KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXIX. ÉVF., 2022. OKTÓBER (1157–1169. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Élettartamrés, indexálás és korspecifikus nyugdíjeloszlás

A nyugdíjak eloszlása minden tb-nyugdíjrendszer fontos jellemzője. Az életkor szerinti eloszlás különösen fontos, mert az idősebb nyugdíjasok nem tudják olyan könnyen kiegészíteni jövedelmüket, mint a fiatalabbak. Az induló nyugdíjak adott eloszlása esetén két tényező sajátosan befolyásolja a már megállapított nyugdíjak eloszlását: *1.* az indexálás típusa; *2.* az élettartamrés (milyen mértékben csökken a mortalitás a kereset függvényében). A jelen cikkben egy olyan modellt állítunk fel, amelyben az induló nyugdíjak keresetarányosak. Megmutatjuk, hogy a feltételes átlagnyugdíj–életkor függvény alakja az *1.* és a *2.* tényező viszonyától függ.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: H55.

Bevezetés

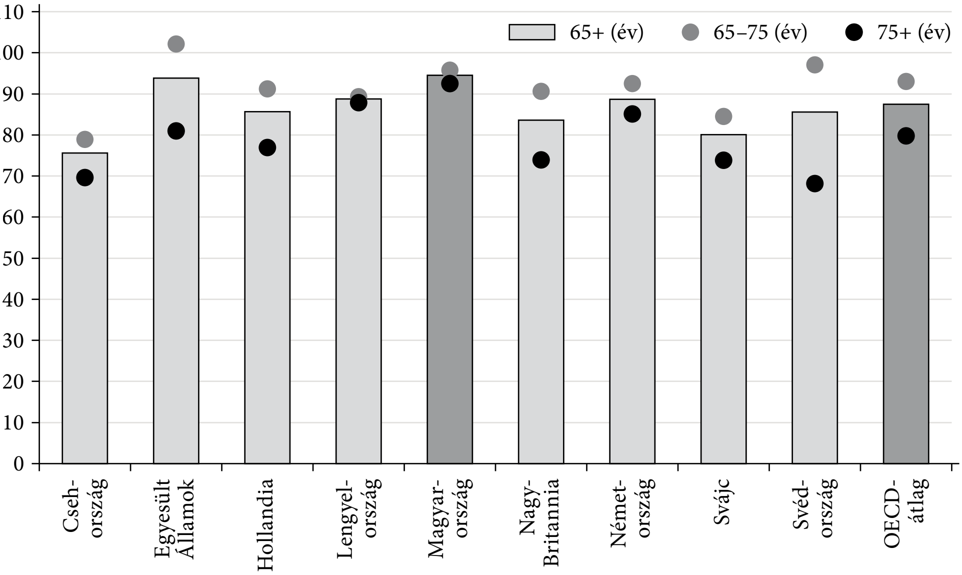
Mivel a kötelező nyugdíjrendszer egyik legfontosabb feladata az időskori szegénység kiküszöbölése, ezért a nyugdíjeloszlás a nemzetközi szakirodalom egyik legfontosabb kérdése volt és maradt. Témánk szempontjából különösen érdekes a nyugdíjeloszlás életkor szerinti vizsgálata. Az *1. ábrán* bemutatjuk, milyen hihetetlenül szóródnak (és éppen ezért kétes értékűek) a fiatalabb és az idősebb nyugdíjasok relatív jövedelmi helyzetét mutató arányok. Például néhány évvel ezelőtt a statisztika szerint Lengyelországban és Magyarországon alig volt különbség a fiatalabb és az idősebb nyugdíjasok jövedelme között, Csehországban, Németországban és Svájcban az utóbbi jelentősen elmaradt az előbbitől.

A magyar nyugdíjak eloszlását módszeresen elsőként *Martos* [1994] és *Major–Martos* [2000] vizsgálta – elsősorban a keresetek eloszlásának függvényében. Akkoriban a nyugdíjrendszer erősen degresszív volt, viszont a már megállapított nyugdíjak követték a béreket, ezért nem kellett megkülönböztetni az induló és a már

* Ezt a kutatást az NKF 129078. számú pályázata támogatta. Köszönetet mondok *Krémer Balázsnak, Székely J. Gábornak* és *Tóth Jánosnak,* valamint egy névtelen lektornak egy korábbi változathoz fűzött értékes megjegyzéseikért.

Simonovits András, ELKH KRTK KTI, BME MI (e-mail: simonovits.andras@krtk.hu).
A kézirat első változata 2022. május 22-én érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: https://doi.org/10.18414/KSZ.2022.10.1157

1. ábra
A fiatalabb és az idősebb nyugdíjasok relatív jövedelmi helyzete néhány OECD-országban



Forrás: OECD [2019] 7.1. táblázat.

megállapított nyugdíjakat. Mivel a magyar induló nyugdíjak egyre inkább kereset-arányosak, a már megállapított nyugdíjak viszont árkövetők, ma már a kor szerinti megkülönböztetés elengedhetetlen. E tanulmányban a keresetarányos és részlegesen bérindexált nyugdíjrendszerre szorítkozunk, amelybe szélső esetként a tiszta árindexált nyugdíj is belefér.

Egyéni szinten az induló nyugdíjak a korábbi keresetektől függnek, valamint – párhuzamos életkereseti pályákat feltételezve – a nyugdíjazás éve előtti kereset-dinamikától. Magyarországon a már megállapított nyugdíjak – a 2000 óta érvényes részleges, majd 2010-től teljesen elmaradt bérindexálás miatt – leszakadnak a bérektől (*Simonovits* [2018]). *Társadalmi* szinten azonban egy jelentős ellentendencia hat: a kisebb keresetű/nyugdíjú emberek gyorsabban halnak meg, mint a többiek, emiatt alakul ki az úgynevezett élettartamrés. A hazai közgazdasági szakirodalomban elsőként *Molnár–Hollósné Marosi* [2015] dokumentálta, hogy a nagyobb nyugdíjat élvezők statisztikusan tovább élnek. Ebből először *Krémer* [2015] vont le egy érdekes következtetést: a nyugdíjak teljes állományának eloszlása szimmetrikusabb, mint a kereseteké, pedig egy keresetarányos nyugdíjrendszertől hasonló aszimmetriát várnánk.

Krémer Balázs észrevételét továbbgondolva, felvetődik a kérdés: milyen a korspecifikus nyugdíjeloszlások sorozata, és azon belül milyen alakú a korspecifikus átlagnyugdíj–életkor függvény? Ezt egy megfelelően átalakított táblázatban mutatjuk be (lásd később *2. táblázat*), amely a magyar férfinyugdíjak nagyság és életkor szerinti együttes eloszlását közli – a női eloszlás kevésbé jellegzetes, ezért ezt kihagyjuk (vö. *Simonovits* [2022*a*] F11. táblázat). Látható, hogy – még a korai alacsony nyugdíjakat figyelmen kívül hagyva is – az átlagnyugdíj–életkor sorozat valóban hullámzik. Persze az ebben a táblázatban szereplő adatokra számos tényező hatott.

Ezen a ponton bevezetjük a *bérindexsúly* fogalmát: ez egy 0 és 1 közötti szám, amely megmutatja, hogy a már megállapított nyugdíjak éves emelésében mekkora az átlagos nettó béremelkedés súlya. (1993 és 1999 között ez a súly 1 volt, 2000 és 2009 között 0,5, és azóta 0.) Egy viszonylag egyszerű példán azt mutatjuk meg *(4.* és *5. táblázat),* hogy két kereseti osztályba sorolva a dolgozókat és két korosztályba sorolva a nyugdíjasokat hogyan függ a régebbi és az újabb nyugdíjátlagok, illetve szórások aránya az élettartamréstől és a bérindexsúlytól. Például 4,5 éves rés és bérindexálás esetén a nevezett nyugdíjhányados 4/3; nulla rés és árindexálás esetén a nevezett nyugdíjhányados csak 3/4.

Folytatásként egy évjárati modellel azt nézzük meg, hogy adott reálbér-növekedési pálya esetén milyen alakú a (korspecifikus) nyugdíjátlag–életkor görbe. A kifejtésnél kilenc egyszerűsítő feltevést sorolunk fel, amelyekből a valóságban egy sem teljesül – még közelítőleg sem. Mégis érdekes a modell, mert megvilágítja az élettartamrés és a bérindexsúly szerepét a nevezett görbe alakításában. Viszonyítási alapul szolgálhat az az eset, amikor nincs élettartamrés, és a bérindexsúly egyenlő 1-gyel: a korspecifikus nyugdíjátlag független az életkortól. Ha viszont figyelembe vesszük a rést és a részleges bérindexálást, akkor a kettő mértékétől függően hat az életkor a korspecifikus nyugdíjátlagra. Bár explicit módon nem vonunk le nyugdíjstratégiai következtetéseket, utalunk *Simonovits* [2022*a*]-ra, amely hasonló kérdéseket vizsgál a nyugdíjtervezés szempontjából.

Távirati stílusban tárgyaljuk ide kapcsolódó korábbi írásaimat. *Simonovits–Lackó* [2021] az élettartamrés hatását mutatta be az alap- és az arányos pillért kombináló, kevert nyugdíjrendszeren belüli újraelosztásra. *Simonovits* [2021] áttekintést nyújtott az egész témakörről, egy ponton kitérve a bérindexált nyugdíjakra. *Simonovits* [2022*b*] az élettartamrés hatását mutatta ki a járulékplafonra. A korábbi cikkek hivatkozásait csak a *Sheshinski–Caliendo* [2021] cikkel egészítjük ki, amely nagyon egyszerű, de mégis kalibrált modellel vizsgálta az élettartamrés hatását az amerikai tb-nyugdíjrendszerbeli újraelosztásra.

Az *1. táblázatban* összehasonlítjuk az idézett modellek sajátosságait (+ jelzi a tulajdonság jelenlétét, – a hiányát, a ± a modellcsaládon belüli váltakozását).

1. táblázat
Néhány modell összehasonlítása

Modell	Kevert nyugdíj	Évjárat	Indexálás	Plafon
Simonovits [2018]	+	+	±	–
Simonovits [2021]	+	–	+	–
Simonovits–Lackó [2021]	+	–	–	–
Simonovits [2022*b*]	–	–	–	+
Jelen tanulmány	–	+	+	–

Forrás: saját szerkesztés.

A továbbiakban először bemutatjuk az empirikus adatokat, majd egy nagyon egyszerű példán szemléltetjük az újabb és régebbi nyugdíjak kérdését, ismertetjük évjárati modellünket. Végül következtetéseinket közöljük. A *Függelék* első része a numerikus számítások hátterét írja le, második része pedig megmutatja, hogyan módosul a nyugdíjátlag–életkor görbe alakja a rés elhanyagolása esetén.

Empirikus adatok

A *2. táblázat* a 2019-ben nyugdíjban lévő magyar férfiak életkor és nyugdíj szerinti eloszlását mutatja, megfelelő normálás után. Sokkal jobb mutatókat készíthetnénk, ha hozzáférhetnénk a részletesebb adatokhoz. A szélső korosztályoktól eltekintve,

2. táblázat
A 2019-ben nyugdíjas férfiak létszámának nyugdíj és életkor szerinti százalékos eloszlása

Nyugdíj (ezer forint)	–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89	90–94	95–	Átlagos életkor (év)	Relatív gyakoriság (százalék)
	korosztály									
10	4,0	0,9	1,0	1,2	1,4	1,2	0,9	0,9	68,0	1,7
30	25,6	1,8	1,2	0,9	0,6	0,5	0,3	0,1	63,3	6,6
50	17,0	3,7	2,5	1,8	0,9	0,2	0,4	0,4	64,9	5,7
70	14,1	9,9	7,7	6,1	3,8	2,3	2,9	3,7	68,0	8,9
90	9,6	15,4	15,4	15,8	13,9	11,2	8,8	7,3	71,3	13,8
110	5,7	14,4	14,3	16,4	19,4	18,1	15,6	12,2	72,9	13,3
130	3,6	12,3	12,2	13,5	15,8	16,7	17,0	16,2	73,3	11,1
150	7,1	10,0	10,1	10,9	12,8	13,6	13,9	16,5	72,3	10,0
170	3,4	7,6	8,2	9,2	10,1	10,3	11,4	12,1	73,0	7,4
190	2,4	5,9	6,7	7,9	8,4	7,7	9,0	9,5	73,3	5,9
210	1,8	4,5	5,2	6,3	5,6	6,5	7,2	7,8	73,3	4,5
230	1,4	3,2	3,9	4,1	3,1	4,5	4,8	5,6	72,8	3,2
250	1,2	2,5	3,1	2,4	1,9	3,0	3,2	3,3	72,1	2,3
270	1,0	1,9	2,5	1,4	1,1	1,8	1,9	1,7	71,3	1,7
290	0,7	1,4	2,0	0,8	0,5	1,1	1,2	1,2	70,8	1,2
310	1,5	4,6	3,9	1,4	0,7	1,3	1,4	1,5	69,5	2,8
Népességarány (százalék)	22,2	28,2	20,4	14,8	8,2	4,4	1,5	0,3	–	100
Átlagnyugdíj, ezer forint/hó	*86,5*	*140,9*	*146,8*	*141,2*	*140,4*	*149,9*	*154,0*	*157,6*	*130,6*	–
Relatív szórás (százalék)	0,775	0,484	0,461	0,410	0,369	0,368	0,357	0,346	–	–

Forrás: saját szerkesztés *KSH* [2020] 11.6. táblázat alapján.

a többi korosztály öt évet fog át: a legfeljebb 64 évesekkel kezdve a legalább 95 évesekig. A legfiatalabb és a legidősebb nyugdíjosztályok átlagéletkorát nem ismerjük, ezért önkényesen 62 és 97 évet írtunk a helyükre. A nyugdíjosztályok 20 ezer forint közökkel haladnak, a 20 ezer forint alattiak után a 30 ± 10 ezer forint, ..., egészen a 300 ezer forint fölöttiekig. A legkisebb és a legnagyobb nyugdíjosztályok átlagát nem ismerjük, ezért önkényesen 10, illetve 310 ezer forintot írunk a helyükre.

A korspecifikus eloszlásokat a korosztályoszlopok adják, az egyes oszlopok elemeinek összege közelítőleg 100. Az utolsó előtti oszlop a nyugdíjosztályok átlagos életkorát adja meg, az utolsó oszlop pedig százalékos részesedésüket: például a 130 ezer forintos sorban 73,3 év, illetve 11,1 százalék. Az adott soron belüli számok viszont a megfelelő korosztály súlyát az adott nyugdíjsávon belül: például a 80–84 éves, 130 ezer forintos nyugdíjasok sorában 15,8 százalék. Témánk szempontjából a három legfontosabb észrevétel a peremsorokból, illetve az utolsó előtti oszlopból olvasható ki:

a) az életkor előrehaladtával először 141-ről (65–69 év) 147 ezer forintra (70–74 év) emelkedik, majd 140-ről (80–84 év) 158 ezer forintra (95 év felettiek) emelkedik az átlagnyugdíj (lásd a dőlten szedett számokat);

b) a relatív szórás a korral monoton csökken;

c) a nyugdíj növekedésével nem azonnal, hanem csak jóval az átlag fölötti 210 ezer forintos osztálytól kezd csökkenni az átlagéletkor.

Példa

Egy nagyon egyszerű példán mutatjuk meg azokat a bonyodalmakat, amelyeket adott reálbér-növekedési ütem esetén az élettartamrés és a részbeni bérindexálás okoz a korspecifikus nyugdíjeloszlásban.

A nyugdíjasok legfeljebb két időszakig élnek, és a típusok száma 2, indexük $i = \mathrm{L}, \mathrm{H}$. A $t = 0$-adik időszakbeli keresetük $w_\mathrm{L} < 1 < w_\mathrm{H}$, súlyuk $f_\mathrm{L}, f_\mathrm{H} > 0$, súlyuk összege $f_\mathrm{L} + f_\mathrm{H} = 1$. Arányos nyugdíjrendszer működik: $b = \beta w$, azaz $b_\mathrm{L} < b_\mathrm{H}$, $\beta > 0$ a járadékszorzó. Stacionaritási feltevésünk szerint az L-, illetve H-típusok túlélési valószínűsége $0 \leq p_\mathrm{L} \leq p_\mathrm{H} \leq 1$. Reálértékben számolva legyen g az időszaki kumulált növekedési együttható. A –1-edik időszakból megmaradtak akkori induló nyugdíja $b_i g^{-1}$ volt, amely mostanra g^{ι}-szorosára növekedett: $\theta = 1 - \iota$ jelöléssel, értékük $b_i g^{-\theta}$. A nyugdíjas népesség összetételét a *3. táblázat* adja meg:

3. táblázat
Nyugdíjeloszlás

Típus	Fiatal (1)	Idős (p_i)
Kiskeresetű (f_L)	b_L	$b_\mathrm{L} g^{-\theta}$
Nagykeresetű (f_H)	b_H	$b_\mathrm{H} g^{-\theta}$

Forrás: saját szerkesztés.

Az induló és a régebbi nyugdíjak átlaga rendre

$$\bar{b}_0 = f_L b_L + f_H b_H \quad \text{és} \quad \bar{b}_1 = \frac{f_L p_L b_L + f_H p_H b_H}{f_L p_L + f_H p_H} g^{-\theta}.$$

Az előbbi akkor és csak akkor kisebb, mint az utóbbi, ha

$$(f_L b_L + f_H b_H)(f_L p_L + f_H p_H) g^{\theta} < f_L p_L b_L + f_H p_H b_H,$$

azaz bevezetve az $\alpha = b_L/b_H$ alsó–felső nyugdíjarányt és a $\pi = p_L/p_H$ alsó–felső túlélési arányt, az egyenlőtlenség egyszerűsödik:

$$g^{\theta} < \frac{f_L \alpha \pi + f_H}{(f_L \alpha + f_H)(f_L \pi + f_H)} = \lambda.$$

Csebisev-tétele szerint $\lambda > 1$ (*Simonovits* [2017]). Ezért $g = 1$ (stagnálás) vagy $\iota = 1$ (bérindexálás) esetén az egyenlőtlenség mindig szigorúan teljesül (kivéve a résmentes $\pi = 1$ esetet, amikor egyenlőség áll fenn). Adott $g > 1$ (növekedés) esetén, ahogy csökken a bérindexsúly, úgy növekszik a bal oldal. Két eset van: *a)* az egyenlőtlenség még $\iota = 0$ esetén is teljesül: $g < \lambda$, ekkor az indexálástól függetlenül is az idősebbek átlagnyugdíja nagyobb, mint a fiataloké. A *b)* esetben $g \geq \lambda$, ekkor létezik olyan $\iota_g \in [0, 1)$ bérindexsúly, amikor a két átlag egyenlő, kisebb/nagyobb bérindexsúlynál az idősebbek átlagnyugdíja nagyobb/kisebb, mint a fiataloké: az élettartamrés, illetve az elégtelen bérindexsúly hatása dominál.

A *4. táblázatban* szemléltetjük a rés és a bérindexsúly hatását a régi és az új átlagnyugdíj arányára. 15-15 éves hosszúságú időszakkal, $p_H = 1/2$ nagyobb túlélési hányadossal, valamint $f_L = 2/3$ és $f_H = 1/3$ relatív gyakorisággal, illetve $b_L = 1/4$ és $b_H = 1$ új nyugdíjjal számolunk. Két paraméterérték változik: az élettartamrés: $\gamma = 15(p_H - p_L)$ és a bérindexsúly: ι, míg az éves növekedési ütem $g^{1/15} - 1 = 0{,}02$ marad. A táblázat bal felső sarkában nincs élettartamrés, és van bérindexálás, a két átlag azonos. Ahogy „eltérünk a kályhától", a két átlag aránya változik, a maximum a maximális élettartamrés és a bérindexálás párnál valósul meg: 1,333; a minimum pedig az élettartamrés hiánya és az árindexálás párnál valósul meg: 0,743. Összegezve: mind az élettartamrés, mind a bérindex súlyának emelkedése növeli az idősebb–fiatalabb nyugdíjas hányadosát.

4. táblázat
Élettartamrés, bérindexsúly és régi/új átlagnyugdíj

Élettartamrés (év) $15(p_H - p_L)$	Bérindexálás $\iota = 1$	Vegyes indexálás $\iota = 0{,}5$	Árindexálás $\iota = 0$
0,00	1,000	0,862	0,743
2,25	1,125	0,970	0,836
4,50	1,333	1,149	0,991

Forrás: saját szerkesztés.

Végül az *5. táblázatban* közöljük a relatív szórások hányadosát a fenti 3×3 esetre. A résmentes esetben a szóráshányadok azonosak az átlaghányadosokkal, de a rés növekedésével (és a bérindexsúly csökkenésével) a szóráshányadosok csökkennek, ahogyan *Krémer* [2015] már megállapította.

5. táblázat
Élettartamrés, bérindexsúly és régi/új nyugdíj szórásai

Élettartamrés (év) $15(p_H - p_L)$	Bérindexálás $\iota = 1$	Vegyes indexálás $\iota = 0{,}5$	Árindexálás $\iota = 0$
0,00	1,000	0,862	0,743
2,25	0,972	0,838	0,722
4,50	0,833	0,718	0,619

Forrás: saját szerkesztés.

Évjárati modell

Először az évjárati modell feltevéseit, majd képleteit vezetjük le, végül stilizált adatokkal számszerűsítjük őket.

Feltevések

Mindenekelőtt kimondjuk a modell alapfeltevéseit. A valóság nyilvánvalóan minden ponton jelentősen eltér a feltevésektől, de e feltevések segítségével képesek vagyunk lényeges eredményeket bizonyítani.

1. Uniszex népesség: nem különböztetjük meg a férfiakat és a nőket.
2. Stacionárius népességeloszlás: minden évben ugyanannyi ember születik, és a korhatár elérése előtt senki sem hal meg.
3. A korspecifikus halandóság az életpálya-kereset csökkenő függvénye, de független a nyugdíjtól.
4. Mindenki az időben állandó korhatárt elérve megy nyugdíjba.
5. A reálbérek növekedési üteme időben állandó.
6. A keresetek eloszlása időben állandó.
7. Az induló nyugdíjak az életpálya-keresetekkel arányosak.
8. A már megállapított nyugdíjak reálértékben az átlagos reálbér növekedési ütemének meghatározott részével emelkednek évente.
9. Az infláció kiszűrése nem hat a nyugdíjak reálértékére.

Képletek

Nincs infláció, azaz állandó árakon számolunk. A naptári éveket $t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ változó jelöli. A 0-adik évi helyzetre vagyunk kíváncsiak, de feltesszük, hogy az ottani $E(w)$ záró kereseti eloszlás $e(w)$ sűrűségfüggvénnyel érvényes korábban is és később is, csak minden eleme $g \geq 1$-gyel szorzódik évente. A 0-adik év tetszőleges nyugdíját két szám jellemzi: $a = 0, 1, \ldots, A - 1$, a nyugdíjazás óta eltelt évek száma, maximuma A; és w, ha a záró keresete wg^{-a} volt. Ekkor az a évvel korábban induló nyugdíja $b_{0,-a}(w) = \beta w g^{-a}$, amely évente g^{ι}-val szorzódik, ahol $\iota \in [0, 1]$ a bérindexsúly, tehát a 0-adik időszakban a megfelelő nyugdíj (a 0 alsó indexet elhagyva):

$$b_a(w) = \beta w g^{-a} g^{\iota a} = \beta g^{-\theta a} w, \qquad \theta = 1 - \iota \geq 0.$$

Stacionárius népességet feltételezve, amelyben minden dolgozói korosztályt ugyanakkora és nagyszámú személy képvisel, az a évi továbbélési valószínűség $p_a(w)$, amely a-nak csökkenő, w-nek növekvő függvénye.

Jelölje $f_a(b)$ az a éve nyugdíjba vonultaknak a $t = 0$-adik évi nyugdíj-sűrűségfüggvényét, ahol $b_{\mathrm{m}} > 0$ a minimális nyugdíj. Először eltekintünk a fokozatos kihalástól. Ahhoz, hogy alkalmazhassunk egy jól ismert tételt, szükségünk van a bér–nyugdíj inverzfüggvényre: bevezetve a $\kappa_a = \beta^{-1} g^{\theta a}$ jelölést, $w = \kappa_a b_a$, és a nyugdíj–bér függvény deriváltjára: $\psi'(w) = 1/\kappa_a$, amely állandó. Ekkor a kihalásmentes nyugdíj-sűrűségfüggvény

$$\tilde{f}_a(b_a) = e(\kappa_a b_a)\kappa_a.$$

Második lépésben feloldjuk a kihalásmentességet: a év alatt egy w indexű dolgozó $p_a(w/\kappa_a)$ valószínűséggel éli túl a „szitálást”, és a tényleges sűrűség a túlélési valószínűség és a „hullám”-sűrűség szorzata a megfelelő szakaszon:

$$f_a(b_a) = p_a(\kappa_a b_a)\tilde{f}_a(b_a) = \kappa_a p_a(\kappa_a b_a)e(\kappa_a b_a).$$

A legkézzelfoghatóbb mutató az a évvel korábban nyugdíjba vonultak $t = 0$-adik évi átlagos nyugdíja:

$$\bar{b}_a = \int_{b_m}^{\infty} b_a f_a(b_a)\,db_a.$$

Behelyettesítve a sűrűségfüggvényt a várhatóérték-képletbe, adódik a korspecifikus átlagnyugdíj:

$$\bar{b}_a = \kappa_a \int_{b_m}^{\infty} b_a p_a(\kappa_a b_a)e(\kappa_a b_a)\,db_a.$$

Számszerűsítés

A továbbiakban megpróbálunk számszerű választ kapni a korspecifikus nyugdíjeloszlásokra, különös tekintettel a hozzájuk tartozó nyugdíjátlagokra. Mivel viszonylag sok egyszerűsítő feltevéssel éltünk, nem érdemes a számszerűsítő szemléltetést valódi adatokra illeszteni.

Kiindulásként a kereseteloszlást egy σ kitevőjű Pareto-eloszlással adjuk meg:

$$E(w) = 1 - w^{\sigma}/w_m^{\sigma}, \qquad \text{ahol} \qquad \sigma > 1.$$

A megfelelő sűrűségfüggvény

$$e(w) = \sigma w^{\sigma-1} / w_m^{\sigma}.$$

Normálásként 1-nek vesszük a várható bért:

$$\mathbf{E}w = \int_{w_m}^{\infty} we(w)dw = 1.$$

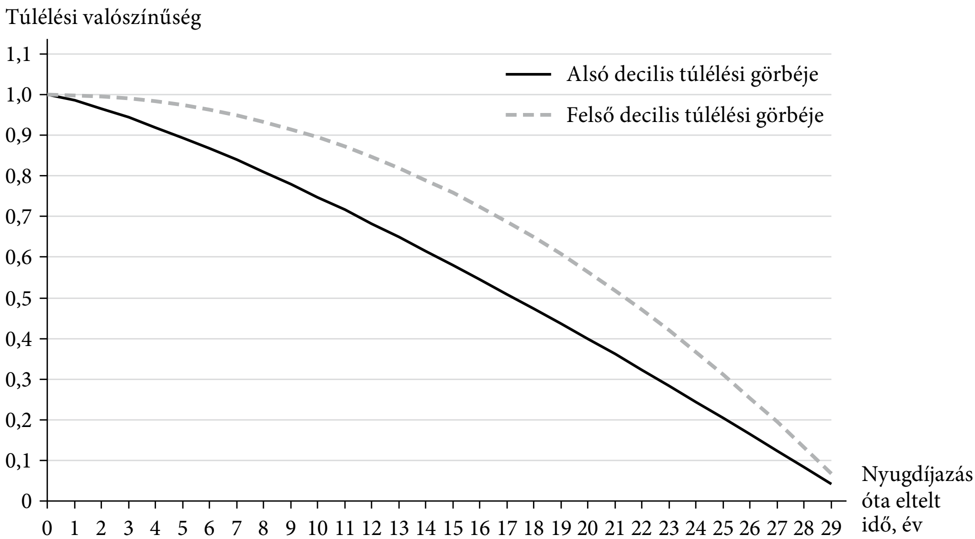
Ekkor $w_{\mathrm{m}} = (\sigma - 1)/\sigma$.

Második lépésként az életkortól és keresettől függő túlélésivalószínűség-függvényt hatványfüggvénnyel közelítjük (*Sheshinski–Caliendo* [2021]):

$$p_a(w) = 1 - (a/A)^{\gamma+\psi\omega}, \qquad \gamma, \psi > 0.$$

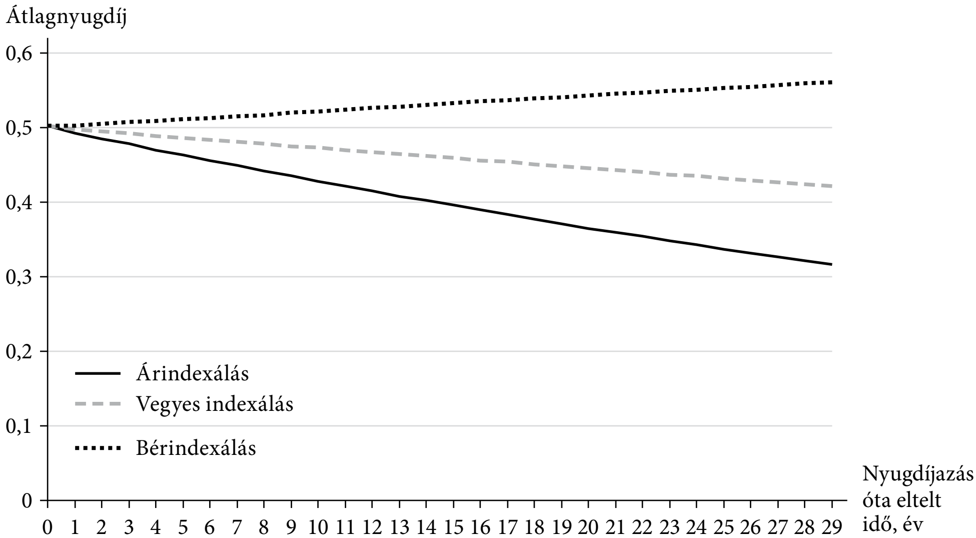
A (γ, ψ) paraméterpár értékét úgy választjuk meg, hogy a legfelső és a legalsó tized várható élettartamának különbsége reális legyen: $\gamma = 1{,}1$ és $\psi = 0{,}3$. A *2. ábra* mutatja a legalacsonyabb és a legmagasabb decilis túlélési görbéjét. Megemlítjük, hogy a nyugdíjban töltött évek száma a legalacsonyabb osztályban $L_1 = 17{,}2$ és a legmagasabb osztályban $L_{10} = 20{,}6$ év.

2. ábra
A legalacsonyabb és a legmagasabb decilis túlélési görbéje



A *3. ábra* a háromféle indexálás mellett adódó, évjárattól függő átlagos nyugdíjat mutatja be a $t = 0$-adik évben. Külön megadjuk az átlagos nyugdíjakat a bruttó átlagkereset arányában. Árindexálás esetén 0,429, vegyes indexálás esetén: 0,472 és bérindexálás esetén 0,522. Az első és a második görbe csökkenő, a harmadik növekvő.

3. ábra
Évjárattól függő átlagos nyugdíj – háromféle indexálás mellett



Következtetések

Egy egyszerű példa és egy egyszerű modell segítségével számszerűsítettük, hogyan hat az élettartamrés és a bérindexsúly egy keresetarányos nyugdíjrendszerben az életkorral kapcsolatos nyugdíj-egyenlőtlenségekre. Ha nincs rés, és teljes a bérindexálás, akkor a korspecifikus átlag állandó. Általában azonban két tendencia keresztezi egymást: minél nagyobb a rés, annál inkább emelkedik a korspecifikus nyugdíjátlag; minél kisebb a bérindexsúly, annál inkább csökken a korspecifikus nyugdíjátlag. Jóléti szempontból egyik tendencia sem előnyös. A méltányos megoldás: az alapnyugdíj bevonása a keresetarányos rendszerbe; minél nagyobb az alapnyugdíj súlya, annál kevésbé emelkedik az átlagnyugdíj–életkor görbe, ennek újraelosztási hatását *Simonovits–Lackó* [2021] érintette.

Hivatkozások

Krémer Balázs [2015]: Mi is a kétségbeejtő abban, hogy tovább élünk?, avagy az idősödési válság és a halál egyenlőtlenségei. Napvilág Kiadó, Budapest.

KSH [2020]: Szociális statisztikai évkönyv. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest.

Martos Béla [1994]: A nyugdíjak egyenlőtlensége és dekompozíciója, Közgazdasági Szemle, 41. évf. 1. sz. 26–48. o.

Major Klára–Martos Béla [2000]: Változott a nyugdíjak eloszlása. Megjelent: *Augusztinovics Mária* (szerk.): Körkép nyugdíjreform után. Közgazdasági Szemle Alapítvány, Budapest, 96–115. o.

Molnár D. László–Hollósné Marosi Judit [2015]: Az öregségi nyugdíjasok halandósága. Közgazdasági Szemle, 62. évf. 12. sz. 1258–1290. o. http://dx.doi.org/10.18414/Ksz.2015.12.1258.

OECD [2019]: Pensions at Glance. OECD, Párizs. https://www.oecd-ilibrary.org/social-issues-migration-health/pensions-at-a-glance-2019_b6d3dcfc-en.

Sheshinski, E.–Caliendo, F. N. [2021]: Social Security and the Increasing Longevity Gap. Journal of Public Economic Theory, Vol. 23. No. 1. 29–52. o. https://doi.org/10.1111/jpet.12477.

Simonovits András [2017]: Csebisev algebrai egyenlőtlensége és egy új közgazdasági alkalmazása. Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 67. évf. 2. sz. 72–75. o.

Simonovits András [2018]: Miért kell a nyugdíj-valorizálást és -indexálást pontrendszerrel felváltani? Közgazdasági Szemle, 65. évf. 9. sz. 903–922. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2018.9.903.

Simonovits András [2021]: Életpálya-jövedelemtől függő várható élettartam és a nyugdíjrendszer. Statisztikai Szemle, 99. évf. 7. sz. 632–660. o. https://doi.org/10.20311/stat2021.7.hu0632.

Simonovits András [2022*a*]: Nyugdíjstratégiai alternatívák. Közgazdasági Szemle, 69. évf. 7–8. sz. 902–928. o. http://doi.org/10.18414/KSZ.2022.7-8.902.

Simonovits András [2022*b*]: Élettartamrés és járulékalap-plafon. Szigmába közlésre elfogadva.

Simonovits András–Lackó Mária [2021]: A várható élettartam–jövedelem kapcsolat egyszerű ökonometriai becslése – újraelosztás a nyugdíjrendszerben, Közgazdasági Szemle, 68. évf. 11. sz. 1162–1170. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2021.11.1162.

Függelék

A numerikus számítások hátteréről

Ebben a függelékben bemutatjuk a Pareto-eloszlás I osztályos közelítését, amelyre a numerikus integrálásnál van szükségünk. A felső sávhatárokat jelölje W_i,

$$E(W_i) = 1 - W_0^\sigma / W_i^\sigma, \quad i = 1, \ldots, I, \quad \text{ahol} \quad \sigma \geq 2,$$

és W_0 a minimumbér. Egyforma súlyú részekre osztjuk az $E(\cdot)$ eloszlást:

$$E(W_i) = \frac{i}{I} = \delta i.$$

Behelyettesítve a hatványfüggvényt:

$$1 - W_0^{-\sigma} W_i^{-\sigma} = \delta i.$$

Megoldjuk a felső sávhatárra vonatkozó implicit egyenletet:

$$W_i^{-\sigma} = W_0^{-\sigma}\left(1 - i\delta\right), \quad \text{azaz} \quad W_i = \frac{W_0}{\left(1 - i\delta\right)^{1/\sigma}}.$$

Célszerű lesz a sávok középértékét az alsó és a felső sávhatár mértani közepének venni:

$$w_i = \sqrt{W_{i-1} W_i}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad \text{és} \quad w_i = \frac{\sigma}{\sigma - 1} W_{I-1}.$$

Behelyettesítve a sávhatárokat a sávközépbe, újabb zárt képletet kapunk:

$$w_i = W_0[(1 - (i-1)\delta)(1 - i\,\delta)]^{-1/2\sigma}.$$

W_0-át érdemes úgy meghatározni, hogy $w_I = \sigma\, W_I/(\sigma - 1)$-gyel együtt a bérek átlaga 1 legyen:

$$\sum_{i=1}^{I} f_i w_i = 1.$$

Belátható, hogy $W_0 = (\sigma - 1)/\sigma$.
A számszerűsítésnél $I = 10$-zel (decilisekkel) és $\sigma = -2$ Pareto-kitevővel dolgozunk. Az *F1. táblázatban* feltüntetjük a sávhatárokat és az osztályközéppontokat.

F1. táblázat
Sávhatárok és az osztályközéppontok

A decilis sorszáma i	Felső sávhatár W_i	Osztályközéppont w_i
1.	0,527	0,513
2.	0,559	0,543
3.	0,598	0,578
4.	0,645	0,621
5.	0,707	0,676
6.	0,791	0,748
7.	0,913	0,850
8.	1,118	1,010
9.	1,581	1,330
10.	–	3,162

Forrás: saját szerkesztés.

Az indexálás hatása élettartamrés nélkül

A *Függeléknek* ebben a részében bemutatjuk, hogyan módosulnak eredményeink, ha nincs rés, azaz ha $\psi = 0$ és $\gamma = 1{,}4$. Az *F1. ábra* a háromféle indexálás melletti résmentes évjárattól függő átlagos nyugdíjat mutatja be. A *3. ábrával* összehasonlítva látható, mi a rés hatása.

F1. ábra
Korspecifikus nyugdíjátlaggörbe, ha nincs rés