

AZ ALÁMETSZÉS KÖRÜLMÉNYEI LEKEREKÍTETT GYÁRTÓ FOGASLÉC ESETÉBEN

THE CONDITIONS OF UNDERCUT BY SHAPING USING A ROUNDED PROFILE GEAR SHAPER CUTTER

Hodgyai Norbert,¹ Tolvaly-Roşca Ferenc,² Máté Márton³

¹ Sapientia EMTE, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Kolozsvár, Románia, hodgyai@ms.sapientia.ro

² Sapientia EMTE, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Kolozsvár, Románia, tferi@ms.sapientia.ro

³ Sapientia EMTE, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Kolozsvár, Románia, mmate@ms.sapientia.ro

Abstract

The present paper deals with the cases of undercut when not only the linear but the curved segment of the generatrix curve is also taken in consideration. The literature admits the approximation of the root fillet with a circular arc with a radius of 0,38 m. In this paper, instead of this approximation, the real envelope realized by the rounded rack-head is computed. In analyzing the undercut there are two classical synthetic geometrical models supporting Litvin's general equations that describe the condition of avoiding the undercut: one for the linear and one for the rounded part of the generatrix. The scope of exact computing of the root fillet curve consists in optimizing the cutting tool tooth top-land geometry to obtain the best rigidity. The numerically evaluated models allow us to conclude that profile shifting can be pushed below the undercut limits stated in the classical literature, without the appearance of the well-known fracture point on the meshed tooth profile.

Keywords: rack, profile parameters, meshing, root fillet, undercut.

Összefoglalás

Jelen közlemény az alámetszés sajátos eseteit vizsgálja akkor, amikor a lécpofilnak nemcsak az egyenes, hanem a lekerekített szakaszát is generáló profilnak tekinti. A szakirodalomban elterjedt 0,38 m sugarú csatlakoztatási körív helyett a fogfej lekerekített része által burkolt valós fogláb görbét tekinti. A Litvin által megfogalmazott alámetszési általános analitikus feltételek helyett két alternatív, egyszerűbb matematikai kifejezéseket kínáló szintetikus geometriai modellt mutat be, külön az egyenes és külön az lekerekített generáló görbe szakaszra. A fogláb pontos alakmeghatározásának az a célja, hogy a szerszám fogfejének megfelelő kialakításával a fogtőszilárdságot, és ennek következtében a terhelhetőséget növelhessük. A numerikusan kiértékelt modellek arra engednek következtetni, hogy a klasszikus irodalomban fellelhető alámetszés határa alá is lehet fogazni, anélkül, hogy a teljes burkolón létrejönne a jellegzetes töréspont.

Kulcsszavak: léc, profilparaméterek, burkolás, fogláb görbe, alámetszés.

1. A fogláb görbe jelentősége

A kapcsolódó fogazatok pontos geometriájának analitikus és szintetikus, numerikus vagy vegyes vizsgálati módszereit sokan kutatták-alkalmazták [1, 2, 3, 4]. A fogaskerék fogtő görbét a legtöbbször

körívvel közelítik [4, 5, 6], és szimulációs vizsgálatok során sem tekintenek el ettől. A fogláb görbe alakja, kialakításának pontossága, a felület finomsága határozott befolyást gyakorol a fogazat élettartamára, a teherbírására és nem utolsósorban a hajtás rezgésképére.

A fogaskerék foglábfelületének és működő fogfelületének kapcsolódását viszonylag egyszerűen tárgyalja a szakirodalom. A talpkör pontos definícióját és sugarának számítását először Szeniczei publikálja [7], arra az esetre, amikor a lécpofil aktív feje vonala határozza meg a talpkör sugarát. A foglábgörbét arra az esetre írja fel, amikor azt a generáló szerszámél és a fejszalagél metszéspontja írja le: hurkolt evolvens gyártóléc, hurkolt epiklois metszőkerék esetében.

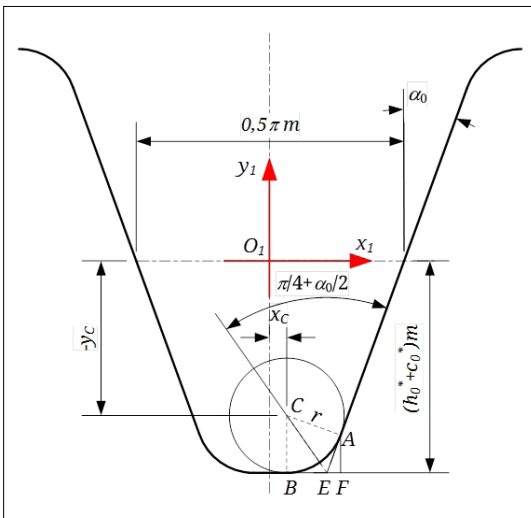
Litvin [2] ennél pontosabban határozza meg a foglábgörbét, állítván, hogy a lekerekítési ív középpontja által a relatív mozgás során leírt hurkolt evolvensből vagy cikloistól lekerekítési sugárral távolsgóra illeszkedő görbe.

Az eddig elért eredmények alapján több kérdés fogalmazható meg. Az első a foglábgörbe és a hasznos fogprofil kapcsolódási helyének változása a profileltolással. Lényeges az alámetszés geometriájának összehasonlítása a klasszikus átmetszési geometriával. Végül, hogy a szerszám éllekerekítésének alakja miként befolyásolja a kialakuló foglábgörbét, és ennek milyen hatása van a fogtő szilárdságára és merevségére.

A következőkben a körív lekerekítésű gyártóléc és a kialakított teljes fogoldalprofil összefüggéseit vizsgáljuk.

2. A gyártóléc paraméterei

Jelen tanulmányban a DIN 867-1986-os alapprofilból származtatott gyártólécet tekintjük. A szabvány a foglábmagasságot $h_p \in (1,1 \div 1,4) m$ között definiálja. A gyártóléc vizsgálatát a $h_p = 1,25 m$ értékre végezzük el.



1. ábra. A generáló fogasléc lekerekített profilja

Tekintsük az **1. ábrán** definiált fogaslécprofil. A lekerekítési sugarat két feltételből lehet kiszámítani: az első az, hogy a fogfej éle a két körív találkozásából alakuljon ki; a másik pedig az, hogy a körív a fog magasságából legtöbb $c_0^* m$ részt foglaljon le. Kiindulván ebből a feltételezésből, az **1. ábra** alapján felírhatjuk, hogy

$$r = \frac{mc_0^*}{\cos \alpha_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (1)$$

Ezzel az értékkel kiszámítjuk az *EB* szakasz hosszát:

$$EB = EA = \frac{mc_0^*}{\cos \alpha_0} \quad (2)$$

Ezt az értéket összehasonlítjuk az elméleti lekerekítetlen fogfejérték felével, és kiszámítjuk a különbséget:

$$\delta = \frac{\pi m}{4} - m(h_0^* + c_0^*) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{mc_0^*}{\cos \alpha_0} \quad (3)$$

A szabványos fogasléc paraméterértékekre $\delta > 0$, tehát a fejl két szimmetrikus körívből és az ezeket összekötő vízszintes érintőből áll. A fejl folytonos, nincs átmetszés.

Az (1) képlettel kiszámított sugár a legnagyobb lehetséges érték, bevezetjük az ψ redukáló tényezőt, $\psi \in [0, 1]$, ezzel pedig a lekerekítési sugár értékét a következőképpen számítjuk:

$$r = \psi r^* m = \psi \frac{c_0^*}{\cos \alpha_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) m \quad (4)$$

Ha az r sugár értékét kijelöltük, akkor kiszámíthatók a *C* központ koordinátái (**1. ábra**):

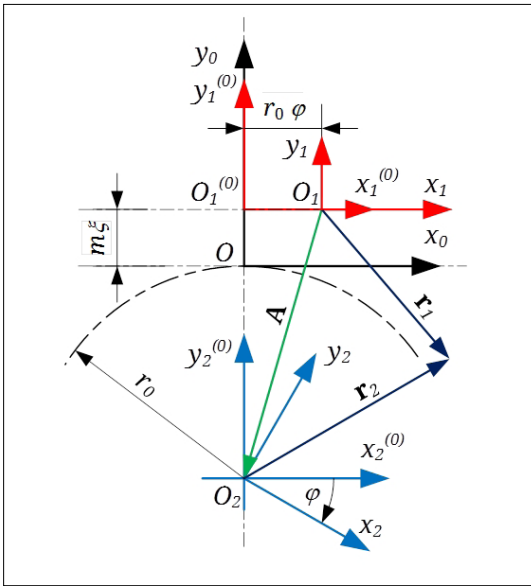
$$\begin{cases} x_1^c = m \left(\frac{\pi}{4} - (h_0^* + c_0^*) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{\psi r^*}{\cos \alpha_0} \right) \\ y_1^c = (\psi r^* - (h_0^* + c_0^*)) m \end{cases} \quad (5)$$

3. Az alkalmazott koordináta-rendszerek

A szerszám-fogaskerék relatív kinematikáját a **2. ábrán** feltüntetett három koordináta-rendszer relatív helyzete segítségével írjuk fel.

A kapcsolódás főpontjában ered az állványhoz rögzített Ox_0y_0 koordináta-rendszer. A gyártóléc-höz kötött az $O_1x_1y_1$ koordináta-rendszer, melynek x_1 tengelye a fogasléc osztóvonalára illeszkedik. A kerék centroidája az x_0 tengelyre illeszkedik. Végül, a fogazandó kerékhez kötött koordináta-rendszer az $O_2x_2y_2$, melynek φ elfordulási szöge határozza meg a lécs $r_0\varphi$ x -tengely menti elmozdulását [1].

A **2. ábra** alapján, az [1, 2, 4, 8]-ben is alkalmazott módszerrel felírhatók a transzformáció-egyenletek:



2. ábra. Az alkalmazott koordináta-rendszerek

$$\underline{r}_2 = M_{21} \underline{r}_1 = M_{20} M_{01} \underline{r}_1 \tag{6}$$

A 2. ábrán látható beállításnak megfelelően

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a_{13}(\varphi) \\ \sin \varphi & \cos \varphi & a_{23}(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$a_{13}(\varphi) = -r_0(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + m \xi \sin \varphi$$

$$a_{23}(\varphi) = r_0(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) + m \xi \cos \varphi$$

4. A kapcsolódási egyenlet

A kapcsolódási egyenletet a [2] alapján írjuk fel. Az 1-es elem (gyártóléc) és a 2-es elem (fogazott kerék) közös pontjára mutató \underline{r}_1 és \underline{r}_2 helyvektorok, az 1-es rendszer origójából a 2-es rendszer origójára mutató A helyvektor segítségével, az 1-es koordináta-rendszerben felírható:

$$\underline{v}_1^{(12)} = \underline{v}_1^{(1)} - \underline{v}_1^{(2)} =$$

$$= \omega_2 r_0 \underline{i}_1 - \omega_2 \times \underline{r}_2 =$$

$$= \omega_2 r_0 \underline{i}_1 - \omega_2 \times (\underline{r}_2 - A) \tag{8}$$

Az $\omega_2 = 1$ rad/s szögsebességvektor-érték mellett, a számítások elvégzése után kapjuk:

$$\underline{v}_1^{12} = \begin{pmatrix} -y_1 - m \xi \\ x_1 + r_0 \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

5. A teljes generáló görbe

A teljes generáló görbe az egyenes, illetve a lekerekített szakaszból áll. Az egyenes szakaszt a fogmagasság mentén, a körívet pedig a központi szöggel parametrizáljuk:

$$\begin{cases} x_{1e}(u) = \frac{\pi m}{4} + u \operatorname{tg} \alpha_0, \\ y_{1e}(u) = u \\ u \in [-(h_0^* + c_0^*), h_0^*] \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} x_{1k}(u) = x_1^c + r \cos(\alpha_0 + u) \\ y_{1k}(u) = y_1^c - r \sin(\alpha_0 + u) \end{cases} \tag{11}$$

$$u \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \alpha_0\right]$$

A normálvektorok felírása azonnali, az 1. ábra alapján:

$$\underline{n}_{1e} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{n}_{1k} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

6. A kapcsolódási egyenlet megoldása

A kapcsolódási egyenlet megoldását kizárólag a generáló görbe körívszakaszára írjuk fel – ismert tény, hogy az egyenes szakasz evolvenst fog burkolni. Ennek az evolvensnek a helyzetét a 2. ábrán látható beállítás betartása mellett – kiinduló, vagyis $\varphi = 0$ helyzetben a főpont a generáló profil középvonalán illeszkedik – egyszerű geometriai levezetéssel [1, 7] megkaphatjuk:

$$\begin{cases} x_2^{ev}(\varphi_1) = r_b(\sin(\varepsilon + \varphi_1) - \varphi_1 \cos(\varepsilon + \varphi_1)) \\ x_2^{ev}(\varphi_1) = r_b(\cos(\varepsilon + \varphi_1) + \varphi_1 \sin(\varepsilon + \varphi_1)) \end{cases} \tag{13}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2z} - 2 \frac{\xi}{z} \operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_0$$

Megjegyezzük, hogy a lefejtés φ és a geometriai felírás φ_1 paramétere között lineáris kapcsolat áll fenn.

Az (5), (9) és (12) kifejezések segítségével a kapcsolódási egyenlet a következő alakot ölti:

$$(y_1^c + m \xi) \cos(u + \alpha_0) + (x_1^c + r_0 \varphi) \sin(u + \alpha_0) = 0 \tag{14}$$

A trigonometriai egyenlet teljes megoldása

$$u(\varphi) = -\alpha_0 - \operatorname{arctg} \frac{y_1^c + m \xi}{x_1^c + r_0 \varphi} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

A kapcsolódási egyenlet megoldása a lekerekítési ívhez tartozó teljes kör pontjaira vonatkozik; ezek közül ki kell emelni azokat a megoldásokat, amelyek a valós foglág görbét jelentik. Jelöljük $g(\varphi)$ -vel az ívtangens argumentumát. Észre lehet venni, hogy a

$$\varphi_{krit} = \frac{x_1^c}{r_0}$$

értékre a függvénynek függőleges aszimptotája van. A valós burkológörbe, azaz a lágörbe az

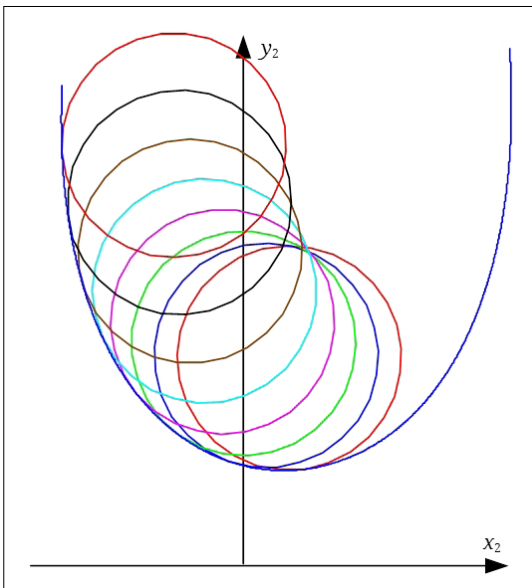
$$u(\varphi) = \begin{cases} -\arctan(g(\varphi)) - \alpha_0 + \pi, & \text{if } \varphi \leq \varphi_{krit} \\ -\arctan(g(\varphi)) - \alpha_0, & \text{if } \varphi > \varphi_{krit} \end{cases} \quad (16)$$

paraméter-összefüggésre valósul meg.

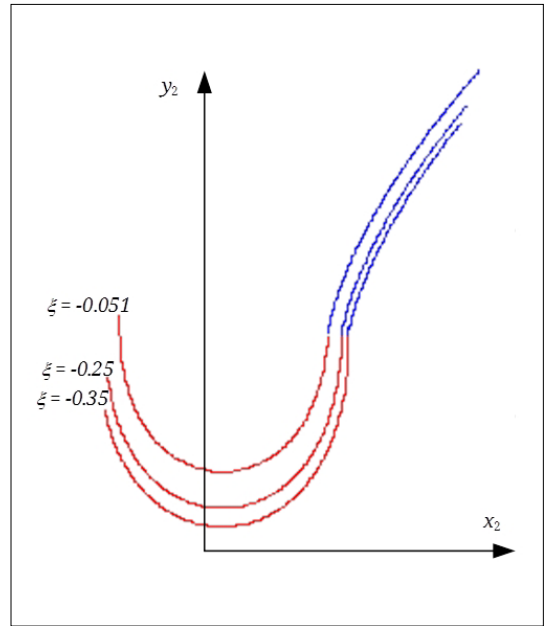
7. Numerikus szimuláció

A foglágörbe-egyenletek analitikus alakját a (6) mátrixegyenlet kifejtéséből kapjuk, ha az \mathbf{r}_1 helyvektor koordinátaiban az u paramétert a (16) függvénnyel helyettesítjük. Az egyenleteket, tekintettel bonyolult alakjukra, nem írjuk fel. Az analitikus eredményeket a Mathcad környezetben ellenőriztük, $z_2=18$ fogú, $m=5$ mm modulú fogaskerékre.

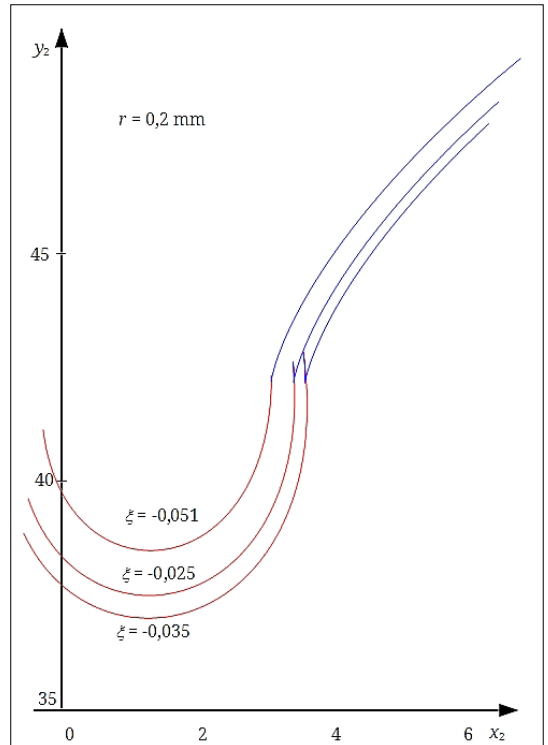
A 3. ábrán a burkolt körsereg és a burkoló foglágörbe látható, arra az esetre, amikor a relatív sugártényező $\psi=0,79$, ami $r=1,5$ mm értékű sugárnak felel meg. A görbék geometriai viszonya és relatív helyzete arra enged következtetni, hogy minél kisebb a lekerekítési sugár, annál meredekebb, hegyesebb a foglágörbe. Ezt különböző beállításokkal elkészített fogazatok grafikus összehasonlításával igazoljuk. Bár a klasszikus alámetszési elmélet szerint [7] az alámetszés határa $\xi = -0,053$, a generálást a $\xi \in \{-0,15; -0,2; -0,25; -0,3; -0,35; -0,4\}$ értékekre és $\psi = 0,79$, illetve $\psi = 0,1$ relatív lekerekítési sugarú szerszámmal végeztük el. Az eredményeket a 4., 5., 6., 7. és 8. ábrákon szemléltetjük.



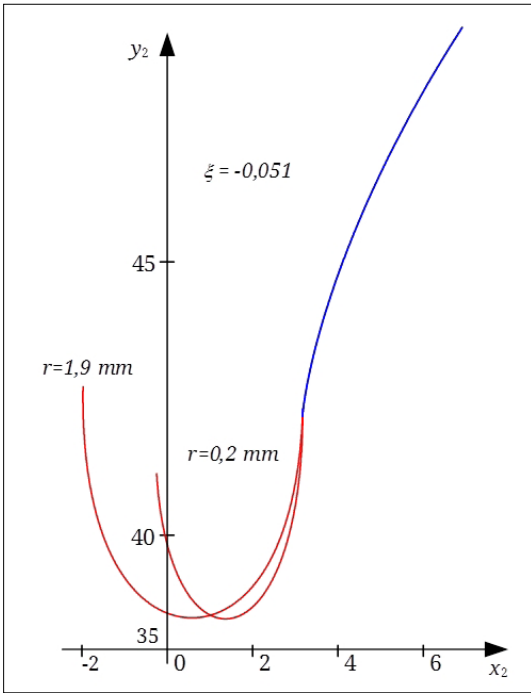
3. ábra. A foglágörbe és a burkolt körsereg



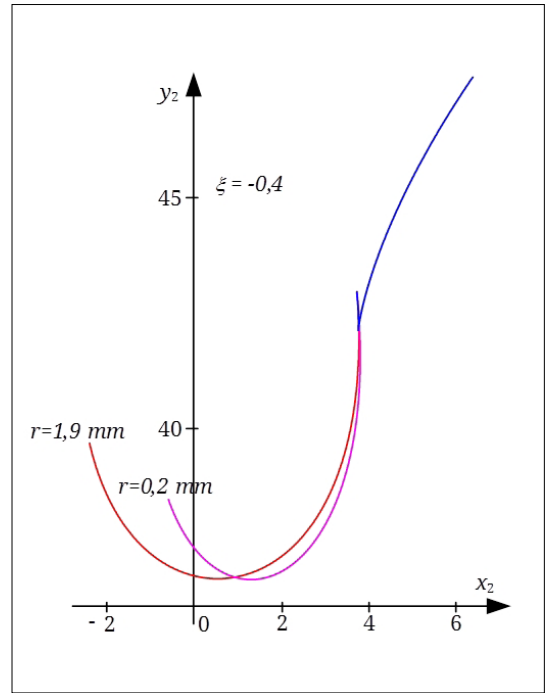
4. ábra. A foglágörbe és az evolvens csatlakozása $r=1,5$ mm lekerekítési sugarú szerszám használata esetén



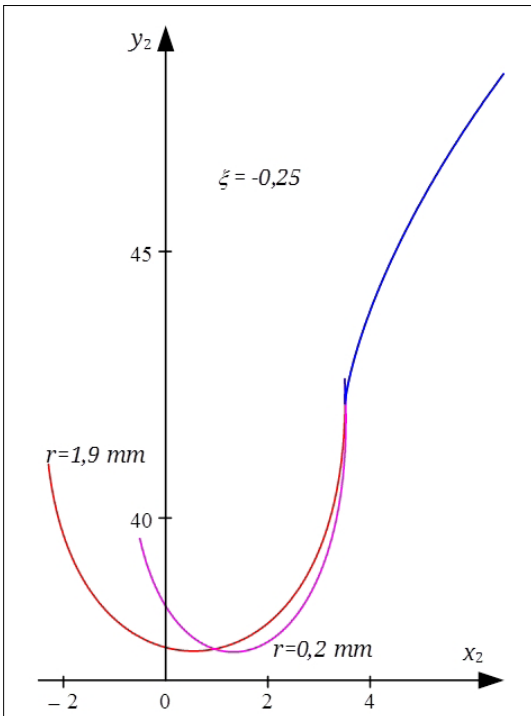
5. ábra. A foglágörbe és az evolvens csatlakozása $r=0,2$ mm lekerekítési sugarú szerszám használata esetén



6. ábra. A foglábgörbe alakjának függése a lekerekítési sugártól – a klasszikus profileltolás határán



8. ábra. A foglábgörbe alakjának függése a lekerekítési sugártól: $\xi=-0,40$



7. ábra. A foglábgörbe alakjának függése a lekerekítési sugártól: $\xi=-0,25$

A 4. ábrán jól látható, hogy megfelelő nagyságú lekerekítési sugár esetében az alámetszés nem jelentkezik olyan élesen, mint azt a szakirodalom [7] tárgyalja. Az is tény, hogy az evolvens szakasz, ami a mozgástörvény betartásáért felel, lényegesen rövidül, ami a kapcsolószámot jelentősen csökkenti. Viszont a fogtőben feszültségkoncentrátor nem keletkezik. Összehasonlításképpen vizsgáljuk meg az 5. ábrán szemléltetett profilekat, ahol a klasszikus számításnak megfelelő alámetszés-határi profileltolás is csupán egy enyhe alámetszéshez vezet.

A 6., 7. és 8. ábrán jól észrevehető, hogy a lekerekítési sugár lényeges befolyást gyakorol a foglábgörbe alakjára. Nagyobb lekerekítési sugár esetében az alámetszés sokkal tompábban, elfogadható módon jelentkezik. Bár az evolvens profil rövidülése a kapcsolódás rovására megy, bizonyos esetekben előfordulhat, hogy az alámetszés klasszikus határa alá kell fogazni; ez esetben a lekerekítési sugár értékét lényegesen meghatározni. A következőkben egy alternatív szintetikus geometriai módszert mutatunk be a szinguláris pontok azonosítására.

Ezzel, az PFC_1 háromszögből

$$tg \psi_1 = \frac{x_1^C + r_0 \varphi}{-y_1^C - m \xi} \quad (22)$$

Ezzel, az O_2M_1 sugár és a tengelyvonal közötti ϑ szög értéke

$$tg \vartheta = \frac{x_1^C + r_0 \varphi + r \sin \psi_1}{r_0 + y_1^C + m \xi + r \sin \psi_1} \quad (23)$$

Innen, az O_2M_1 sugár értéke, a $\vartheta(\phi)$ szög függvényében:

$$O_2M_1 \equiv r_x = \frac{x_1^C + r_0 \varphi + r \sin \psi_1}{\sin \vartheta} \quad (24)$$

A 2-es elem szállítósebessége a (23) és (24) kifejezések segítségével

$$\mathbf{v}_{t2} = \begin{pmatrix} r_x \cos \vartheta \\ -r_x \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

A következőkben föl kell írunk a v_{r1} relatív sebesség értékét. A profil mentén a pontnak a helyzetét a ψ_1 szög változása határozza meg. Az \overline{MM}_1 ív elemi változása adja a relatív sebesség abszolút értékét:

$$v_{r1} = r \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{-(y_1^C + m \xi)r_0 \varphi}{(y_1^C + m \xi)^2 + (x_1^C + r_0 \varphi)^2} \omega_2, \omega_2 = 1 \frac{rad}{s} \quad (26)$$

Ezzel a 2-es kerék fogprofilján az érintkezési pont relatív sebessége

$$\mathbf{v}_{r2} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{r_x}{r_0} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + v_{r1} \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ \sin \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Végül vegyük észre, hogy a körív u paramétere és a legördülési φ paramétertől függő ψ_1 paraméter között az alábbi reláció áll fenn:

$$u = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 - \psi_1 \quad (28)$$

Ezzel, a (27) kifejezés első két elemét nullává téve, megkapjuk a szingularitást előidéző u értéket, és azt a φ legördülési szögértéket, amire a szinguláris pont megjelenik.

9. Következtetések

A lefejtőszerszám lekerekített része, ha a lekerekítési sugár megfelelő, sokkal előnyösebb foglábgörbét alakít ki, mint a hegyes elméleti szerszám.

A szimulációkból észre lehet venni, hogy a fogaskereket kisebb profileltolásra lehet fogazni, mint a klasszikus elmélet által előírt alámetszési határ.

A szinguláris pontok kialakulásának geometriai feltételei arra engednek következtetni, hogy a lekerekítési ív alakja lényegesen meghatározza a foglábgörbe alakját és a szinguláris pontok kialakulásának pillanatát.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők ezúttal fejezik ki köszönetüket az Erdélyi Múzeum-Egyesületnek a kutatásban nyújtott segítségért, melynek részeredményeit jelen közleményben hozzuk nyilvánosságra.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Hollanda D.: *Bazele aşchierii și generării suprafețelor*. Vol. 2. Editura Universității „Petru Maior” Tîrgu-Mureș, 1996. 160–162.
- [2] Litvin F. L.: *A fogaskerékapcsolás elmélete*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [3] Máté M.: *Hengeres fogaskerekek gyártószerszámjai*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016. <https://doi.org/10.36242/mtf-12>
- [4] Balajti Zs.: *Examination and adjustment of the bearing pattern in case of helicoid drives*. In: 8th CIRP Conference on High Performance Cutting, Budapest, Hungary, June 25-27. 2018. Procedia CIRP. 77. (2018) 267–270.
- [5] Mohammad Q. A., Muhsin J. J.: *Analytical Solution of Bending Stress Equation for Symmetric and Asymmetric Involute Gear Teeth Shapes with and without Profile Correction*. Innovative Systems Design and Engineering Vol. 3. Nr. 6. 2012 (2018). 19–30.
- [6] Zhou Yuansheng, Wu Yuanhang, Wang Liming, Tang Jinyuan, Ouyang Hongwuab: *A new closed-form calculation of envelope surface for modelling face gears*. In: Mechanism and Machine Theory, 137. (2019) 211–226.
- [7] Szeniczai L.: *Általános fogazás*. Nehézipari Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1955.
- [8] Radzewich S. P.: *Gear Cutting Tools*. CRC Press, NY. 2010.