

Záróbeszámoló az F 037301 számú OTKA pályázathoz

Fleiner Tamás

2006. február 28.

1. A kutatással kapcsolatos tevékenységek bemutatása

Fleiner Tamás 2002 áprilisában munkalátogatás tett Eindhovenben, stabil párosításokról tartott előadás és végeztet a stabil b -párosítás poliéderrel kapcsolatos kutatást.

Fleiner Tamás a szintén 2002-ben, Bostonban rendezett IPCO IX konferencián Ron Aharonival közös eredményét adta elő, majd Oberwolfachban tartott előadást a stabil b -párosítás poliéderek leírásáról.

2002-ben vette fel Fleiner Tamás a kapcsolatot az ugyancsak stabil párosításokat kutató Katarína Cechlárovával, és decemberben munkalátogatást tett a kassai Pavol Jozef Šafarik egyetemen, ahol szintén előadott a témában. A szakmai együttműködés a stabil szobatárs probléma általánosításának megértésére irányult.

2003 januárjában Fleiner Tamás meghívott előadóként vett részt a Tokioban rendezett, „The 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications” c. konferencián.

2003 márciusában Katarína Cechlárová munkalátogatást tett Budapesten. Itt Fleiner Tamással a korábban kezdett kutatást folytatta, de együttműködött Biró Péterrel is. A Fleiner Tamással közösen elért eredmény szerepelt a 2003 szeptemberében Prágában rendezett EUROCOMB '03 c. konferencián.

2003 decemberében meghívott előadóként Fleiner Tamás „Some recent developments on stable matchings” címmel előadást tartott Kyotoban a „Submodular Functions and Combinatorial Optimization” konferencián, melyben a stabil párosításokkal kapcsolatos friss eredményekről számolt be. Ugyanitt, Kyotoban vette fel Fleiner Tamás a kapcsolatot a stabil párosítások algoritmikus vonatkozásait kutató David Manlove-val.

Fleiner Tamás 2004 májusban Kassán tett újabb munkalátogatást, és folytatta Katarína Cechlárovával az együttműködést. Biró Péter 2004 júniusában utazott Kassára, ahol a stabil párosításokat kereső inkrementáló algoritmusok tulajdonságait vizsgálták Katarína Cechlárovával közösen.

2004 júniusában a megkezdett együttműködés folytatásaként David Manlove utazott Budapestre, és kezdte el Fleiner Tamással vizsgálni a szuperstabil párosítások általánosításait. David Manlove Biró Péterrel is együttműködött a stabil párosításokat közelítő algoritmusok vizsgálatában. Az itt elért eredmény elhangzott a 2005 októberében megrendezett WAOA 2005 konferencián.

2004 júliusában Fleiner Tamás és Biró Péter is részt vett a Párizsban rendezett „Graph Theory 2004: a conference in memory of Claude Berge” c. konferencián, Fleiner Tamás a poszterszekcióban.

Fleiner Tamás meghívottként vett részt 2005 januárjában az Oberwolfachban rendezett „Graph Theory” c. workshopon, majd 2005 májusában munkalátogatást tett Glasgowban, ahol előadást tartott ill. David Manlove-val és a glasgowi kutatócsoport vezetőjével, Rob Irvinggel vizsgálták a szuperstabil párosítások általánosításait. A kutatás eredménye benyújtásra került a Theoretical Computer Science c. folyóirathoz, de további eredmények is várhatóak a látogatás során történt együttműködéstől.

Biró Péter kassai munkalátogatásán megkezdett, az inkrementáló algoritmusokkal kapcsolatos munkájának eredményét ismertette 2005-ben Budapesten a „4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications” c. konferencián. A munkát később folytatta, és Katarína Cechlárová 2006-os budapesti látogatásakor további ígéretes eredményeket értek el együtt.

2. Az elért eredmények bemutatása

Az OTKA által támogatott, stabil párosításokkal kapcsolatos kutatási eredmények első összefoglalása a [10] cikkben található, melyet az azóta eltelt időben legalább öten hivatkozták. Ebben a munkában számos, eddig ismert, stabil párosításokkal kapcsolatos ismeretet mutatunk be egy egységes modellben, és mutatunk rá a Knaster-Tarski fixponttétel alkalmazhatóságára. A cikkben több tudományterület (halmazelmélet, hálóelmélet, gráfelmélet, játékelmélet) között sikerül kapcsolatot teremteni. Az eredményekből következik a stabil párosítások Crawford-Kelso-féle általánosítása [20], és Blair korábbi, hálótulajdonságot bizonyító eredménye [5] is. Érdekes még a stabil párosítások alkalmazása az ún. linking tulajdonság bizonyításakor. A stabil párosításokra vonatkozó tétel általánosítható matroidokra. Az általánosított stabil párosítások hálótulajdonságának alkalmazásával a stabil párosítás poliéder általánosításának egy újfajta implicit leírását kapjuk, ami Rothblum korábbi eredményét [23] terjeszti ki.

Míg az idézett eredmények a stabil párosítások általánosításait főként kétoldalú modellekben vizsgálták, szintén érdekes az a probléma, amelyik a nem feltétlenül páros gráfok stabil párosításainak létezését taglalja. E tekintetben ismert volt korábról Tan egy karakterizációja [25]. A [2] cikkben a hipergráfokra általánosított problémát vizsgáljuk, és Scarf egy játékelméletben fontos tétele (az ún. Scarf lemma [24]) segítségével általánosítjuk Tan karakterizációját hipergráfokra, részbenrendezésekre és matroidokra.

A stabil párosításokat leíró poliéderekkel kapcsolatos korábbi eredményeket bár sikerült már a [10] cikkben kiterjeszteni (aholis jóval általánosabb poliédereket karakterizáltunk), maga az eredmény azonban nem általánosította pl. Rothblum poliédes tételét [23], mert az ottani leírás implicit volt, és általában Rothbluménál több feltételt használt. Az egyetemi felvételiket leíró modellhez tartozó poliédert Baiounak és Balinskinek sikerült jellemeznie [3], de a karakterizációjuk meglehetősen bonyolult volt. A [11] eredmény Rothblum leírásának egy olyan általánosítása, mely nemcsak az egyetemi felvételekhez tartozó stabil párosítás poliédert írja le, de a modell mindkét oldalán kvótát tartalmazó esetet is kezeli. A leírás alapja a stabil párosítás modellek egy elsőként itt megfigyelt splitting tulajdonsága. E tulajdonság önmagában is érdekes, és később lineáris programozási eszközöket alkalmazva Teo és szerzőtársai is felfedezték [27].

A [9] áttekintő jellegű munkában a stabil párosítások fixpontos megközelítésével kapcsolatos eredményeket igyekszünk egy inkább játékelméleti szempontból motivált, egységes keretbe foglalni. Új eredményként egy, a hálótulajdonságon alapuló bizonyítást adunk Sethuraman és Teo egy korábban, lineáris programozási eszközökkel igazolt, a stabil párosítások struktúrájával kapcsolatos tételére [26]. Ugyanezt a tételt általánosítjuk stabil b -párosításokra ill. matroidokra is. (Érdekesség, hogy az említett eredmény egy speciális esetét igazolja Klaus és Klijn egy későbbi munkájában is [21], bizonyításuk lényegében azonos a miénkkel.)

A [9] munkának egy másik újdonsága, hogy a stabil párosítás probléma számos változata között különféle konstrukciók révén teremt kapcsolatot, és rámutat például arra is, hogy a splitting tulajdonság a nem páros modellben is igaz. A redukción konstrukciót itt főként arra használjuk, hogy a Tan-karakterizációhoz kapcsolódó egyik kulcsfontosságú tételre új, rövidebb bizonyítást adjunk.

A stabil párosításokkal kapcsolatos problémák redukcóihoz kapcsolódó konstrukciókra épül a [7] munka is. Itt azt mutatjuk meg, hogy a nem páros stabil b -párosítás probléma, amelyben akár párhuzamos éleket is megengedünk, visszavezethető a már sokat kutatott nem páros stabil párosítás problémára egyszerű gráfokon. Ennek kapcsán Irving stabil párosítást kereső algoritmusát [19] is kiterjesztjük az általános esetre, és ennek alkalmazásaként a splitting tulajdonság nempáros általánosítását közvetlenül igazoljuk.

2005-ben Fleiner Tamás Robert Irvinggel és David Manlove-val közösen hatékony algoritmust adott az ún. *SRPF problémára*, azaz a stabil párosítás probléma azon nempáros általánosítására, ahol bizonyos kapcsolatok tiltottak (de a stabilitás szempontjából lehetségesnek tekintettek), és a modellbeli preferenciák részbenrendezések (azaz nem teljes rendezések) [15]. A vizsgált modell általánosítja az ún. szuperstabil párosítás problémát, aholis a preferenciasorrendek lineárisak, de indifferencia is megengedett.

Az [8] munka egy, a stabil párosításokkal rokon terület egy gyakorlati alkalmazhatóságával kapcsolatos. Nevezetesen, az élődonoros transzplantáció hatékonyságát lehet azáltal megnövelni, hogy amennyiben a donor által adományozott szerv (tipikusan vese) valamilyen okból nem alkalmas a kedvezményezett személyben beültetésre, akkor lehetőség van arra, hogy egy másik, hasonló szituációban lévő donorral cseréljen, és ezáltal mindkét donor kedvezményezettje közvetve szervhez juthasson. Általában az is megengedhető, hogy több donor-beteg pár álljon össze, és egy ciklikus permutáció szerint ültessék be a szerveket, ami által további betegek is lehetnek segíteni. Az innen adódó modellben hasonló stabilitási kérdések merülnek fel, mint a stabil házassági problémában. Az idézett munkában különféle stabilitási kritériumokat vizsgálva kiderül, hogy egyes problémák reménytelenül nehezek, másokra azonban hatékony algoritmust adódik.

David Abraham, Biró Péter és David Manlove [1] azt vizsgálták, hogy ha nincs stabil párosítás a szobatárs problémában, akkor mennyire közelíthető meg a stabilitás abban az értelemben, hogy olyan párosítást találjunk, melyet minimális számú él blokkol. Többek között sikerült megmutatni, hogy az ilyen párosítás megtalálása NP-nehez, sőt: a blokkoló élek számának approximálása is reménytelen.

A [4] munkában Biró Péter Katarína Cechlárová egy korábbi eredményét nagymértékben általánosítja, és a nempáros modellben is megmutatja, hogy a piacra utoljára érkező részvevő a lehető legjobban jár.

Az Egerváry kutatócsoporttal való együttműködéshez kapcsolódóan is születtek eredmények.

Andreas Hefner és Peter Kleinschmidt leírtak egy nyomdaüzemben felmerülő munkaszervezési problémát [16, 18, 17]. A cél egy optimális munkabeosztás megtalálása, ahol úgy kell a nyomdászokat a nyomdagépekhez rendelni, hogy minden nyomdász képes legyen ellátni a rábízott munkakört. E probléma bizonyos megszorított párosítások (ún. MS párosítások) keresését ill. optimalizálását igényli. Hefner és Kleinschmidt eredményét általánosítja matroidokra és Δ -matroidokra Fleiner, Frank és Iwata idevágó közös eredménye [14, 13].

Gráfelmélet kurzusok bevezető anyagának része Cayley 1889-ban bizonyított tétele [6], amely szerint n címkézett pont esetén pontosan n^{n-2} a válasz. A számos létező bizonyítás közül talán Prüfer 1918-ból származó módszer a lelegegánsabb: ez a lehetséges fákat kölcsönösen egyértelműen megfelelteti a címkékből képezhető $n - 2$ hosszúságú sorozatoknak [22]. A [12] eredmény a Prüfer-kódnak egy ekvivalens definícióját adja. Az eljárás érdekessége, hogy a szokásoshoz képest éppen fordított sorrendben konstruálja meg a kódot ill. fejteti azt vissza. Egy további alkalmazásként azon címkézett pontú fák számára adódik egyszerű formula, amelyek két adott csúcsának távolsága rögzített.

Hivatkozások

- [1] David Abraham, Péter Biró, and David Manlove. "Almost stable" matchings in the roommates problem. In *Approximation and Online Algorithms: Third International Workshop, WAOA 2005, Palma de Mallorca, Spain, October 6-7, 2005, Revised Selected Papers*, volume 3879 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 1–14. Springer, Berlin, 2006.
- [2] Ron Aharoni and Tamás Fleiner. On a lemma of Scarf. *J. Combin. Theory Ser. B*, 87(1):72–80, 2003. Dedicated to Crispin St. J. A. Nash-Williams.
- [3] Mourad Baïou and Michel Balinski. The stable admissions polytope. *Math. Program.*, 87(3, Ser. A):427–439, 2000.
- [4] Péter Biró. Stable matching with incremental algorithms - the last one gets his best stable partner. In *Proceedings of the 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (Budapest, 2005)*, pages 34–40, Budapest, 2005.
- [5] Charles Blair. The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. *Math. Oper. Res.*, 13(4):619–628, 1988.
- [6] A. Cayley. A theorem on trees. *Quart. J. Math.*, 23:376–378, 1889.
- [7] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner. On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Trans. Algorithms*, 1(1):143–156, 2005.

- [8] Katarína Cechlárová, Tamás Fleiner, and David Manlove. The kidney exchange game. Technical report, IM Preprints, 2005. <http://umv.science.upjs.sk/preprints/>.
- [9] Tamás Fleiner. Some results on stable matchings and fixed points. Technical report, 2002. EGRES Technical Report TR-2002-08, www.cs.elte.hu/egres.
- [10] Tamás Fleiner. A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Mathematics of Operations Research*, 28(1):103–126, 2003.
- [11] Tamás Fleiner. On the stable b -matching polytope. *Math. Social Sci.*, 46(2):149–158, 2003.
- [12] Tamás Fleiner. On prüfer codes. Technical report, 2005. EGRES Technical Report TR-2005-16, www.cs.elte.hu/egres.
- [13] Tamás Fleiner, András Frank, and Satoru Iwata. A constrained independent set problem for matroids. *Oper. Res. Lett.*, 32(1):23–46, 2004.
- [14] Tamás Fleiner, András Frank, and Iwata Satoru. A constrained independent set problem for matroids. Technical report, 2003. EGRES Technical Report TR-2003-01, www.cs.elte.hu/egres.
- [15] Tamás Fleiner, Rob Irving, and David Manlove. Efficient algorithms for generalised stable marriage and roommates problems. Technical report, DCS Technical Report Series, 2005. <http://www.dcs.gla.ac.uk/publications/>.
- [16] A. Hefner and P. Kleinschmidt. A polyhedral approach for a constrained matching problem. *Discrete Comput. Geom.*, 17(4):429–437, 1997. Dedicated to Jörg M. Wills.
- [17] Andreas Hefner. A min-max theorem for a constrained matching problem. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(2):180–189, 1997.
- [18] Andreas Hefner and Peter Kleinschmidt. A constrained matching problem. *Ann. Oper. Res.*, 57:135–145, 1995.
- [19] Robert W. Irving. An efficient algorithm for the „stable roommates” problem. *J. Algorithms*, 6(4):577–595, 1985.
- [20] Jr Kelso, Alexander S. and Vincent P. Crawford. Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50:1483–1504, 1982.
- [21] Bettina Klaus and Flip Klijn. Median stable matching for college admissions. kézirat.
- [22] H. Prüfer. Neuer beweis eines satzes über permutationen. *Arch. Math. Phys.*, 2:742–744, 1918.
- [23] Uriel G. Rothblum. Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope. *Math. Programming*, 54(1, Ser. A):57–67, 1992.
- [24] Herbert E. Scarf. The core of an N person game. *Econometrica*, 35:50–69, 1967.
- [25] Jimmy J. M. Tan. A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *J. Algorithms*, 12(1):154–178, 1991.
- [26] Chung-Piaw Teo and Jay Sethuraman. The geometry of fractional stable matchings and its applications. *Math. Oper. Res.*, 23(4):874–891, 1998.
- [27] Chung-Piaw Teo, Jay Sethuraman, and Liwen Qian. Many-to-one stable matching: Geometry and fairness. kézirat, 2004.