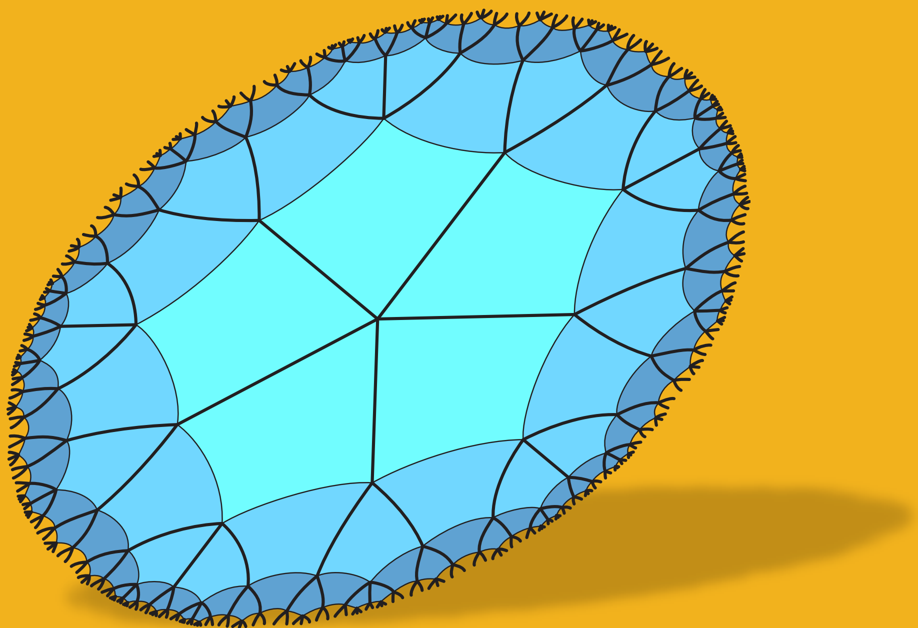
Dimenziók

Matematikai Közlemények

X. kötet



SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2022

Dimenziók

Matematikai Közlemények

X. kötet

SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet

Soproni Tudós Társaság

2022

A **Dimenziók − Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer megjelenő tudományos folyóirat. A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai, vagy független bírálók véleményezik, de a tartalomért a szerzők a felelősek.

KIADÓ:
Soproni Egyetem
Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar
Informatikai és Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.
és
MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Elektronikus elérhetőség: http://matematika.emk.uni-sopron.hu/dimenziok
HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

Matematikai Közlemények
X. kötet, 2022

doi:10.20312/dim.2022.02

A Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrájáról

Péntek Kálmán
ELTE SEK BDPK
Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Minden véges dimenziós asszociatív algebra a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával reprezentálható. Ismertek azonban olyan véges dimenziós algebrák, amelyek nem asszociatívak, így nem írhatók le klasszikus mátrixok segítségével. Max August Zorn 1931-ban értelmezte a vektor-mátrixok struktúráját, amelyek a klasszikus mátrixok egy természetes általánosítását alkotják. Zorn a split oktoniók alternatív algebráját eredményesen írta le ezen vektor-mátrixok segítségével.

Mi egy tetszőleges, nem kettő karakterisztikájú F test fölé építünk vektor-mátrix struktúrát, s megvizsgáljuk a legfontosabb algebrai tulajdonságait. Ha az F^3 vektortérben alkalmas skaláris és vektoriális szorzat van értelmezve, akkor a felépített vektor-mátrixok struktúrája egy alternatív algebra lesz akkor és csakis akkor, ha az F^3 vektortérben érvényes a Grassmann-azonosság. E vektor-mátrixok struktúrája viszont egy kompozíciós algebrát alkot akkor és csakis akkor, ha az F^3 vektortérben a Lagrange-azonosság teljesül.

ABSTRACT. Every finite dimensional associative algebra can be represented by a suitable subalgebra of the complete matrix algebra. However, there are known finite dimensional algebras which are non-associative, and so cannot be described by using classical matrices. In 1931 Max August Zorn defined the structure of vector-matrices, which form a natural generalization of classical matrices. Zorn showed that the alternative algebra of split octonions could be represented by these vector-matrices.

We build up a vector-matrix structure over an arbitrary F field of characteristic not equal to two and analyse its most important algebraic properties. If a suitable scalar and cross product is defined in the F^3 vector space, then the constructed vector-matrix structure will be an alternative algebra if and only if the Grassmann identity applies to the F^3 vector space. The structure of these vector-matrices will form a composition algebra if and only if Lagrange's identity applies to the F^3 vector space.

Előszó

A számok fogalmának általánosítása természetes útján haladva jó ideig asszociatív rendszerekkel találkozunk. Ilyenek a valós, a komplex, sőt még a klasszikus kvaterniók algebrája is. Ezek a struktúrák mind reprezentálhatók megfelelő teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebráival.

Már a XIX. század közepén kiderült, hogy léteznek olyan érdekes algebrai rendszerek, amelyek viszont nem asszociatívak, így a klasszikus mátrixok segítségével történő reprezentálás nem jöhet szóba. Közülük elsőként a zérusosztókat is tartalmazó split oktoniók algebráját sikerült Max August Zorn német matematikusnak reprezentálnia a klasszikus mátrixok egy érdekes általánosításának segítségével (ZORN,1931,1933). Ezek voltak a vektor-mátrixok, amelyek megkonstruálása során Zorn az euklideszi vektortér klasszikus skaláris szorzatára és vektorális szorzatára támaszkodott.

Később a vektor-mátrixokat eredményesen használták más algebrai struktúrák kutatása során is (PAIGE, 1956), (WELLS, 2010). A mértékadó szakirodalom fontos példaként tárgyalja a Zorn-féle vektor-mátrixok struktúráját (EBBINGHAUS et al, 1991), (MCCRIMMON, 2004), (ROSENFELD, 1997), (BREMNER et al, 2013). A klasszikus euklideszi skaláris szorzástól és vektoriális szorzástól eltérő műveleteket igénylő vektor-mátrix struktúrák bukkantak fel (PÉNTEK, 2020a, 2020b ,2021) dolgozataiban. Ebben a dolgozatban ezen érdekes Zorn-féle vektor-mátrixok struktúráját vizsgáljuk meg

1. Bevezetés

Legyen a továbbiakban F egy tetszőleges, $\neq 2$ karakterisztikájú test a 0 összeadási és az 1 szorzási neutrális elemmel. Jelölje F^3 az F test elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmazát. Közismert, hogy az F elemeivel, mint skalárokkal komponensenként történő szorzással, továbbá a komponensenként értelmezett összeadással F^3 egy 3-dimenziós vektorteret alkot az F test felett. Ha tehát $r \in F, X = (x_1, x_2, x_3)$ és $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F^3$, akkor

(1) skalárral való szorzás: $r \cdot (x_1, x_2, x_3) := (r \cdot x_1, r \cdot x_2, r \cdot x_3)$,

(2) összeadás: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Képezzük ezután az F, illetve az F^3 elemeiből a

(3) $Zorn(F) := \left\{ \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} :\ a, b \in F,\ U, V \in F^3 \right\}$

alakú hipermátrixok halmazát, amelyet a továbbiakban *Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának, vagy más elnevezéssel *Cayley-Dickson-féle mátrixok* halmazának nevezünk.

Az F test és az F^3 vektortér műveleteire támaszkodva műveleteket értelmezhetünk a $Zorn(F)$ halmazban a következő módon:

(4) skalárral való szorzás: ha $r \in F, \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in Zorn(F)$, akkor legyen

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot a & r \cdot U \\ r \cdot V & r \cdot b \end{pmatrix};$$

(5) összeadás: ha $\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} \in Zorn(F)$, akkor legyen

$$\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c & U + W \\ V + Z & b + d \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen, bár hosszadalmas számolással beláthatjuk, hogy érvényes a következő

1. Tétel. A $Zorn(F)$ halmaz a (4) és (5) műveletekkel egy 8-dimenziós vektorteret alkot az F test felett.

Legyen ezután az F^3 olyan vektortér, amelyre megköveteljük még a következők teljesülését is:

(a) Létezik egy *skaláris szorzás*nak nevezett $\circ : F^3 \times F^3 \to F$ szimmetrikus, bilineáris leképezés az F^3 vektortérben.

(b) Létezik egy *vektoriális szorzás*nak nevezett $\times : F^3 \times F^3 \to F^3$ antiszimmetrikus, bilineáris leképezés az F^3 vektortérben.

(c) A vektoriális szorzat eredménye legyen ortogonális a szorzat mindkét tényezőjére: bármely $U, V \in F^3$ esetén $(U \times V) \circ U = 0$ és $(U \times V) \circ V = 0$ teljesül.

A skaláris és vektoriális szorzat bilineáris tulajdonságából könnyen következik, hogy mindkét művelet balról és jobbról is disztributív a vektorok összeadására nézve. Így tetszőleges $U \in F^3$ esetén könnyen belátható az alábbi tulajdonságok teljesülése:

$$U \circ O = O \circ U = 0 \text{ és } U \times O = O \times U = O \tag{6}$$

itt $O = (0,0,0)$ az F^3 vektortér zérusvektora.

A vektoriális szorzás antiszimmetrikus tulajdonságából pedig következik kihasználva azt, hogy az F test karakterisztikája $\neq 2$, tetszőleges $U \in F^3$ esetén teljesül:

$$U \times U = O. \tag{7}$$

Ezután már algebrává fejleszthetjük a $Zorn(F)$ vektorteret a következő szorzási művelet bevezetésével: tetszőleges $\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ esetén

$$\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot c + U \circ Z & a \cdot W + d \cdot U - V \times Z \\ c \cdot V + b \cdot Z + U \times W & b \cdot d + V \circ W \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Nem nehéz, bár hosszadalmas számolással igazolható a következő

2. Tétel. A $Zorn(F)$ halmaz a (4), (5) és (8) műveletekkel egy 8 dimenziós, neutrális elemes algebrát alkot az F test felett az $\mathbb{E} := \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$ neurális elemmel. Itt $1 \in F$ a szorzás neutrális eleme és $O \in F^3$ a zérusvektor.

Az így nyert struktúra neve: *Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrája*, vagy más elnevezéssel a *Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája*

2. A vektor-mátrixok algebrájáról

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a Zorn-féle vektor-mátrixok algebrájának néhány fontos típusát.

3. Tétel. A Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája egy kvadratikus algebra.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ esetén léteznek olyan $\lambda, \mu \in F$ elemek, hogy $\mathbb{X}^2 = \lambda \cdot \mathbb{E} + \mu \cdot \mathbb{X}$ előállítás adható meg. Ekkor $Zorn(F)$ műveleteinek felhasználásával

$$\mathbb{X}^2 = \begin{pmatrix} a \cdot a + U \circ V & (a+b) \cdot U \\ (a+b) \cdot V & b \cdot b + U \circ V \end{pmatrix}, \text{ továbbá } \lambda \cdot \mathbb{E} + \mu \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \cdot a & \mu \cdot U \\ \mu \cdot V & \lambda + \mu \cdot b \end{pmatrix}$$

adódik. E két vektor-mátrix egybevetéséből $\mu = a + b$ és $\lambda = U \circ V - a \cdot b$ következik. Mivel ezen $\mu, \lambda \in F$ elempár ki is elégíti kívánt előállítást, így a $Zorn(F)$ valóban egy kvadratikus algebra. □

Definíció. Az $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ vektor-mátrix determinánsán a $det(\mathbb{X}) := a \cdot b - U \circ V \in F$ elemet, nyomán pedig a $t(\mathbb{X}) := a + b \in F$ értéket értjük.

Megjegyzés. A 3. Tételben szereplő $\mathbb{X} \in Zorn(F)$ vektor-mátrixra teljesül a $det(\mathbb{X}) = -\lambda$ és a $t(\mathbb{X}) = \mu$ összefüggés. Ekkor a $Zorn(F)$ algebra kvadratikus voltát kifejező összefüggés átrendezés után az

(9) $$\mathbb{X}^2 - t(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{X} + det(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{E} = \mathbb{O}$$

alakot ölti, ahol $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & O \\ O & 0 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ a zérus vektor-mátrix.

Ezután azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi lesz annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $Zorn(F)$ vektor-mátrixok stuktúrája egy alternatív algebra legyen.

Ha $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a_1 & U_1 \\ V_1 & b_1 \end{pmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} a_2 & U_2 \\ V_2 & b_2 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ két tetszőleges vektor-mátrix, akkor ezen struktúra pontosan akkor lesz egy alternatív algebra, ha teljesülnek az alábbi korlátozott „asszociatív” tulajdonságok:

(10) $$(\mathbb{X} * \mathbb{X}) * \mathbb{Y} = \mathbb{X} * (\mathbb{X} * \mathbb{Y}) \text{ és } (\mathbb{X} * \mathbb{Y}) * \mathbb{Y} = \mathbb{X} * (\mathbb{Y} * \mathbb{Y})\ .$$

Tekintsük az első összefüggést és számítsuk ki annak mindkét oldalát, majd komponensről komponensre haladva vessük össze a két eredményül kapott vektor-mátrixot. Ha a bal felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor a kijelölt műveletek elvégzése és az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után a (6) és (7) felhasználásával adódik e komponensek egyenlősége. Teljesen hasonlóan kapható a jobb alsó komponensek egyenlősége is.

Ha a jobb felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor itt is a kijelölt műveletek elvégzése és az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után a (7) felhasználásával a következő összefüggés marad:

(11) $$(U_1 \circ V_1) \cdot U_2 = (V_1 \circ U_2) \cdot U_1 - V_1 \times (U_1 \times U_2)\ .$$

Itt a jobb oldali első tagnál felhasználva a skaláris szorzat (a) szerinti kommutatív voltát, továbbá a jobb oldali második tagnál a vektoriális szorzat (b) szerinti anti-kommutatív szabályát a (11) átrendezés után az alábbi formát ölti:

(12) $$(U_1 \circ V_1) \cdot U_2 - (U_2 \circ V_1) \cdot U_1 = (U_1 \times U_2) \times V_1\ ,$$

amely pedig a Grassmann-azonosság – más elnevezéssel – kifejtési tétel.

Teljesen hasonlóan adódik bal alsó komponensek összehasonlításából is a Grassmann-azonosság érvényesülése.

A bemutatott úthoz teljesen hasonlóan tárgyalható analóg azonos eredménnyel ekvivalens átalakításokon keresztül a (10) második összefüggése is. Az elmondottak alapján igaz a következő

4. Tétel. A $Zorn(F)$ vektor-mátrixok struktúrája egy alternatív algebrát alkot akkor és csakis akkor, ha az (a) – (c) feltételeknek is eleget tevő F^3 vektortérben érvényes a (12) Grassmann-féle azonosság.

Ezután azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $Zorn(F)$ vektor-mátrixok struktúrája egy kompozíciós algebra legyen.

Ha $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a_1 & U_1 \\ V_1 & b_1 \end{pmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} a_2 & U_2 \\ V_2 & b_2 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$ két tetszőleges vektor-mátrix, akkor ezen struktúra pontosan akkor lesz egy kompozíciós algebra, ha $\neq 2$ karakterisztikájú test feletti olyan neutrális elemes algebra, amelyben értelmezve van egy multiplikatív norma (nem elfajuló kvadratikus forma az algebrában, mint vektortérben). Ez a norma a $Zorn(F)$ algebrában a vektor-mátrix determinánsa, amelynek multiplikatív voltát fejezi ki a

$$det(\mathbb{X} * \mathbb{Y}) = det(\mathbb{X}) \cdot det(\mathbb{Y}) \tag{13}$$

összefüggés, amely lényegében a determinánsok szorzási tételének teljesülését jelenti.

Tekintsük tehát a (13) összefüggést és számítsuk annak mindkét oldalán található kifejezést, majd hasonlítsuk össze a két oldalt. A (c) alkalmazásával és mindkét oldalról a megegyező tagok elhagyásával a (13) egyenlősége a következő összefüggésre redukálható:

$$(U_1 \circ V_2) \cdot (V_1 \circ U_2) + (V_1 \times V_2) \circ (U_1 \times U_2) = (U_1 \circ V_1) \cdot (U_2 \circ V_2)\,. \tag{14}$$

Felhasználva a skaláris szorzat kommutatív szabályát a (14) egyszerű átrendezésével ekvivalens átalakításokon keresztül közvetlenül adódik a közismert Lagrange-azonosság:

$$(U_1 \times U_2) \circ (V_1 \times V_2) = \begin{vmatrix} U_1 \circ V_1 & U_1 \circ V_2 \\ U_2 \circ V_1 & U_2 \circ V_2 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

A fentiek alapján igaz a következő

5. Tétel. A $Zorn(F)$ vektor-mátrixok struktúrája egy kompozíciós algebrát alkot akkor és csakis akkor, ha az (a) – (c) feltételeknek is eleget tevő F^3 vektortérben érvényes a (15) Lagrange-féle azonosság.

Megjegyzés. Speciálisan, ha $\mathcal{R}$ jelöli a valós számok testét, akkor $Zorn(\mathcal{R})$ a klasszikus euklideszi skaláris szorzattal és vektoriális szorzattal egy 8-dimenziós split (felhasadó – zérusosztókat is tartalmazó) kompozíciós algebrát alkot az $\mathcal{R}$ test felett.

Irodalomjegyzék

[1] **Bremner, M.R, Muakami, L. I., and Shestakov, I. P.**, (2013): Nonassociative Algebras. In: Hogben, L. (ed.): Handbook of Linear Algebra. CRC Press.
[2] **Ebbinghause, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer.
[3] **McCrimmon, K.** (2004): Taste of Jordan Algebras, Springer-Verlag, New York.
[4] **Paige, L. J.,** (1956): A class of simple Moufang loops. Proc. Amer. Math. Soc. 7. 471-482.
[5] **Péntek, K.,**. (2020a): Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely, 7-20.
[6] **Péntek, K.,** (2020b): Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról. Dimenziók. Matematikai Közlemények. Sopron, VIII. 25-33. doi:10.20312/dim.2020.03
[7] **Péntek, K.,** (2021): Az általánosított hiperbolikus oktonióalgebrákról. Dimenziók, Matematikai Közlemények, Sopron, IX. 13-22. doi:10.20312/dim.2021.02
[8] **Rosenfeld, B.** (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7
[9] **Wells, A.,** (2010): Moufang loops arising from Zorn vector matrix algebras. Comment. Math. Univ. Carolin 51 (2), 371-388.
[10] **Zorn, M. A.,** (1931): Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer, Berlin/Heidelberg. 123-147.
[11] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.