  $u$  paramétersor rekurzív relációját:

$$u_{i+1} = \sqrt{\frac{2\Delta L}{R_b} + u_i^2} \quad (15)$$

A második esetben az egyenletes pontsűrűség elérésére mindkét paraméter eloszlása egyenletlen kell hogy legyen. A paraméterek rekurzív függvénye ez esetben igen bonyolult lesz.

Matematikai szempontból a (8) alak sokkal előnyösebb, mint az (5) egyenletek, ugyanis az előbbiben a koordináták független  $\varphi$  és  $v$  paraméterei szét vannak választva, ennél fogva az élgörbe analitikusan kifejezhető.

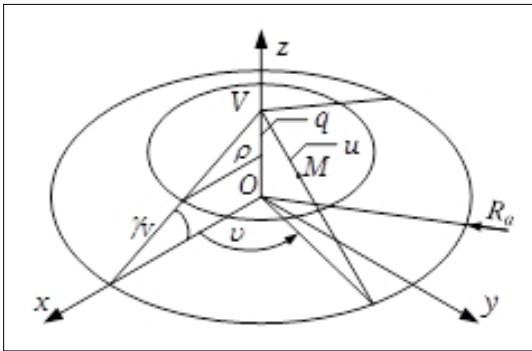
## 1.2. A homlokfelület

A homlokfelület (2. ábra) egyenleteit parametrikusan kétféleképpen lehet kifejezni:

- a  $V$  pontból kiinduló sugársor alapján;
- az  $xy$  síkkal párhuzamos síkokban illeszkedő körök alapján.

A sugársor a  $V(0, 0, h_p)$  pontból indul.

Legyen az  $u$  paraméter a  $V$  csúcsponttól a generátoron illeszkedő  $M$  futópontig mért távolság,  $v$  pedig a generátor vetülete és az  $x$  tengely által bezárt szög.



2. ábra. A kúpfelület parametrizálása

Ez esetben

$$\begin{aligned} x_s(u, v) &= u \cos \gamma_V \cos \nu \\ y_s(u, v) &= u \cos \gamma_V \sin \nu \\ z_s(u, v) &= R_a \operatorname{tg} \gamma_V - u \sin \gamma_V + \delta_H \end{aligned} \quad (16)$$

A metszőkerék élezése következtében a homloklfelület a z tengely pozitív irányításában  $\delta_H$  értékkel csúszik el.

Ha a kúpfelületet körseregként kezeljük, akkor a független paraméterek a futókör  $\rho$  sugara és az  $\nu$  polárszög. Ebben az esetben a parametrikus egyenletek alakja a következő lesz:

$$\begin{aligned} x_s(\rho, \nu) &= \rho \cos \nu \\ y_s(\rho, \nu) &= \rho \sin \nu \\ z_s(\rho, \nu) &= (R_a - \rho) \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H \end{aligned} \quad (17)$$

Ha paraméterként a polárszöget és a  $q$  csúcsból mért távolságot választjuk, akkor a (17) egyenletek a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} x_s(q, \nu) &= q \operatorname{ctg} \gamma_V \cos \nu \\ y_s(q, \nu) &= q \operatorname{ctg} \gamma_V \sin \nu \\ z_s(q, \nu) &= R_a \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H - q \end{aligned} \quad (18)$$

A (16), (17) és (18) parametrikus egyenletekből ugyanazon implicit alakra jutunk:

$$x_s^2 + y_s^2 - ((R_a - \rho) \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H)^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma_V = 0 \quad (19)$$

## 2. Az oldalél egyenletei

Az oldalél a fog hátfelülete és a homloklfelület metszésvonala. Ennek két szakasza van:

- az evolvens csavarfelületből származó élszakasz;
- a foglalbfelületből származó élszakasz.

Az utóbbi szakaszt csak az alámetszés határa fölött vesszük tekintetbe. Az alámetszés határa közelében e szakasz jelentős, és ismeretes, hogy

az idetartozó evolvensszakaszt elrejt, tehát a lefejtés során a megmunkált fog fejt lenyesi. Jelen közleményben ezt a részt nem elemezzük.

### 2.1. A kúp parametrikus egyenleteinek használata

Tekintsük a (8) és (16) parametrikus egyenleteket. Az oldalél koordináta-függvényeit a megfelelő felület-koordináta-függvények egyenlővé tételéből nyert, három egyenletből álló, négyismeretlenes egyenletrendszerből kinyert paraméter kapcsolat segítségével fejezzük ki:

$$\begin{aligned} x_s(\varphi, \nu) &= x_s(u, v) & (a) \\ y_s(\varphi, \nu) &= y_s(u, v) & (b) \\ z_s(\varphi, \nu) &= z_s(u, v) & (c) \end{aligned} \quad (20)$$

A (20) egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszert nyerünk, az alábbi módon:

$$\begin{aligned} (a') &\leftarrow (a)^2 + (b)^2 \\ (b') &\leftarrow (b)/(a) \\ (c') &\leftarrow (c) \end{aligned} \quad (21)$$

A számítások elvégzése után kapjuk az alábbi ekvivalens rendszert:

$$\begin{aligned} R_b^2 (1 + \nu^2) &= u^2 \cos^2 \gamma_V \\ \nu &= \varphi - \eta - \arctg \nu \\ p\varphi - p\nu &= R_a \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H u \sin^2 \gamma_V \end{aligned} \quad (22)$$

Ebből kifejezhető a kúpfelület független paraméterei közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} \nu(u) &= (R_a \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H - u \sin \gamma_V) p^{-1} - \eta + \\ &+ \operatorname{inv} \left( \arctg \sqrt{\frac{u^2 \cos^2 \gamma_V}{R_b^2} - 1} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

A kúpfelület független paraméterei közötti kapcsolat második változatát a (8) és (17) egyenletek együttes vizsgálatából nyerjük. A koordináta-függvények kiegyenlítéséből kapott egyenletrendszert a (21) relációk szerint alakítjuk át, és a számítások után a következő egyszerűbb alakra jutunk:

$$\begin{aligned} \nu(\rho) &= \frac{(R_a - \rho) \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H}{p} - \eta + \\ &+ \operatorname{inv} \left( \arctg \sqrt{\frac{\rho^2}{R_b^2} - 1} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

A (23) és (24) függvények ekvivalensek, ami könnyen igazolható azáltal, hogy az előbbiben a  $\rho = u \cos \gamma_V$  változócsere hajtuk végre.

Az evolvens csavarfelület paramétereinek közötti összefüggést a (8) és (19) egyenletekből kapjuk. Behelyettesítve a kúpfelület (19) implicit alakjába a fogoldal evolvens csavarfelületének (8) parametrikus koordináta-függvényeit, a következő függvényt kapjuk:

$$\varphi(v) = \frac{R_a \operatorname{tg} \gamma_V + \delta_H}{p} + v \frac{R_b}{p} \operatorname{tg} \gamma_V \sqrt{1+v^2} \quad (25)$$

### 3. Az élpont-koordináták pontossága

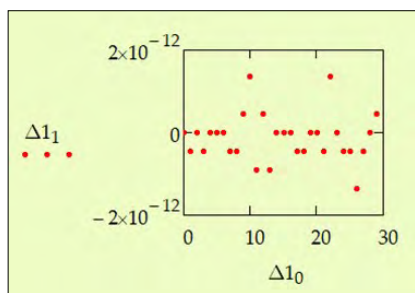
Az élpont koordinátáit, figyelembe véve az előbbieken feltüntetett megoldási lehetőségeket, kétféleképpen számíthatjuk ki:

- a homlokkúp parametrikus egyenleteiből;
- a fogoldal parametrikus egyenleteiből.

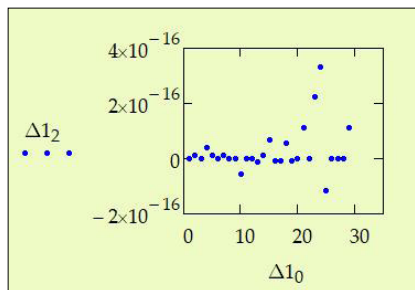
A pontosságot az élgörbét adó két felület implicit egyenleteibe való behelyettesítés hibájával definiáljuk.

A csavarevolvens implicit egyenletét ennek a (8) koordináta-függvényeiből állítjuk elő. Egyszerű számítások után az alábbi kifejezésre jutunk:

$$G(x, y, z) : \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \left( \frac{z}{p} - \eta + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R_b^2} - 1} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R_b^2} - 1} = 0 \quad (26)$$



3. ábra. A kúpfelület implicit egyenletébe való behelyettesítés hibaeloszlása



4. ábra. Az evolvens csavarfelület implicit egyenletébe való behelyettesítés hibaeloszlása

A számításokat egy  $z_s=21$  fogú,  $m_n=5$  mm modulú és  $\alpha_0=20^\circ$  elméleti lécpofilszögű metszőkerekre végeztük el, melynek csúcshomlokszöge  $\gamma_v=5^\circ$  és csúcshátszöge  $\alpha_v=6^\circ$ . A metszőkerek új állapotában elemezzük, így legnagyobb profil-eltolása,  $\delta=0,021$  fajlagos működési hézag (JIS-B-1705-1973) és  $s_a=1,3$  mm fogfejvastagság mellett  $\xi_1=+0,235$ .

### 3.1. A kúpfelületből nyert paraméter-kapcsolat hibája

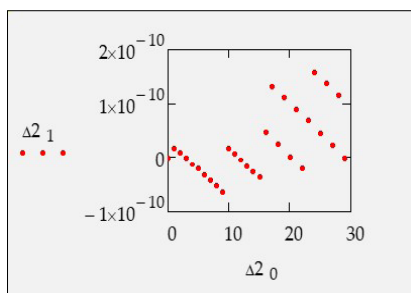
Vizsgáljuk a kúpfelület független paramétereinek közötti függvénykapcsolattal számított élkoordinátákat. Ez azt jelenti, hogy a (23) függvényt a (16) parametrikus egyenletekbe helyettesítjük. Az élpontok száma  $N=30$ .

Ha a kapott élkoordinátákat a kúp implicit egyenletébe helyettesítjük, a 3. ábrán látható hibaeloszlást kapjuk.

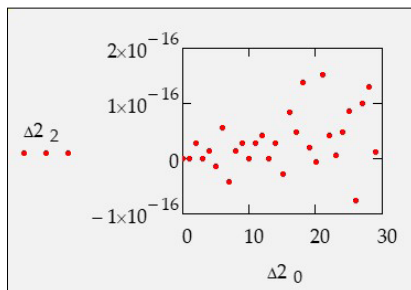
Ha ugyanazokat a koordinátákat az evolvens csavarfelület implicit egyenletébe helyettesítjük, meglepő módon sokkal kisebb hibát kapunk (4. ábra).

### 3.2. Az evolvens csavarfelületből nyert paraméter-kapcsolat hibája

Az evolvens csavarfelület független paramétereinek közötti (25) függvénykapcsolatot helyettesítjük be a (8) paraméterfüggvényekbe. Az így számított



5. ábra. A kúpfelület implicit egyenletébe való behelyettesítés hibaeloszlása



6. ábra. Az evolvens csavarfelület implicit egyenletébe való behelyettesítés hibaeloszlása

koordinátákat először a (19), majd a (26) implicit függvényekbe helyettesítjük. A hibaeloszlásokat az 5. és a 6. ábrán tüntettük fel.

Észre lehet venni, hogy a kúpfelület implicit egyenletébe való visszahelyettesítés hibája bizonyos periodicitást mutat, míg az evolvens parametrikus egyenletébe való behelyettesítéssel kapott hibaeloszlás felhőszerű.

#### 4. Következtetések

A 3-6. ábrák összehasonlítása alapján megfogalmazhatók az alábbi következtetések:

A kúpfelületről kifejezett élkoordináták 100-szor kisebb hibával elégítik ki a kúpfelület implicit egyenletét, mint a csavarfelületről kifejezett élkoordináták.

A kúpfelületről kifejezett és az evolvens csavarfelületről kifejezett élkoordináták közel azonos pontossággal elégítik ki az evolvens csavarfelület egyenletét.

A kúpfelületről származó élfüggvények egyszerűbb alakúak, ami a valós származtatófelületek egyszerűbb alakját eredményezik.

A következtetésnek csupán elméleti értéke van, mert a hiba nagysága  $10E9$ -szer kisebb, mint a legkisebb gyártási tűrésmező.

#### Köszönetnyilvánítás

Jelen munka a 4038/24/2018/HTMT szerződésszámú Domus-Egyéni kutatási ösztöndíjtámogatás segítségével valósult meg.

#### Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Radzevich P. S.: *Dudley's Handbook of Practical Gear Design*. CRC-Press, London, 2016. 368–379.
- [2] Radzevich P. S.: *Gear Cutting Tools. Fundamentals of design and computation*, CRC-Press, London, 2010.
- [3] Hollanda D.: *Așchiere și scule*. Reprografia I.I.S. Tg. Mureș, 1994. 234–240.
- [4] Máté M.: *Hengeres fogaskerekek gyártószerzámai*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016. 133–158.
- [5] Szeniczai L.: *Az általános fogazás*. Nehézipari Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1958. 49–50.
- [6] Dudiță Fl., Diaconescu D.: *Mecanisme. Fascicula 2*. Reprografia Universității din Brașov, 1983.
- [7] Dudás I.: *The Theory and Practice of Gear Worm Drives*. Penton Press, London, 2000.
- [8] Gyenge Cs.: *Lefejtőmarók oldalhátszögének pontos meghatározása és optimalása*. Gép, 48/10. (1996) 38–40.
- [9] Máté M., Kántor A. E., Laczkó-Benedek B.: *Metszőkerékkel lefejtett fogaskerekek profilpontosságának vizsgálata*. In: XII. FMTÜ Nemzetközi Tudományos Konferencia kiadványa. Kolozsvár, Románia, Műszaki Tudományos Közlemények 7. 279–283.  
<https://eda.eme.ro/handle/10598/29833>.
- [10] Tolvaly-Roșca F., Máté M., Forgó Z., Kakucs A.: *Development of Helical Teethed Involute Gear Meshed with a Multi-Edge Cutting Tool Using a Mixed Gear Teeth Modeling Method*. Procedia Engineering 181. (2017) 153–158.  
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.421>