

Klasszikus és módosított fogtőgörbe összehasonlító vizsgálata

A Comparison between a Classical and a Modified Root Fillet

Hodgyai Norbert,¹ Tolvaly-Roşca Ferenc,² Máté Márton³

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia

¹ hodgyai@ms.sapientia.ro

² tferi@ms.sapientia.ro

³ mmate@ms.sapientia.ro

Abstract

The main purpose of this paper consists in improving the rigidity of the gear tooth by applying various root fillet forms that differ from the classical 0.38m radius circle arc. During the research the necessity of the re-formulation of the undercut appeared. It appears much later in case of applying rounded addendum edge planing comb as in case of using a classic generating profile tool. Therefore, the limits of the profile shifting can be significantly extended without weakening the tooth dedendum.

The paper presents the stress repartitions under equal load, which occur on classic teeth, and on teeth having a modified root fillet. In this last case, the modified root fillet is the envelope of the curve family constituted by the rounded edge curves, in the relative motion of the comb related to the cut gear.

Keywords: *gear, root fillet, stress analysis, deformation, rigidity.*

Összefoglalás

A kutatásunk célja, hogy a szabványos 0,38m sugarú körívvel közelített foglábgörbétől eltérő foglábgörbékét használva javítsuk a fog merevségét. A kutatás során fény derült az alámetszési probléma újra értelmezésének szükségére, mivel a lekerekített fejű fésűskéssel sokkal kisebb fajlagos profileltolás-értékekre jelenik meg az alámetszés, mint a hegyes elméleti szerszám esetében, így jóval nagyobb profileltolásokat alkalmazhatunk, mint korábban, a fog radikális gyengítését elkerülve. A dolgozatban azt tárgyaljuk, hogy a lefejtő fogasléc lekerekített fejének burkológörbéjét használva foglábgörbéként, a deformációk különböznek-e a hagyományos szerszámmal generált fogaskerekék deformációitól a terhelésekor.

Kulcsszavak: *fogaskerek, foglábgörbe, terhelésanalízis, deformáció, merevség.*

1. Bevezetés

Az evolvensgörbe generálása szempontjából a hengeres kerekék lefejtő szerszámai két csoportba sorolhatók:

- az álló egyenes módszerével generáló szerszámok – ezek a fésűskések;
- a mozgó egyenes módszerével generáló szerszámok – a csigamaró, a metszőkerék és a hámozókerék [1].

Az evolvens fogprofilú fogaskereké gyártása fogasléc alakú szerszámmal a legpontosabb, mivel a lécskerék kinematikai kapcsolat egyenértékű a körön legördített egyenes mozgásával, az egyenes élalak pedig mindig pontosabban előállítható, mint a görbült felületekről származó él. Tehát, ha a gyártandó kerék osztókörén a szerszám osztóvonalát csúszásmentesen legördítjük, akkor a fogasléc fogprofil-merőleges mindig az alapkörön

gördül le, és a különböző helyzetekbe kerülő élnyomok seregét burkoló görbe a lefejtett kerék fogprofilja lesz. Ebben az esetben a fogasléc fogai egyszerű trapéz alakúak. Többek között emiatt terjedt el az evolvens fog használata, mivel a fogasléc alakú fogazószerszámokat egyszerűen és nagy pontossággal lehet gyártani, ezzel ellentétben a szerszám gép kinematikája a lehető legbonyolultabb.

Az evolvens profilú hengeres kerek lefejtő fogaslécének alapprofilja, a DIN 867-1986 szerint, az 1. ábrán látható.

A kutatási célnak megfelelően, a lehető legpontosabban generáló szerszámot választjuk alapul, majd a szerszám fejének lekerekítését módosítjuk. A módosított fogfejű szerszámmal generált profil és a szabványos profil azonos körülmények közt terheljük (anyagminőség, terhelési erő, a virtuális térben azonos rögzítési bázisfelület). Terhelési analízist alkalmazunk, hogy vizsgáljuk az általunk javasolt fogprofilal gyártott fog viselkedését, a gyakorlatban alkalmazott, kisebb lekerekítésű szerszámmal előállított fogazathoz viszonyítva.

2. A matematikai modell

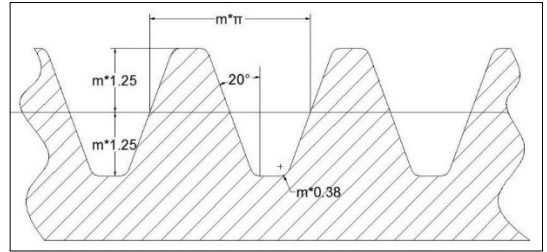
2.1. A fogláb görbe egyenletei

A fogazási eljárás matematikai modelljének felépítéséhez szükséges geometriai alapmodell a 2. ábrán látható.

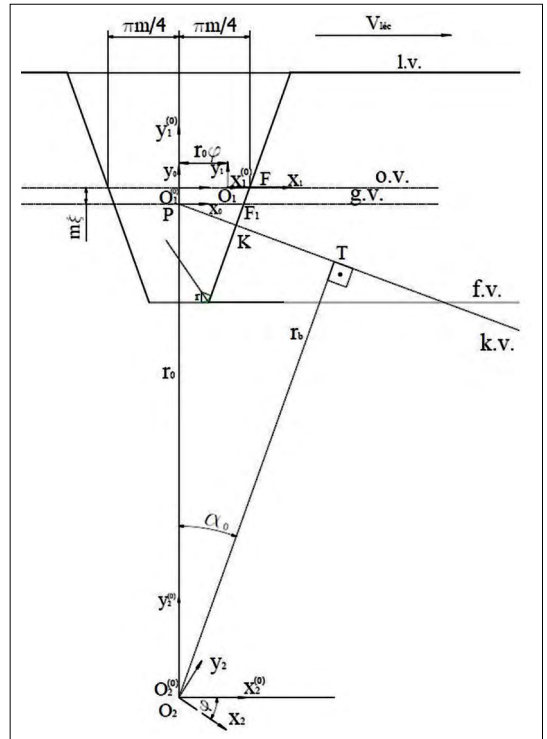
A fogazószerszám fogprofilja a tengelytárvonalhoz viszonyítva szimmetrikus alaphelyzetben található. Az ábrán a következő 5 koordináta-rendszert tüntettük fel:

- X_0PY_0 – a rögzített koordináta-rendszer, amelynek P origója a lécs-kerék virtuális hajtás főpontjában található, így a PX_0 tengely érinti a gördülő kört;
- $X_1^{(0)}O_1^{(0)}Y_1^{(0)}$ – a léchez rögzített koordináta-rendszer, alaphelyzetben;
- $X_1O_1Y_1$ – a léchez rögzített koordináta-rendszer, miután a fogazandó kerék φ szöggel elfordult a fogazás során;
- $X_2^{(0)}O_2^{(0)}Y_2^{(0)}$ – a fogazandó kerékhez rögzített koordináta-rendszer, alaphelyzetben;
- $X_2O_2Y_2$ – a fogazandó kerékhez rögzített koordináta-rendszer, miután a kerék φ szöggel elfordult a fogazás során.

A fogazási eljárás alatt a fogazószerszám eltávolítja a szerszámprofil körvonalán belül található anyagot. Ezt a modellezés során úgy értelmezzük, hogy a profil, amely kialakul az előgyártmányon, az a fogazószerszám élének burkológörbéje.



1. ábra. A lefejtő fogasléc



2. ábra. A lefejtés geometriája

A fogprofil egyenleteinek kiszámításához a fogaskerék rendszerében kell dolgoznunk a továbbiakban.

A lefejtő lécs profilját a saját rendszerében tudjuk a legkönnyebben felírni, majd a fogaskerék rendszerébe transzformáljuk az alábbi módon:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{21} \mathbf{r}_1 \tag{1}$$

A számítások elvégzése után a transzformációs mátrix alakja a következő lesz:

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & a_{14} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_{14} = r_0 \varphi \cos \varphi - (r_0 + m\xi) \sin \varphi$$

$$a_{24} = r_0 \varphi \sin \varphi + (r_0 + m\xi) \cos \varphi$$

A kapcsolódási egyenletet [2] a gyártóléc koordinátarendszerében írjuk fel és oldjuk meg:

$$\mathbf{v}_1^{(12)} \times \mathbf{n}_1 = 0 \tag{3}$$

A (3) egyenletben szereplő mennyiségek kifejezései sorban a következők, $\omega = -1$ -re:

$$\mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)} \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = (r_0 \omega \ 0 \ 0)^T = (r_0 \ 0 \ 0)^T \tag{5}$$

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1 + r_0 + m\xi \\ -x_1 - r_0\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A normális vektor $(n_x \ n_y \ 0)$ összetevőivel a léccerék kapcsolódási egyenlet általános alakja a következő:

$$(y_1 + m\xi)n_x + (x_1 + r_0\varphi)n_y = 0 \tag{7}$$

A kapcsolódási egyenletet a fogláb görbe analitikus felírására használjuk fel. A koordinátarendszerek helyzete a 3. ábrán látható. A gyártóléc lekerekített profiljának egyenletei, a léccerékben a következők:

$$\begin{cases} x_1(u) = x_c + r \cos(\alpha_0 + u) \\ y_1(u) = y_c - r \sin(\alpha_0 + u) \end{cases} \tag{8}$$

A körív normálvektorának koordinátái:

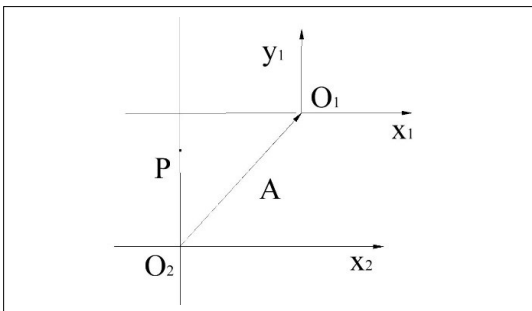
$$\mathbf{n}(u) = (\cos(\alpha_0 + u) \ \sin(\alpha_0 + u) \ 0)^T \tag{9}$$

A körív alakú lekerekítés határainak számítása részletesen megtalálható a [3]-ban. A lekerekítési sugár legnagyobb lehetséges értékét abból a feltételtől számítjuk ki, hogy ennek fogmagasság-irányú terjedelme ne lépje túl a $c = 0,25$ m szabványos foglábhözagértéket. Ennek alapján a legnagyobb lehetséges fajlagos sugár értéke

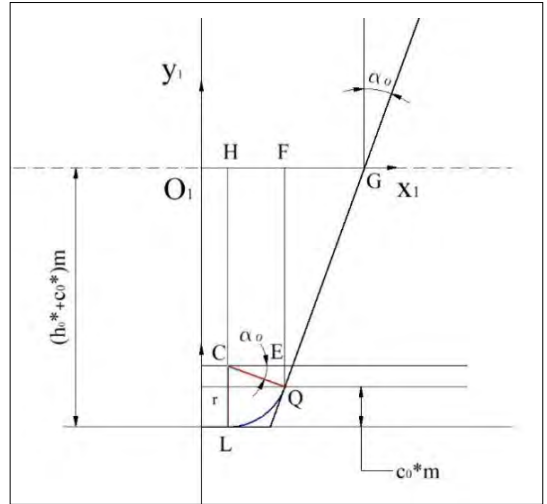
$$r_{max}^* = \frac{c_0}{\cos \alpha_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{2} \right) \tag{10}$$

A fentiek alapján, a lefejtő léccerék lekerekítési sugarát az

$$r = m\psi r_{max}, \psi \in (0,1) \tag{11}$$



3. ábra. A koordinátarendszerek helyzete



4. ábra. A C-középpont koordinátáinak számítása

képlettel számoljuk. A kerékíves ív középpontjának koordinátái [3] pedig (4. ábra):

$$\begin{cases} x_1^C = m \left(\frac{\pi}{4} - (h_0^* + c_0^*) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{\psi r^*}{\cos \alpha_0} \right) \\ y_1^C = (\psi r^* - (h_0^* + c_0^*))m \end{cases} \tag{12}$$

A fogláb görbét kialakító burkolt görbesereg egyenleteit az (1), (2) és (8) képletekből számítjuk. A műveletek elvégzése után ezek a következők lesznek:

$$\begin{cases} x_2(u, \varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi - r_0(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - m\xi \sin \varphi \\ y_2(u, \varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi + r_0(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) + m\xi \cos \varphi \\ A = x_c + r \cos(\alpha_0 + u) \\ B = y_c - r \sin(\alpha_0 + u) \end{cases} \tag{13}$$

A (7) kapcsolódási egyenlet a (9) normálvektor-koordinátákkal homogén trigonometriai egyenletté egyszerűsödik, melynek megoldása [3]

$$u(\varphi) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(g(\varphi)) - \alpha_0 + \pi, \varphi \leq \varphi_{kr} \\ -\operatorname{arctg}(g(\varphi)) - \alpha_0, \varphi > \varphi_{kr} \end{cases} \tag{14}$$

$$g(\varphi) = (y_1^C + m\xi)/(x_1^C + r_0\varphi)$$

2.2. A fogláb görbe és az evolvens szakasz érintkezési pontjának vizsgálata

A fogláb görbe parametrikus egyenletei, a kapcsolódási egyenlet megoldásának alakja miatt, meglehetősen bonyolultak és nem egyszerűen alkalmazhatók. A testmodell előkészítése céljából szükséges meghatározni az elméleti evolvens fog-

profil és a valós foglábgörbe érintkezési pontját, amely a talpkörön illeszkedik. A lekerekített generáló fogasléc esetében is lehet a [4]-ben alkalmazott geometriai szerkesztést alkalmazni. Jelen tanulmányban csak azon esetek elemzésére összpontosítunk, amelyek az alámetzés határa fölött vannak, tehát a fogláb és az evolvensgörbe érintők, nem pedig metszők.

2.2.1. Az evolvens geometriai felírása

Az „A₁” pontot a lefejtő szerszám „A” pontja generálja, az „A₂” pontot pedig az egyenes élszakasz első pontja generálja (5. ábra). Mivel az egyenes szakasz végpontja és a körívszakasz kezdőpontja egybeesnek, valamint a két görbe csatlakoztatott, az adott pontban van közös érintőjük, tehát közös normálisuk is. Ez azt jelenti, hogy a burkolóprofilon a két görbe egy időben hozza létre a megfelelő pontot.

2.2.2. A talpkör kiszámítása a kapcsolóvonal alapján

Az 6 ábrán a PBE-tengelyvonal és a kapcsolóvonalra ennek T pontjából emelt merőleges a kerék O₂-középpontjában metszik egymást, tehát OP = r₀ és OT = r_b.

Az 6. ábrán felismerhető geometriai összefüggésekből:

$$PB = m(h_0 + c_0 - \xi) - m\psi r^*(1 - \sin \alpha_0)$$

$$AA_1 = BA_1 - BA = m(h_0 + c_0 - \xi - \psi r^*) \operatorname{ctg} \alpha_0 \tag{15}$$

Innen az A pont kapcsolásának megfelelő legördülési szög értéke

$$\varphi_A = \frac{AA_1}{r_0} = \frac{2(h_0 + c_0 - \xi - \psi r^*) \operatorname{ctg} \alpha_0}{z} \tag{16}$$

A talpkör sugarát a [4] alapján és a 6. ábrán használt jelölésekkel az OTA₁ háromszögből számítottuk ki. A számítás részletezésétől eltekintünk.

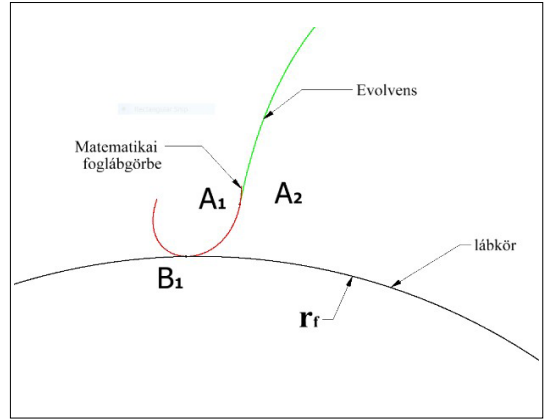
Az elméleti evolvens matematikai generálásából (7. ábra) származtatott egyenletek a következők

$$\begin{cases} x(v) = r_b(\sin(\varepsilon + v) - v \cos(\varepsilon + v)) \\ y(v) = r_b(\cos(\varepsilon + v) + v \sin(\varepsilon + v)) \end{cases} \tag{17}$$

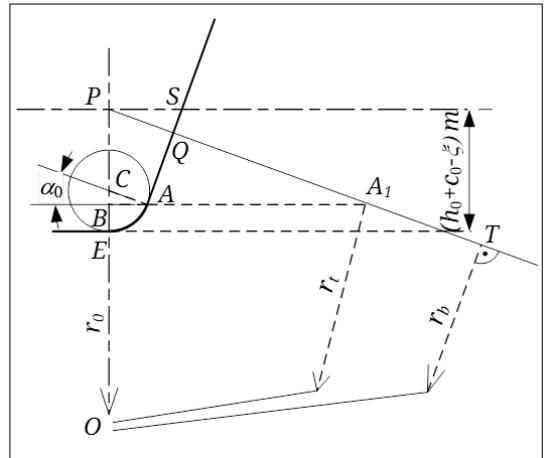
Az ε szög az alapköri fogárokív felszögét jelzi:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2z} - 2\frac{\xi}{z} \operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_0 \tag{18}$$

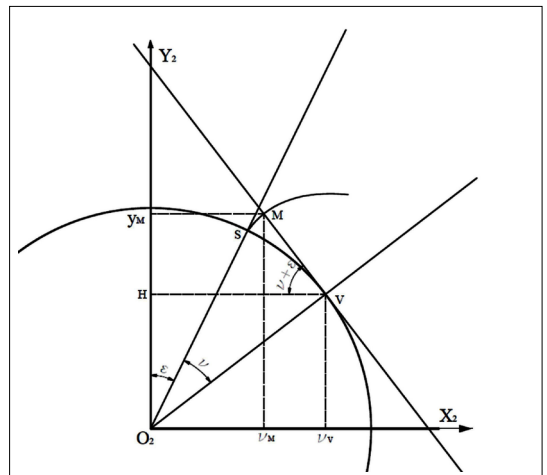
Ismervén az r_t-alapkör sugarát, a (17) egyenletekből kiszámítjuk a v paraméter intervallumát:



5. ábra. A körív által generált foglábgörbe csatlakozása az evolvenshez és a lábkörhöz



6. ábra. A talpkör sugarát értelmezése a lekerekített szerszám esetében



7. ábra. Az evolvens matematikai generálásához használt ábra

$$r_t \leq r_x \leq r_a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{r_t^2}{r_b^2} - 1} \leq \varepsilon \leq \sqrt{\frac{r_a^2}{r_b^2} - 1} \quad (19)$$

Szintén a **6. ábra** alapján kijelenthetjük, hogy a mozgásparaméter nulla értékének megfelelő alaphelyzetben nemcsak az egyenes profil Q pontja kapcsol, hanem az AE körív A pontja is.

Az ábráról ki lehet következtetni, hogy a fogláb görbe burkolása és az evolvens fogoldal burkolása egyidejűleg történik: míg az evolvens profil a kisebb polársugarú pontok irányában alakul ki, a fogláb görbe a lábkörtől, a talpkör tehát a polársugarak növekedésének irányában.

Innen következtetünk, hogy a fogláb görbét a burkoló (14) és (16) egyenleteiből írjuk fel, úgy, hogy a φ paramétert a $[0, \varphi_A]$ intervallumban futtatjuk.

2.3. A generált görbék bemutatása

A **8. ábrán** látható görbe felrajzolását a megadott egyenletek alapján a Mathcad 15 szoftverben végeztük, ahol első lépésben definiáltuk a kezdeti paramétereket. A fogaskerék választott paramétereire a következők voltak:

- modul: 50 mm,
- alapprofilszög: 20° ,
- fejmagasság – tényező: 1,
- lábhézag tényező: 0.25,
- fogsám: 18,
- profileltolási tényező: 0.

Bevezettük a fajlagos maximum sugárértéket (0.38). A fajlagos maximum sugárérték az 1 mm modulú fésűskés maximális lekerekítési sugara, amit „rcs”-vel jelöltünk.

Bevezettük a lekerekítés sugar-szabályzó tényezőt: amelyet Ψ_r -vel jelöltünk. A Ψ_r értéktartománya 0.1 közötti érték. Jelen esetben 0,79-et használtunk.

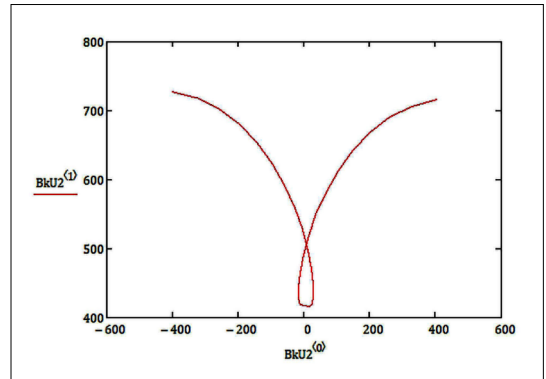
Az ábrázolás során észleltük, hogy a φ futóparaméter eléri a 90° értéket, emiatt az egyenletben megjelenő $tg(\varphi)$ értelmét veszíti, ezért a fogláb görbét 3 részből állítottuk össze. Első esetben a $\varphi < 90^\circ$ értékekre, ezt követően a értékekre, majd a $\varphi = 90^\circ$ -ra kiszámolt értékekre határoztuk meg a görbe x, y -koordinátáit.

A talpkör pontját analitikusan is meg lehet találni, bár kissé bonyolultabb számítások árán: a geometriai evolvens poláregyenletét összevetjük a burkológörbe poláregyenletével:

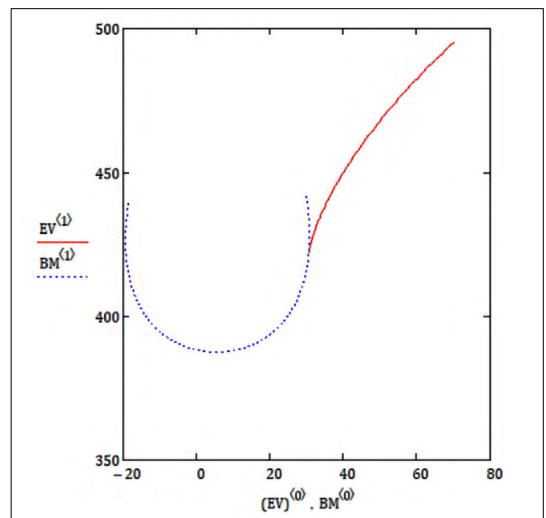
$$x^2 + y^2 = \rho^2 = r_b^2 \cdot (1 + \varphi^2) \quad (20)$$

$$x^2(\varphi, u(\varphi)) + y^2(\varphi, u(\varphi)) = r_b^2 \cdot (1 + \varphi^2) \quad (21)$$

$$\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad (22)$$



8. ábra. A helyes, szakadásmentes burkolási görbe ábrája

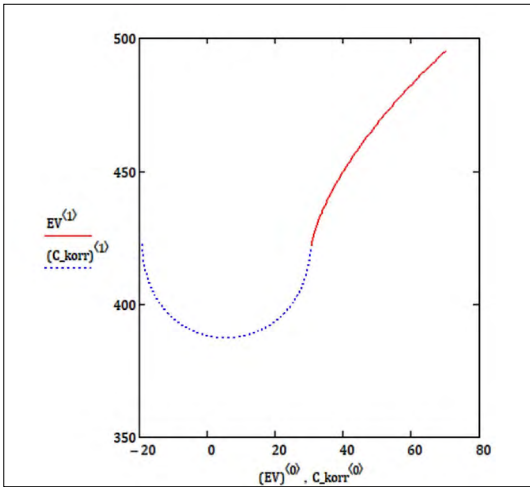


9. ábra. A burkoló evolvens szakasz és a fogláb görbe

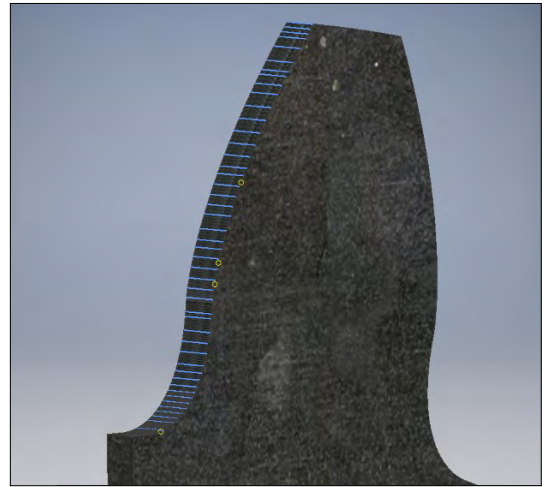
Mivel a **9. ábrán** látható fogláb görbe kezdeti végpontja a szükséges szakaszon túlhalad, ezt a programban javítjuk. Eredményként a **10. ábrán** látható görbeszakaszokat kapjuk.

A Mathcad-programmal előállított koordinátákat Excel-állományba mentettük, majd beolvastuk az AutoCad-programba. A szükséges körök megrajzolása után a fogprofil az osztóköri fogvastagság felére és az origóra nézve tükröztük, majd a fölösleges vonalrészeket eltávolítottuk, így megkaptunk egy teljes fogat és a lábkört amelyet a **11. ábrán** láthatunk.

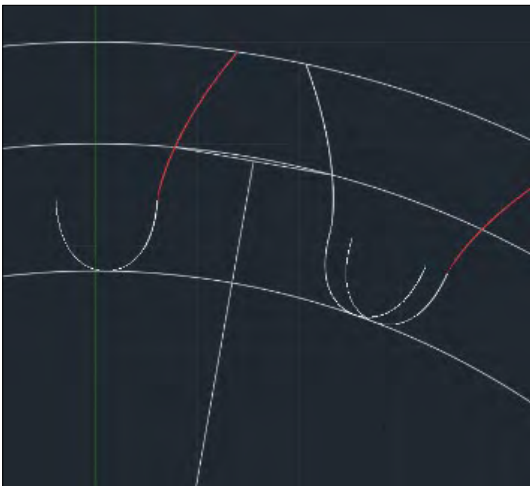
A lábkör és a fogláb görbe csatlakoztatásakor észlelt $1 \cdot 10^{-6}$ nagyságrendű hibát a lábkör megnövelésével kompenzáltuk. A terhelésanalízisnél ez a hiba elhanyagolható különbséget jelent.



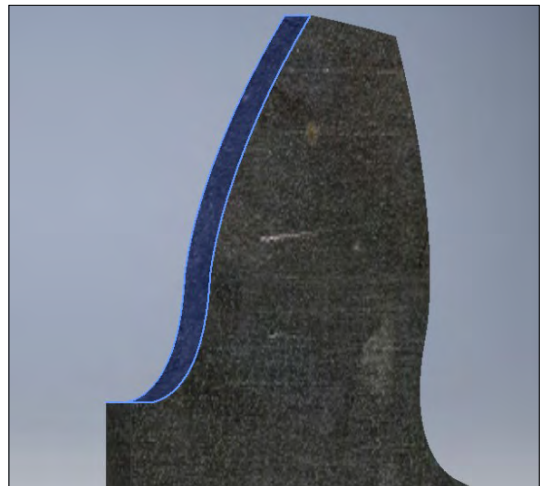
10. ábra. A végső evolvens és lábörbe profil



12. ábra. A fogfelület több apró felületből áll



11. ábra. Az AutoCad-programmal generált profil



13. ábra. Folytonos fogfelület spline görbével közelítve

A rajzmodell az AutodeskInventor programban testmodellé alakítottuk. A két programcsomag közötti kommunikációs hiba miatt az Autocadból átvett profilt az Inventor program nem folytonos felületként értelmezte, ezért a profilt simítanunk kellett. Ezt az Inventor programban nem sikerült elvégeznünk.

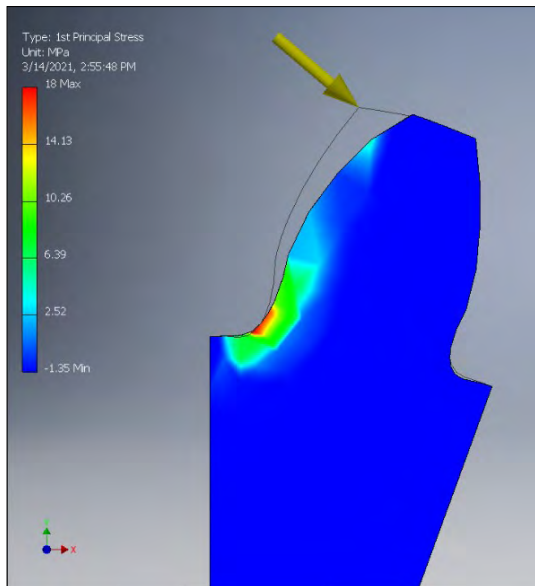
Ezt a lépést a SolidWorks program segítségével végeztük el; ami a profilt $1 \cdot 10^{-6}$ pontossággal simította, és összefüggő felületet készített belőle (13. ábra).

3. A szabványoknak megfelelő fog terhelési analízise

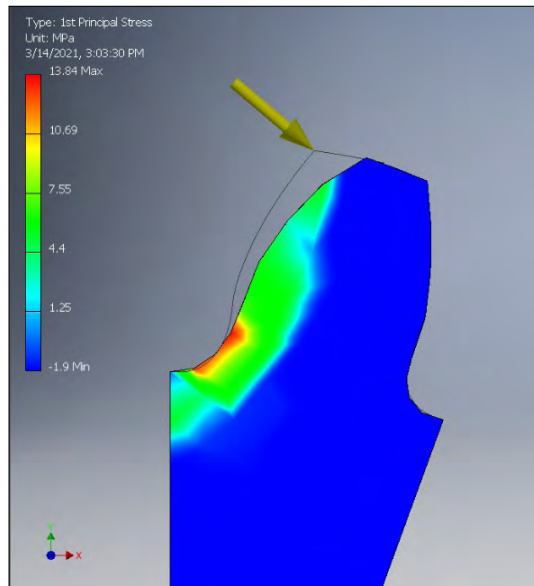
A gyakorlatban a lefejtő szerszám fogoldal és fejszalag találkozásánál megjelenik egy kis leke-

rejtés, amit 0,02 mm sugarú körívnek vettünk a modellezés során. Az előbbiekből felhasznált matematikai modellt alkalmazva elkészítettük a Mathcad programban a profilt, majd az Inventor környezetben elkészítettük a testmodellt, Solidworks környezetben simítottuk a profilt, amit 0,000456 mm eltéréssel készített a program. Ezt követően az Inventor környezetben elkészítettük a terhelésvizsgálatot, a fogaskerékszeletet a körből kimetszett V alak két oldalán mereven befogott oldalként definiáltuk, majd a legkedvezőtlenebb esetet feltételezve, azaz az erőt a profil csúcspontjába helyezve terheljük.

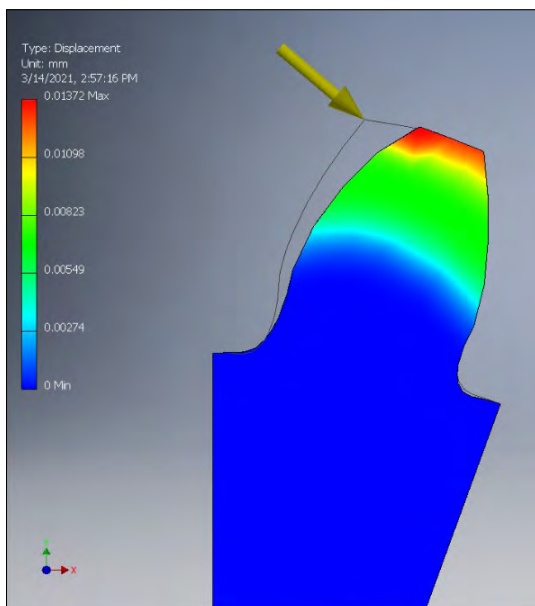
A vizsgálati eredmények a 14. és 15. ábrán láthatók.



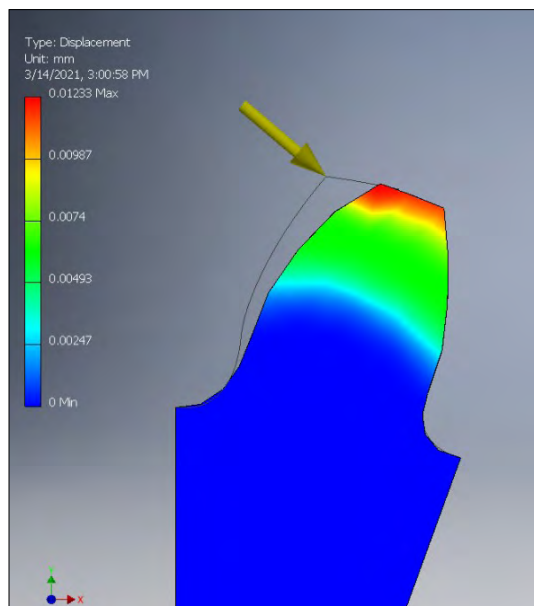
14. ábra. Az első főfeszültség eloszlása



16. ábra. Az első főfeszültség eloszlás



15. ábra. A legnagyobb elmozdulások ábrázolása



17. ábra. A legnagyobb elmozdulások ábrázolása

4. A javasolt lekerekítéssel generált fog terhelési analízise

A javasolt, nagyobb lekerekítésű szerszámmal kapott fogláb görbével épített fogmodellt azonos körülmények között terheltek. A terhelésvizsgálat eredményeit a 16. és 17. ábrán szemléltettük.

5. Következtetések

A feszültségeloszlás és az elmozdulások megfelelő ábráit összehasonlítva megfigyelhetjük, hogy adott irányú és nagyságú terhelőerő mellett, azonos rögzítési bázisfelületeket használva, a fog legnagyobb elmozdulása 10%-kal csökkent. Jelen esetben a fogazás során általános és egyszerű,

profileltolás nélküli kerekeket elemeztünk, de vélhetően a maximális profileltolást alkalmazva még ennél is jelentősebb mértékű különbségeket figyelhetünk meg.

Az első főfeszültségeket ábrázoló **14.**, illetve **16. ábrán** megfigyelhetjük, hogy a szabványos profil esetében a maximális feszültség értéke a fogtőben 18 MPa, míg a javasolt görbével 13,84 MPa. A fogoldalon a feszültség eloszlása sokkal egyenletesebb a javasolt görbét alkalmazva.

A maximális elmozdulásokat ábrázoló **15.**, illetve **17. ábrán** láthatjuk, hogy a szabványos profil esetében a maximális elmozdulás 0,01372 mm, míg a javasolt foglábgörbével, csak 0,01233 mm, tehát az elmozdulás értékét 10%-kal csökkentette a javasolt görbe.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Máté M.: *Hengeres fogaskerekek gyártószerszámai*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016. 110–111.
<https://doi.org/10.36242/mtf-12>
- [2] Litvin F. L.: *A fogaskerékkapcsolás elmélete*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [3] Hodgyai N, Tolvaly-Roşca F., Máté M.: *Az alámetezés körülményei lekerekített gyártó fogasléc esetében*. Műszaki Tudományos Közlemények, 14. (2020) 30–36.
<https://doi.org/10.33895/mtk-2021.14.05>
- [4] Szeniczei L.: *Az általános fogazás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1955.
- [5] Tolvaly-Roşca F., Máté M., Forgó Z., Kakucs A.: *Development of Helical Teethed Involute Gear Meshed with a Multi-Edge Cutting Tool Using a Mixed Gear Teeth Modeling Method*. Procedia Engineering, 181. (2017) 153–158.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.421>.