DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
X. kötet, 2022

doi:10.20312/dim.2022.01

Elemi majdnem-Johnson-poliéderek és számítógépes modellezésük

Talata István
BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest
talata.istvan@uni-bge.hu

Bölcskei Attila
BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest
bolcskei.attila@uni-bge.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Bevezetjük az elemi majdnem-Johnson-poliéderek fogalmát az elemi Johnson-poliéderekhez analóg módon olyan poliéderekre, melyeknek a laphálói nem egyeznek meg semelyik, szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéder laphálójával sem, de minden lapjuk szabályos sokszöghöz közeli alakú, és lapjainak mindegyik csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszögekkel, valamint ezen poliéderek nem kaphatók meg bizonyos geometriai műveletekkel ilyen típusú egyszerűbb vagy nevezetes poliéderekből sem. Áttekintjük a jelenleg ismert elemi majdnem-Johnson-poliédere-ket, és bemutatjuk, hogy azok hogyan modellezhetők geometriai módszerekkel, azaz valamely geometriai szoftverrel megvalósított térbeli geometriai szerkesztésekkel.

ABSTRACT. We introduce the notion of elementary near-miss Johnson solids analogously to elementary Johnson solids: these are such convex polyhedra whose face lattices are different from the face lattice of any convex polyhedron bounded by regular polygonal faces only, but the shapes of all of their faces are close to regular polygons in some sense, every vertex configuration of the faces can be obtained by regular polygons also, and furthermore, these polyhedra can not be obtained by some specific geometric operations from simpler or well-known polyhedra. We overview the elementary near-miss Johnson solids known in present, and we show how to model such polyhedra using geometric methods only, that is, how to create a virtual model of that polyhedron using space geometric construction steps with a geometry software.

1. Bevezetés

A Johnson-poliéderek azok a 3-dimenziós konvex poliéderek, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög, de különböznek az uniform poliéderektől (azaz a szabályos testektől, arkhimédészi testektől, szabályos hasáboktól és szabályos antiprizmáktól).

Majdnem-Johnson-poliédereken olyan 3-dimenziós konvex poliédereket értünk, melyeknek minden lapjuk közelítőleg szabályos sokszög alakú (erre matematikailag pontosabb definíciót fogalmazunk meg a 4. fejezetben), de nincs olyan konvex poliéder, melynek minden lapja szabályos sokszög és a laphálója megegyezne egy ilyen poliéder laphálójával (ld. [7], ott

KULCSSZAVAK. Majdnem-Johnson-poliéder, dinamikus geometria, számítógépes modellezés.
KEYWORDS. Near-miss Johnson solid, dynamic geometry, computer modelling.

ál-Johnson-poliédereknek nevezik az ilyen poliédereket, angolul a „near-miss Johnson solids" elnevezés a használatos).

Az elemi majdnem-Johnson-poliédereket az elemi Johnson-poliéderekhez (ld. [6]) analóg módon definiáljuk az 5. fejezetben, azaz ezek a poliéderek nem kaphatók meg bizonyos geometriai műveletekkel egyszerűbb majdnem-Johnson-poliéderekből és más nevezetes poliéderekből (pl. uniform poliéderekből, katalán testekből) sem. Ezen felül még egy kikötést teszünk az elemi majdnem-Johnson-poliéderekre, nevezetesen, hogy lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, amely ekvivalens azzal, hogy az egyes csúcsokra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege kisebb legyen 360°-nál, ha pontosan szabályos sokszöglapok csúcsszögeivel számolunk. Ez a feltétel biztosítja, hogy csak véges sok elemi majdnem-Johnson-poliéder létezzen (ld. ezt az 5. fejezetben), és mivel az ilyen poliéderek lapjainak csúcsszögei közelítik a szabályos sokszögek csúcsszögeit, ezért ebből a feltételből következik, hogy bármely csúcsra legfeljebb 5 lap illeszkedik.

Míg a Near-miss Johnson Solid című Wikipédia weblapon (ld. [5]) felsorolt majdnem-Johnson-poliéderek között a nem elemi majdnem-Johnson-poliéderek vannak túlnyomó többségben, addig a Johnson Solid Near Misses című Orchidpalms weblapon felsorolt 31 poliéderből a túlnyomó többség elemi majdnem-Johnson-poliéder. A majdnem-Johnson-poliédereknek a szerzők által ismert legteljesebb listája a Near-miss Johnson solid, Polytope Wiki – Miraheze (ld. [4]) weblapon található, ez a lista magában foglalja az említett Orchidpalms listának mind a 31 poliéderét, de még ezen felül is tartalmaz néhány elemi majdnem-Johnson-poliédert. Amíg a [7] cikk többségében olyan példákat mutat be a majdnem-Johnson-poliéderek geometriai modellezéséről, amelyek egy kivételtől, a 2. példától eltekintve nem elemi majdnem-Johnson-poliéderek, a jelen tanulmányban csakis elemi majdnem-Johnson-poliéderek geometriai modellezését vizsgáljuk és erre mutatunk be példákat.

Az elemi majdnem-Johnson-poliéderek geometriai szoftverrel történő számítógépes modellezési lehetőségeit a 6. fejezetben mutatjuk be. Mint ahogy az elemi Johnson-poliéderek családja kettébontható szerkeszthető és nemszerkeszthető poliéderekre, úgy az elemi majdnem-Johnson-poliéderek családja is kettébontható szerkeszthetőség szempontjából: a geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliéderekre, ill. a csak paraméteres geometriai modellezéssel előállítható poliéderekre. Mindkét típusból mutatunk be példákat az 6. fejezetben, mégpedig többségében olyan poliédereket, melyek lapjai csak háromszögek vagy négyszögek, mert ezekre a legegyszerűbb vizsgálni a poliéderlapok alakjának a szabályos sokszögtől való eltérésének a mértékét.

Mindezek előtt, a 2. fejezetben azonban felidézünk bizonyos, a témakörünkhöz kapcsolódó alapfogalmakat, majd a 3. fejezetben összefoglaljuk a szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számunkra fontos tulajdonságait, főbb típusait, mert a további fejezetekben ezzel analóg módon, a majdnem-Johnson-poliéderek esetében szeretnénk a hasonló tulajdonságokat megfogalmazni és a főbb típusokat meghatározni.

2. Kapcsolódó fogalmak

Ebben a cikkben mindenhol 3-dimenziós konvex poliéderekkel fogunk foglalkozni, tehát poliéderen a továbbiakban mindig 3-dimenziós és konvex poliédert értünk, mégpedig olyan típusút, amely korlátos, és így előáll véges sok pontjának, pl. a csúcsainak a konvex burkaként.

Egy poliédert szerkeszthetőnek nevezünk (ezt olykor úgy is mondjuk, hogy euklideszi-típusú szerkesztéssel megszerkeszthető), ha minden csúcsa megszerkeszthető, amennyiben adott egy élének két csúcsa (egymástól racionális számmal mérhető távolságra) egy síkban – ezt a síkot hívjuk alapsíknak –, és a következő alakzatok megszerkesztésére van mód (ha a megfelelő input paramétereik már megszerkesztettek): gömb (adott középponttal és sugárral, ez utóbbit két pont – a távolságukkal – határozza meg), sík (adott három, nem egy egyenesre eső pontjával), térbeli egyenes (adott két pontjával), térbeli kör (adott egy egyenessel, mint tengellyel, és egy kerületi pontjával). Ezen felül két megszerkesztett alakzat metszéspontjait vagy metszésvonalát (melyek egyenesek vagy körök lehetnek) is megszerkeszthetőnek vesszük. Ezek a műveletek a síkbeli körzővel-vonalzóval történő szerkesztési lépésekhez hasonlóan úgy bővítik a megszerkesztett térbeli pontok halmazát, hogy azok koordinátái megfelelő másodfokú testbővítések egymás utáni alkalmazásával mindig megkaphatók. A geometriai szoftverek összes tipikus, gömböt, síkot, kört és egyenest szerkesztő parancsa (pl. párhuzamos vagy merőleges sík, ill. egyenes szerkesztése) mind visszavezethetők az előbb felsorolt alapparancsokra, ahogy a tér egy megszerkesztett síkján a szokásos körzővel-vonalzóval történő szerkesztési lépések is. A szerkesztés során persze a poliéder éleit és lapjait is megszerkesztjük: térbeli szakasz, (ill. térbeli sokszög) megszerkeszthető, ha a végpontjai (ill. csúcspontjai) már megszerkesztettek.

Egy poliéder laphálóján a poliéder csúcsai, élei és lapjai által a tartalmazás relációra nézve meghatározott Boole-algebrát (másnéven Boole-hálót) értjük. Konvex poliéder esetén a lapháló ekvivalens egy síkgráf Boole-hálójával (síkgráf esetén az éleknek csak a gráf csúcsaiban lehet egymással közös pontjuk), ekkor a gráf csúcsai a poliéder csúcsainak, a gráf élei a poliéder éleinek, a gráf élei által határolt, csúcsot belső pontként nem tartalmazó síkbeli tartományok pedig a poliéder lapjainak vannak megfeleltetve (egyetlen tartomány nem korlátos, ez is a poliéder egyik lapjának felel meg). Ez azért hasznos, mert így síkgráfként könnyen ábrázolható egy konvex poliédér lapstruktúrája.

3. Szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy az arkhimédészi testek és a Johnson-poliéderek nagy része milyen geometriai műveletekkel állítható elő a laphálójukból vagy származtatható más olyan konvex poliéderekből, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög. Ezen túlmenően, az elemi Johnson-poliéderek és a nemszerkeszthető Johnson-poliéderek fontosabb tulajdonságait is felelevenítjük (ld. [6]).

Az 5 szabályos test és az arkhimédészi testek többségének csúcskonfigurációi (azaz az egy csúcsban találkozó lapok), és így az egész poliéder is megszerkeszthető felhajtásokkal (ld. [6], benne az 1. ábrát és a Bevezetés elején a hozzá tartozó magyarázatot) – ez a módszer minden olyan szabályos, és arkhimédészi test esetén jól használható, ahol 3 lap találkozik egy csúcsban, de a szimmetriák kihasználásával a többi szabályos, ill. arkhimédészi testre is elkészíthetők a felhajtások, kivéve a pisze kocka és pisze dodekaéder eseteit (ez a két test nemszerkeszthető, ld. [6]).

Az arkhimédészi testek többsége a szabályos testekből vagy másik arkhimédészi testből előállítható csonkolás, kibővítés, vagy piszésítés műveleteivel: 1) csonkolás esetén olyan síkokkal szelünk egy poliédert, hogy mindegyik lapja lap marad (csak az eredetinek egy része lesz), és új lapjai keletkeznek; 2) kibővítés esetén a test összes lapja, vagy bizonyos típusú lapjai egységesen kifelé kerülnek eltolásra (síkjukra merőlegesen eltolva, az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora távolságra), és a konvex burkot képezzük, ekkor új lapok is keletkeznek; 3) piszésítés esetén a test összes lapja egységesen kifelé kerül eltolásra (síkjukra merőlegesen eltolva, az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora távolságra) és egyúttal elforgatásra (az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora szöggel elforgatva a súlypontjuk körül a síkjukban). Az, hogy az újonnan keletkező lapok szabályos sokszögek legyenek, az első két művelet során megszerkeszthető (a szelő síkok helyzetének, ill. az eltolás távolságának a megszerkesztésével), a harmadik műveletnél pedig 1-paraméteresen szerkeszthető poliédermodell segítségével elérhető, hogy csakis szabályos és egyenlő szárú háromszöglapok keletkezzenek, majd megfelelő paraméterbeállítással megvalósítható, hogy az egyenlő szárú háromszöglapok tetszőlegesen közeliek legyenek szabályos háromszögekhez (emiatt a pisze kocka és a pisze dodekaéder tetszőleges pontossággal modellezhetők, 1-paraméteres szerkesztéssel), ld [6].

A Johnson-poliéderek többsége előállítható szabályos testekből, arkhimédészi testekből vagy másik Johnson-poliéderből, szabályos hasábokból és szabályos antiprizmákból (a szabályos hasábok és prizmák mind szerkeszthetők – ezek olyan hasábok, ill. prizmák, melyeknek lapjaik szabályos sokszögek) levágás vagy bővítés műveleteivel: levágáson olyan síkkal történő szelést értünk, amelyet a kiindulási poliéder csúcsai feszítenek ki, és a szelősík nem metsz bele lap relatív belsejébe, bővítésen pedig két olyan poliéder unióját értjük, melyek metszete egy közös lapjuk. A 92 darab Johnson-poliéder (amelyek J1-J92 elnevezésekkel kerültek meghatározásra) közül a J1-J83 poliéderek előállíthatók ilyen műveletekkel.

A J84-J92 poliédereket elemi Johnson-poliédereknek nevezzük, mivel azok nem állíthatók elő az előző bekezdésben leírt módon – tehát 9 darab ilyen poliéder van a 92 darab Johnson-poliéder között. Közülük a J91 és J92 poliéderek az egyik arkhimédészi test, az ikozidodekaéder határának bizonyos részét (4, ill. 7 lapját tartalmazó összefüggő határdarabot) felhasználva könnyen megszerkeszthetők térben (így ez a két poliéder megszerkeszthető), valamint a J87 poliéder a J86 poliédernek egy négyzet alapú gúlával történő bővítése. Belátható, hogy a J84-J90 poliéderek nemszerkeszthető Johnson-poliéderek, ill. a J84-J86 és J88-J90 poliéderek együtt primitív nemszerkeszthető poliéderek (mivel egyik sem szerkeszthető meg, még a többi ilyen poliéder felhasználásával sem). De a nemszerkeszthető Johnson-poliéderek mindegyike tetszőleges pontossággal modellezhető 1-paraméteres szerkesztéssel, majd a paraméterérték megfelelő beállításával, ld [6].

Fennáll, hogy egy tetszőleges, szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéder (tehát szabályos test, arkhimédészi test, szabályos hasáb, szabályos antiprizma, vagy Johnson-poliéder) rendelkezik olyan szimmetriákkal, amelyekkel a lapхálója rendelkezik: azaz, ha a laphálónak vesszük egy tetszőleges automorfizmusát (azaz olyan illeszkedéstartó leképezését önmagára, melyben különböző csúcsok képei különböző csúcsok, élek képei élek, lapok képei lapok), akkor van olyan önmagára képező egybevágósága is a testnek (forgatása, tükrözése), amely a csúcsait, éleit, lapjait pontosan a lapháló adott automorfizmusa szerint képezi önmagára.

4. Majdnem-Johnson-poliéderek

A majdnem-Johnson-poliéderek olyan 3-dimenziós konvex poliéderek, melyeknek mindegyik lapjuk vagy szabályos sokszög, vagy olyan sokszög, melynek az alakja közeli egy szabályos sokszöghöz (ha egy ilyen poliédernek egy lapja n-szög, akkor annak az alakja egy szabályos n-szöghöz kell, hogy közel legyen). Ez persze nem egy matematikailag precíz definíció, de azzá tudjuk tenni a következőkben.

Szemléletesen azt szeretnénk megragadni, hogy mikor nem vehető észre, hogy egy poliédernek nem minden lapja szabályos sokszöglap, vagy mikor ítéljük úgy, hogy mindegyik lapjának az alakja igen közeli egy szabályos sokszöghöz.

Az egyik lehetőség az lenne, hogy valamilyen távolságfogalmat használunk, pl. Hausdorff-metrikát, és adott lap esetén, ha az konvex n-szög, akkor megkeressük, hogy melyik az a szabályos n-szög, amely a legközelebb esik hozzá ebben a metrikában, és ezt a távolságot tekintjük a szabályos sokszög alakjától való eltérésnek. Azonban ez egy eléggé bonyolult számítási feladat. Ennél kicsit egyszerűbb lenne annak kiszámítása, hogy az n-szög csúcsai mennyire közel helyezkednek el egy körvonalhoz, és az egymást követő csúcsok távolsága mennyire egyező. Ebben az esetben viszont a csúcsokhoz valamilyen értelemben közel elhelyezkedő kör meghatározása lenne bonyolult feladat.

A másik lehetőség, hogy a lapok alakját meghatározó, könnyen kinyerhető paraméterekre – mondjuk a poliéder élhosszaira és lapjainak csúcsszögeire – adunk meg feltételeket ahhoz, hogy a poliéder lapjai szabályos sokszögeket közelítsenek. Egy szabályos n szöghöz közeli n-szög oldalhosszai arányainak a maximuma közeli kell, hogy legyen az 1-hez, a szögeinek az eltérése a szabályos n szög csúcsszögének értékétől is kicsi kell, hogy legyen. Továbbá, az egész poliéder esetén elvárt, hogy az egyes, akár egymástól távoli lapok élhosszai is közeliek legyenek egymáshoz, mert ellenkező esetben ez annak lenne észrevehető jele, hogy az egyes sokszöglapok nem mind szabályos sokszögek.

Az utóbb felvázolt lehetőséget megvalósítva, két mennyiséget vezetünk be: a maximális élarányt (az egész poliéderre), és a maximális szögeltérést (a poliéder n-szög lapjaira, minden szóba jöhető n esetén). Legyen $r(P)$ a P poliéder leghosszabb és legrövidebb éleit tekintve azok élhosszainak aránya (mindig legalább 1 nagyságú), és legyen $d(P,n)$ a P poliéder n-szög lapjai csúcsszögeinek a maximális eltérése (abszolút értékben) a szabályos n -szög csúcsszögének értékétől. Ha $r(P)$ kisebb, mint $1+\varepsilon$ valamely $\varepsilon > 0$ esetén, és $d(P,n)$ kisebb, mint δ_n valamely $\delta_n > 0$ esetén (ahol n végigfut azon $I_P = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ számokon, melyre léteznek P-nek n-szög lapjai), akkor azt mondjuk, hogy poliéder az $(\varepsilon, \{\delta_k\}_{k\epsilon I_P})$-hibahatárokon belül majdnem-Johnson-poliéder. (Megjegyezzük, hogy ez a feltétel finomabb, mint az [7] cikkben szereplő feltétel, mivel abban az élarányok csupán lapokon belül kerülnek kiszámításra, a szögeltérés is kicsit másképp van kiszámítva, valamint nincs kimondva, hogy n-szöglapok esetén minden egyes n-re külön érdemes megadni a szögeltérés maximális elfogadott mértékét.) Az $1+\varepsilon$ értéket a poliéder maximális élarányra adott szigorú felső korlátjának nevezzük, a δ_n értékeket pedig a poliéder n-szöglapjai szögeinek a szabályos sokszög szögeitől való maximális abszolút eltérésére adott szigorú felső korlátnak.

A szakirodalomban az ε értékét szokás nézni, a szögeltéréseket már nem mindig vizsgálják. Például a Polytope Wiki – Miraheze weblapon (ld. [4]) az $\varepsilon < 0{,}1$ értékekhez talált poliéderek vannak felsorolva (egy kivételes esettől eltekintve), az Orchidpalms weblapon található poliéderekre az élek és a szögek abszolút eltéréseit is összegzik. Saját tapasztalataink alapján élhosszakra az $\varepsilon = 0{,}02$ vagy $\varepsilon = 0{,}03$ már eléggé kielégítő értékek ahhoz, hogy ne, vagy csak alig vegyük észre az oldalhosszak különbözőségét, szögekre pedig $3 \le n \le 5$ esetén $1° - 2°$ közötti δ_n értékek tűnnek ilyennek.

A definícióból is következik, hogy a majdnem-Johnson-poliéderek általában nem egyértelműen meghatározott poliéderek, mert tudunk kicsit változtatni úgy a poliéder alakján (pl. a poliédert más, az eredeti modell élhosszaihoz és lapjainak csúcsszögeihez közeli élhosszakkal, ill. csúcsszögekkel megszerkesztve), hogy a laphálója ugyanaz marad, a lapok alakja esetleg kicsit változik, de az általunk választott hibahatárokon belül maradunk az élarányokat és a szögkülönbségeket tekintve (ez a helyzet, ha szigorúan a hibahatárokon belül voltak az $r(P)$ és $d(P,n)$ mennyiségek a módosított poliéder esetén is). Ezért egy adott P majdnem-Johnson-poliéder konsturálása esetén arra törekszünk, hogy olyan poliéder legyen a végeredmény, melynek az $r(P)$ és $d(P,n)$ értékei a lehető legkisebbek, vagy legalábbis minél közelebb vannak bizonyos referencia értékekhez, ld. a fentebb említett $\varepsilon = 0{,}02$, ill. $3 \le n \le 5$ esetén az $1° - 2°$ közötti δ_n értékeket. Ezért előfordul, hogy amikor elkészülünk az adott laphálójú poliéder modellezésével, még megvizsgáljuk, hogyan lehetne módosítani a modellezésen (bemeneti paraméterértékeken, pl. bizonyos élhosszakon, lapok csúcsszögein, vagy akár szerkesztési lépéseken) úgy, hogy a poliéder laphálója ne változzon, hanem például csak bizonyos élhosszai vagy szögei módosuljanak minimálisan, hogy az $r(P)$ és/vagy $d(P,n)$ értékei csökkenjenek, de ne egymás rovására.

A legegyszerűbb eset, ha a majdnem-Johnson-poliédert úgy tudjuk modellezni kielégítő hibahatárokon belül, hogy csak a háromszöglapjai között lehetnek nem szabályosak. Ebben az esetben elég csak arra törekednünk, hogy az élhosszak arányainak maximumát minimalizáljuk, mivel egy háromszög szögeit meghatározzák az oldalainak arányai, és ha az oldalak aránya közel van 1-hez, akkor a szögei közel vannak $60°$-hoz. Egy ennél kicsit komplikáltabb eset az, amikor a négyszöglapok is lehetnek nemszabályosak, ilyenkor a négyszöglapok csúcsszögeinek $90°$-tól való eltéréseinek maximumát is szeretnénk minimalizálni, vagy legalábbis $1° - 2°$-os határon belül tartani.

Geometriai módszerekkel újabb majdnem-Johnson-poliédereket kaphatunk más nevezetes poliéderekből vagy egyszerűbb majdnem-Johnson-poliéderekből. Ilyenek az arkhimédészi testek előállításánál használható műveletek: csonkolás, kibővítés és piszésítés; valamint a Johnson-poliéderek előállításánál használható műveletek: levágás és bővítés (ld. 3. fejezetet). Például a focilabda (csonka ikozaéder) csonkolásával, kibővítésével, ill. piszésítésével kaphatók meg a [7] cikk 3-5. példáiban szereplő majdnem-Johnson-poliéderek. Ezen felül olyan uniform poliéderek, Johnson-poliéderek, és majdnem-Johnson-poliéderek esetén, amelyeknek csak háromszög-, négyszög- vagy hatszöglapjaik vannak, alkalmazható a lapok rácsfelosztása, és a rácspontok megfelelő elmozgatásával újabb, több lapot, élt és csúcsot tartalmazó majdnem-Johnson-poliédert készíthetünk el (ld. [7]). Megemlítjük még, hogy bizonyos katalán testek lapjaira közel szabályos sokszögeket rajzolva, majd azok konvex burkát véve is előállnak majdnem Johnson-poliéderek (ld. [4]), itt az kerül kihasználásra, hogy a katalán testek az arkhimédészi testek duálisaiként szabályos csúcsalakzatokkal rendelkeznek, azaz egy olyan síkkal lemetszve a csúcs közelében a testet, amely merőleges a csúcs és a testközéppont egyenesére, szabályos sokszöget kapunk. Az ilyen poliéder nyilván előáll a katalán testre alkalmazott szelések eredményeképp is, tehát csonkolással.

5. Elemi majdnem-Johnson-poliéderek

Mivel végtelen sok egymástól különböző laphálójú majdnem-Johnson-poliéder létezik, és ilyeneket elő lehet állítani geometriai műveletek egymás utáni alkalmazásával (elég csak felosztásokat alkalmaznunk megfelelő kiindulási poliéderre), ahogy ezt az előző fejezetben láttuk, ezért felvetődik a kérdés, hogy a majdnem-Johnson-poliéderek osztályozhatók-e valamilyen módon, azaz leírható-e valamilyen módon ennek a poliéderosztálynak a szerkezete, de egyelőre erre még sejtés sincs.

Felosztások eredményeképp olyan poliédercsúcsok jönnek létre, melyeknél az arra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege $360°$ lenne, ha a lapok ténylegesen szabályos sokszöglapok lennének, valamint csonkolás, kibővítés és piszésítés esetén is létrejöhetnek ilyen csúcsok (ld. a 3-5. példák mindegyike ilyen típusú majdnem-Johnson-poliéder a [7] cikkben), így ha ezt az esetet kizárjuk (hívjuk ezt a feltevést kizárási feltételnek a későbbiekben), akkor máris változik a helyzet. Tehát a kizárási feltétel azt jelenti, hogy a poliéder minden csúcsánál az arra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege kisebb, mint $360°$ akkor is, ha az egyes lapok tényleges csúcsszögei helyett az ugyanannyi oldalú szabályos sokszög csúcsszögeivel számolunk. Ebből a feltételből következik, hogy legfeljebb 5 lap illeszkedik egy ilyen poliédernek egy tetszőleges csúcsára.

Különben ez a kizárási feltétel ekvivalens azzal, hogy a poliéder lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, azaz ha a poliéder bármely csúcsához vesszük azokat a lapokat, melyek arra a csúcsra illeszkednek, és kicseréljük mindegyik lapot ugyanannyi oldalszámú szabályos sokszöglappal, akkor létezik olyan konvex poliéder, amelynek csúcsa az adott csúcs, és az adott csúcsra illeszkedő lapjai pontosan a kicserélt szabályos sokszöglapok, amelyek közül két lapnak pontosan akkor van közös éle, ha azoknak a lapoknak is volt közös élük, melyekre ezeket kicseréltük.

Belátható, hogy a kizárási feltételnek megfelelő majdnem-Johnson-poliédereket tekintve, már csak véges sok ilyen poliéder létezik bizonyos $\{\delta_k\}_{k\epsilon I_P}$ hibahatárokon belül (csak a $\delta_3, \delta_4, \delta_5, \ldots$ abszolút szögeltérésekre kell megfelelő hibahatárokat felállítani). Ez azért van így, mert a lapok oldalszámára, és emiatt a poliéder csúcsainak a számára is tudunk felső korlátot mondani (ld. Grünbaum és Johnson [1] cikkéhez hasonló módon lehet becslést adni erre, az említett cikkben a Johnson-poliéderek csúcsszámára adtak felső korlátot). A poliéder lapjainak számára 41 adódik felső korlátként, ill. nagyobb δ_n ($n \geq 3$) hibakorlátok az abszolút szögeltérésekre nagyobb felső korlátot implikálnak a poliéder csúcsszámára a bizonyításban, de ettől még nem biztos, hogy előfordulhatnak, mivel az eddig ismert majdnem-Johnson poliédereknek legfeljebb 15-szöglapjai vannak és legfeljebb 240 csúcsuk (ld. [4]). Az adódik, hogy $\delta_n \geq 0$ ($n \geq 3$) esetén, ha fennáll $\delta_3 + \delta_4 < 30°$, $\delta_3 + \delta_5 < 12°$, $\delta_5 + \delta_6 < 12°$, akkor $n \geq 7$ esetén megfelelően kicsinynek választott δ_n értékekre véges sok majdnem-Johnson-poliéder van. Így ha csak olyan majdnem-Johnson-poliédereket tekintünk a fenti kizárási feltétellel, melyeknek minden lapja n-szög, ahol $3 \leq n \leq 6$, akkor a $\delta_3 = \delta_4 = \delta_6 = 6°$ és $\delta_5 = 5°$ hibahatárok már garantálják azt, hogy véges sok ilyen poliéder létezik.

A Johnson-poliéderek osztályozásával több publikáció is foglalkozott 1964-67 között (ld. [1], [2] [8]), ennek során a poliéderek csúcsszámára adott felső korlátokon kívül több állítás bebizonyításával egyre szűkült a szóba jöhető poliéderek köre; majd végül véges sok eset átvizsgálása maradt hátra, és akkor kiderült, hogy ezek közül több esetben létezik olyan konvex poliéder, melynek mindegyik lapjának az alakja igen közeli egy szabályos sokszöghöz. De azt is érdemes végiggondolni, hogy azok az állítások, melyekkel kizártak bizonyos tulajdonságú poliédereket a Johnson-poliéderek közül, lehet, hogy majdnem teljesülnek. Igy kiderült, hogy bár nem létezik olyan Johnson-poliéder, melynek szabályos 7-szög, 9-szög, 11-szög vagy 12-szög valamelyik lapja, azért ilyen típusú majdnem-Johnson-poliéderek még léteznek (ld. [4]).

Az elemi Johnson-poliéderek definíciójával analóg módon, de a végesség szempontját is szem előtt tartva (amely ekvivalens szabályos sokszöglapokkal történő lokális modellezhetőséggel), vezetjük be az elemi majdnem-Johnson-poliéderek definícióját a következőkben.

Egy konvex poliédert elemi majdnem-Johnson-poliédernek nevezünk, ha a poliéder lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, és a poliéder nem állítható elő a következőkben felsorolt geometriai műveletekkel más nevezetes poliéderekből (mint pl. uniform poliéderekből, Johnson-poliéderekből, katalán testekből, szabályos sokszög alapú hasábokból, gúlákból és kettősgúlákból) és más, nála egyszerűbb (azaz nála kevesebb lépésben megszerkeszthető vagy geometriai módszerekkel modellezhető) majdnem-Johnson-poliéderekből: csonkolás, kibővítés, piszésítés, levágás, bővítés, felosztás és átrendezés (ez utóbbi művelet során egy szabályos poliéder lapjaiból vagy lapcsoportjaiból azok mozgatása és csúcsaik mentén történő olyan szerkeszthető összeillesztésük után képzünk konvex burkot, amely során a lapok a konvex burok határán maradnak, és új lapok is keletkeznek, mint a Miraheze (ld. [4]) weblapon a tetrated dodecahedron és a chiral tetrated dodecahetron poliéderek esetén).

Ahogy az elemi Johnson-poliéderek között kétféle típusú poliéder van: szerkeszthető és nemszerkeszthető poliéderek, ehhez hasonlóan az elemi majdnem-Johnson-poliéderek között is találhatunk kétféle poliédertípust. Azonban a szerkeszthetőség nem egy megfelelő tulajdonság a típusokra bontáshoz ebben az esetben, mivel minden elemi majdnem-Johnson-poliéder szerkeszthető lesz, legalábbis lesz szerkeszthető reprezentánsa a felvett hibakorlátokon belül.

Hiszen ha nem szerkeszthető közvetlenül egy ilyen poliéder, akkor egy szerkeszthető paraméteres poliédermodellként előállítható, megfelelő paraméterértékek beállításával, és minden paraméterhez lesz 1-1 intervallum, amelyben bármely paraméterérték megfelelő lesz ahhoz, hogy a poliéder majdnem-Johnson-poliéder legyen az adott hibahatáron belül. Így minden egyes paraméter esetén felveszünk egy szerkeszthető értéket az adott intervallumában, és ekkor az eredményül kapott poliéder is szerkeszthető lesz.

Ezért az elemi majdnem-Johnson-poliédereket inkább úgy csoportosítjuk, hogy megkülönböztetjük a geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliédereket és a geometriai módszerekkel közvetlenül nem szerkeszthető poliédereket (amelyek azért az eddigi tapasztalatok alapján 1-paraméteres modellezéssel előállíthatók). Geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthetőnek mondunk egy elemi majdnem-Johnson-poliédert, ha felhajtásokkal vagy más, csak geometriai jelentéssel bíró segédalakzatok (pl. hasábok, gúlák) szerkesztésének segítségével meg tudjuk szerkeszteni a poliédert a kívánt hibahatáron belül, a laphálójának az ismeretében, de a lapszögeinek, testátlói hosszának előzetes ismerete (ill. közelítő ismerete) nélkül.

Például, ha egy ilyen poliéderben minden csúcs fokszáma legalább 4, és a csúcsalakzatok nem feltétlenül szimmetrikusak, akkor nem tudjuk elkezdeni a poliéder modellezését egyik csúcsban sem, mert nem ismerjük a csúcshoz illeszkedő lapok által bezárt lapszögeket, tehát ez geometriai módszerekkel közvetlenül nem szerkeszthető. De ha felveszünk egy paramétert, mondjuk két, egymással szomszédos lap bezárt szögét, akkor e szög ismeretében egy negyedfokú csúcs csúcskonfigurációja már megszerkeszthető lesz, tehát el tudjuk kezdeni a poliédermodellezést paraméteres modellezésként, és szükség esetén újabb paraméterek felvételéve elkészíthető az adott laphálójú poliédermodell. A paraméterérték(ek) megfelelő beállításával elérhet, hogy a poliéder minél több éle és szöge megfelelően közel legyen a kívánatoshoz, de ha még ezután is szeretnénk bizonyos élhosszakon vagy szögek nagyágán javítani, akkor a paraméteres modell bemeneti adatain (felhasznált csúcsszögek, élhosszak) kell kissé változtatni úgy hogy az eredményül kapott poliéder jobb hibahatároknak megfeleljen.

6. Számítógépes modellezés

A következőkben az Orhidpalms (ld. [3]) weblap 1-31. és a Polytope Wiki – Miraheze weblap (ld. [4]) 1-74. példái közül mutatjuk be néhány elemi majdnem-Johnson-poliédernek a modellezését (a Miraheze lap tartalmazza az Orchidpalms weblap példáit, de azok részletesebb ismertetését nem, ezek az Orchidpalms weblapon találhatók meg). A példákra O.sorszám, ill. M.sorszám alakban hivatkozunk (az Orchidpalms lapon a példák meg vannak sorszámozva, a Miraheze lapon nem, de ott gyakran szerepelnek elnevezések a poliéderekre). A következőben leginkább olyan poliédereket modellezzünk, melyek lapjai háromszögek és négyszögek, mert ekkor a legegyszerűbb a majdnem-Johnson-poliéderek hibavizsgálata (valamint, ha lehetséges, nemszabályos sokszöglapok csak a háromszöglapok közül kerülnek majd ki). Nem elhanyagolható módon, ezek a poliéderek hasonlítanak a legjobban az elemi Johnson-poliéderek többségét adó nemszerkeszthető elemi Johnson-poliéderekre.

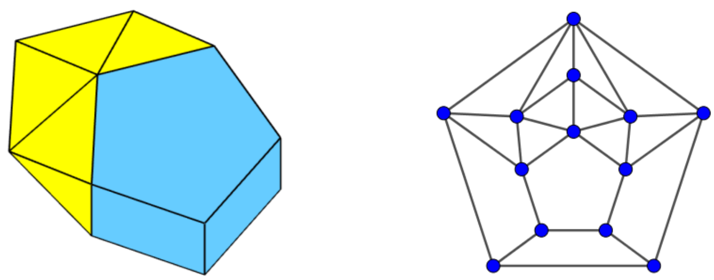
Tudomásunk szerint az említett két weblapon bizonyos szoftverek használatával minél több, általában legfeljebb 5-ödfokú csúccsal rendelkező majdnem-Johnson-poliédereket konstruáltak, a teljesség igénye nélkül (tehát lehet, hogy nem az összes ilyen van felsorolva). A hibakorlátokra próbáltak jó értéket megadni, de nincs szisztematikus optimalizálási szándéknak nyoma a megoldásokban (és persze más hibafüggvényekkel is számoltak).

A vizsgálataink alapján a [3] és[4] weblapokon szereplő elemi majdnem-Johnson-poliéderek a következők: O.1-12, O13-21, O23-31, M.21, M.22, M.30. Ezek vagy közvetlenül szerkeszthető térbeli euklidészi-típusú szerkesztéssel, vagy 1-paraméteres poliédermodellel állíthatók elő, melynél a paraméterérték megfelelő beállítása után kapunk egy poliédermodellt (közülük geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető: O.1, O.3-9, O.11-12, O.14-15, O.17-20, O.29, O.30, M.21, M.22 – megjegyezzük, hogy az M.21 poliéder szerepel a [7] cikk 2. példájában). De mindkét esetben azon kívül, hogy az élhosszak egy része azonos, az adot poliéder elkészítéséhez szükséges szerkesztési/modellezési lépések elvégzése után lesz olyan él (vagy lesznek olyan élek), melyek hossza nem ez a közös hossz, sőt elég távol lehet a hossza (ill. hosszuk) ettől az értéktől és/vagy akár bizonyos csúcsszögek abszolút eltérései is pozitívak lehetnek a hozzájuk tartozó szabályos sokszög csúcsszögértékétől). Ekkor a poliéder szerkesztését (vagy az 1-paraméteres modell szerkesztését) módosítani kell, hogy a szerkesztés során felhasznált több élhossz (és esetleg csúcsszögérték) se pontosan ugyanakkora legyen, ez befolyással van a végeredmény poliéderen az élhosszakra és szögekre, és ügyes módosításokkal elérhető, hogy az élek hossza közelebb kerüljön egymáshoz, legalább 10%-on belülre, de ha lehet, akkor még ennél is közelebb egymáshoz, és a szögeltérések is elég kicsik legyenek. A sok lehetséges paraméter miatt teljes optimalizálást nem végeztünk, csak ad-hoc csökkentést az élarányok maximumán.

A nem háromszöglapokat lehetőleg meghagytuk szabályosaknak, vagy minimálisan módosítottuk azokat úgy, hogy minél nagyobb szimmetria maradjon meg esetükben és az egész poliéder esetén is. Vannak olyan elemi majdnem-Johnson-poliéderek, amikor már a konstrukció elején vagy közben ellentmondásba ütközik a szerkesztés, ha szabályos sokszöglapokat próbálunk használni, ekkor már a szerkesztés közben szükséges változtatni bizonyos lapok alakján, általában ilyenkor is törekedtünk a legnagyobb fokú szimmetria megtartására és megpróbáltuk a lap szabályostól eltérő alakváltozását minimalizálni, vagy paraméter bevezetésével később tovább módosíthatóvá tenni.

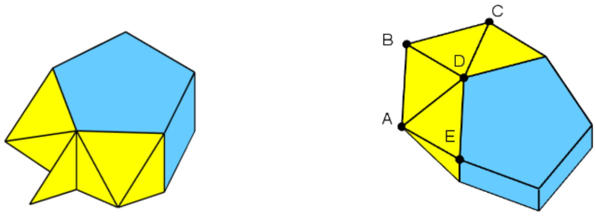
6.1. Geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliéderek

1. példa. (O.1, ld. 1. ábra) Egy 1 élhosszú szabályos ötszögre 1 magasságú hasábot emelünk, majd a hasáb két egymás melletti négyzetlapjára olyan négyzet alapú gúlákat rajzolunk a hasábról kifelé, melyek háromszöglapjai szabályos háromszögek. A két gúla egymásnak síkra vonatkozó tükörképe, ebbe a tükrözési síkba olyan szabályos háromszöget rajzolunk, amelynek a két gúla közös éle az alapja, és nem metsz bele a hasáb belsejébe (ld. 2. ábra).



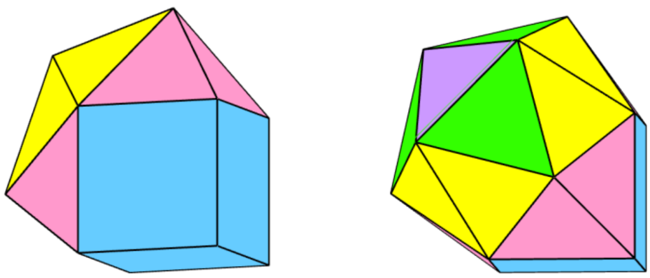
1. ábra. Az 1. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere és annak laphálója

A hasáb, a két gúla és a háromszög konvex burkát vesszük. Ekkor újabb négy háromszöglap keletkezik. Két él lesz, amely nem 1 hosszú: $AB = BC \approx 1{,}0091$, és a poliéder lapszögei az AD és CD éleknél (valamint két tükörkép élnél, amely a 2. ábrán nem látszik) kb. $179{,}75°$-osak, azaz közel $180°$-osak, de így még épp a konvex burok határán vannak. Tehát a megszerkesztett P poliédernek csak a háromszöglapjai között vannak nem szabályos sokszöglapok, a maximális élaránya r(P)<1,01 (valamint a maximális szögeltérése a háromszöglapokon kisebb, mint $0{,}61°$. Így ez egy elemi majdnem-Johnson-poliéder $\varepsilon = 0.01$ és $\delta_3 = 0{,}61°$ hibahatárokon belül.

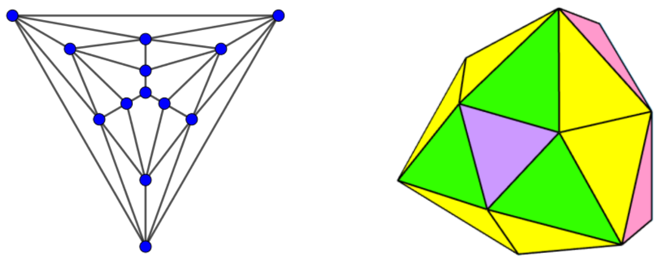


2. ábra. Segédábra a szerkesztés menetéhez; valamint jelölések a szerkesztés magyarázatához az 1. példa esetén

2. példa. (O.4, ld. 3. ábra) Megszerkesztjük egy egységoldalú kockának három olyan lapját, melyek egy csúcsban találkoznak, majd a lapok uniójának relatív határán minden élre 1-1 szabályos háromszöglapot illesztünk. Ezek páronként 1-1 olyan közös élben találkoznak, melynek végpontja két négyzetlap közös csúcsa. A keletkezett háromszöglapok azon éleire, melyek nem szomszédosak más éllel, újabb szabályos háromszöglapokat illesztünk (összesen 6 darabot), ezek páronként 1-1 olyan közös élben találkoznak, melynek végpontja egyetlen négyzetlapra illeszkedik. Ezzel a poliéder mindegyik csúcsát megszerkesztettük. Végül a kimaradó 4 darab háromszöglapot rajzoljuk meg. A keletkezett poliéder $120°$ -os forgásszimmetriával rendelkezik, és 3 élén (amelyek egyforma nagyságúak, és egy szabályos háromszöglap oldalain helyezkednek el) kívül mindegyik éle 1 hosszúságú. Ha most megismételjük a konstrukciót úgy, hogy az egyes szerkesztett háromszöglapok csak közel szabályosak (de a forgásszimmetriát nem rontjuk el), akkor ügyes élhosszválasztásokkal elérhető, hogy közel egyforma hosszú legyen mindegyik él, $\varepsilon = 0.013$ hibahatár adódik. Ha pedig négyzetek helyett négyzethez közeli alakú rombuszokat is megengedünk, akkor egy kicsit még jobban csökkenthető a maximális élarány.

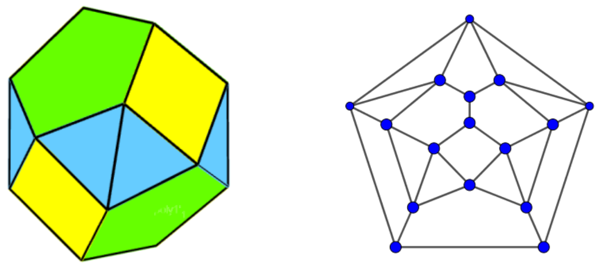


3. ábra. A 2. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből



4. ábra. A 2. példa elemi majdnem-Johnson-poliéderének laphálója, és a poliédermodell alakja az élhosszmódosítások előtt

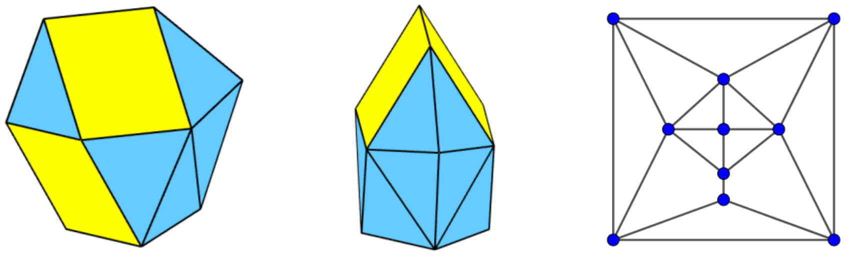
3. példa. (O.6, ld. 5. ábra) A poliédernek látszólag két szabályos ötszöglapja van, melyek közös éllel rendelkeznek. Hozzájuk csatlakozik 1-1 négyzet két oldalról. Ezt a konfigurációt tükrözzük egy, a szimmetriasíkjára merőleges és az ötszöglapok közös élével párhuzamos síkra, tegyük fel, hogy ez a sík vízszintes az xyz-koordináta-rendszerben. Majd forgassuk el 90°-kal a tükrözött lapokat a függőleges szimmetriatengelyük körül, és függőlegesen mozgassuk el ugyanazzal a vektorral úgy, hogy a transzformált lapok 1-1 szabad csúcspontja csatlakozzon az eredeti lapok 1-1 szabad csúcspontjához (szabad csúcsponton olyan csúcsot értünk, mely egyetlen lapra illeszkedik a 4 lapból álló konfiguráció lapjaiból). De sajnos ez nem lehetséges, mivel a forgatási tengelytől más távolságra vannak a szabad csúcspontok a négyzetek és az ötszögek esetén.



5. ábra. A 3. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere és annak laphálója

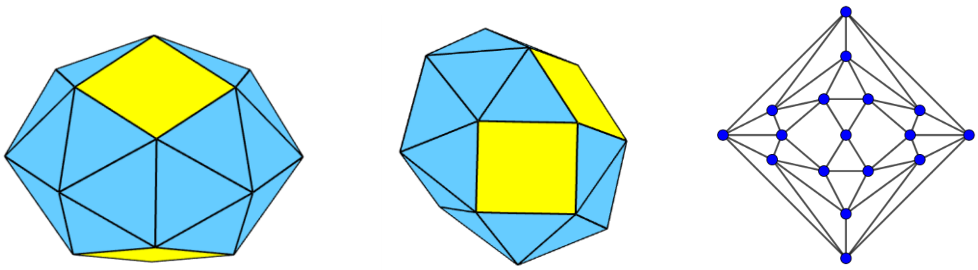
Módosítsuk a konstrukciót: maradjanak az ötszöglapok szabályosak, de a négyszöglapok nem. E négyszöglapok szabad csúcspontjai a konfiguráció függőleges szimmetriasíkján és a négyszöglap másik 3 csúcspontjának a síkjában kell, hogy elhelyezkedjenek. Vegyük a két szomszédos ötszöglap által bezárt szöget változtathatónak, azaz paraméternek, és maradjon meg ugyanaz a szimmetriája a poliédernek. Ekkor a 4 lapos konfigurációt ugyanúgy forgatva a tükrözése után, mint az a szerkesztés elején szerepelt, egyetlen, (és megszerkeszthető) olyan függőleges vektorral történő eltolás van, hogy a transzformált négyszöglapok 3-3 fix csúcsa egy síkba kerül az eredeti konfiguráció 1-1 ötszögének szabad csúcsával, ezt az eltolást elvégezve, megkapjuk a négyszöglapok 4-edik csúcsait. Szimmetria miatt az összes csúcs ismert már, így a háromszöglapok is megszerkeszthetők. A paramétert beállíthatjuk úgy, hogy az élhosszak maximális aránya és a négyszöglap szögeinek abszolút eltérése a 90°-tól is kicsi legyen ($\varepsilon = 0{,}074$. $\delta_3 = 4{,}8°$, $\delta_4 = 2{,}2°$).

4. példa. (O.18, ld. 6. ábra) Két, háromszög alapú szabályos hasábot illesztünk egymáshoz közös négyzetlapjuk mentén úgy, hogy a háromszöglapjaik síkjai merőlegesek legyenek egymásra. Majd az egyik hasáb háromszöglapjára szabályos tetraédert emelünk, a mellette levő másik hasábnak az ezzel a háromszöglappal közös élű négyzetlapjára pedig szabályos gúlát. Vesszük az egész alakzat konvex burkát, ekkor két új háromszöglap keletkezik a gúla és a tetraéder között. Ha módosítjuk a konstrukciót nem teljesen szabályos háromszög alapokra, nem teljesen szabályos tetraéderre, ill. gúlára úgy, hogy a négyzetlapok szabályosak maradjanak, akkor megfelelően közeli élhosszak választásával a végén keletkező két egybevágó háromszöglap alakja közelebb lesz egy szabályos háromszöghöz (hibahatárnak $\varepsilon = 0{,}05$ adódik).



6. ábra. A 4. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

5. példa. (O.10, ld. 7. ábra) Tegyük fel, hogy vízszintes az xyz-koordináta-rendszerben a poliédernek az a négyzetlapja, amelynek nincs közös csúcsa másik négyzetlappal, és az is feltehető, hogy 1 az oldalhossza, és a lap a poliéder tetején helyezkedik el (de még nem tudjuk hol). Ekkor a négyzetlap két átlóján áthaladó függőleges sík mindegyike szimmetriasík, és a poliéder legalsó csúcsa szimmetria miatt a két szimmetriasík közös egyenesén van rajta. Vegyünk fel két, egymásra merőleges, függőleges síkot, ezek lesznek a szimmetriasíkok. Ezek metszetegyenesén vegyünk fel egy pontot, ez lesz a legalsó csúcs. Az ehhez illeszkedő két négyzetlapot és két szabályos háromszöglapot meg tudjuk szerkeszteni, majd a négyzetlapok átlóin áthaladó szimmetriasíkon meg tudjuk szerkeszteni a poliéder keresztmetszetét (amely egy ötszög). Ez alapján a felül elhelyezkedő négyzetlap is megszerkeszthető (mert az átlója, mint keresztmetszet, már adott). A többi csúcs pedig sorra megszerkeszthető 3-3 olyan egységgömb metszéspontjaként, melyek középpontjai már megszerkesztett csúcsok.

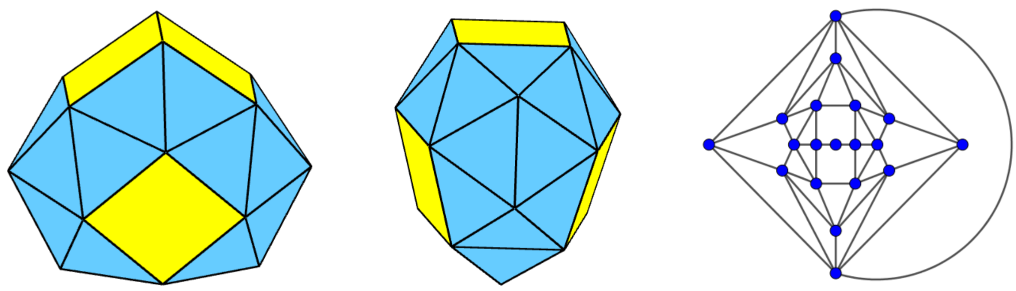


7. ábra. A 5. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

A szerkesztés végén lesz két él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a négyszöglapok maradjanak négyzetlapok, de a többi megszerkesztett 1 élhosszú él helyett csak ahhoz közeli élhosszakat szerkesztve meg, ezen élhosszak ügyes beállításával minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak $\varepsilon = 0{,}073$ jön ki).

6.2. 1-paraméteres geometriai modellezéssel előállítható poliéderek

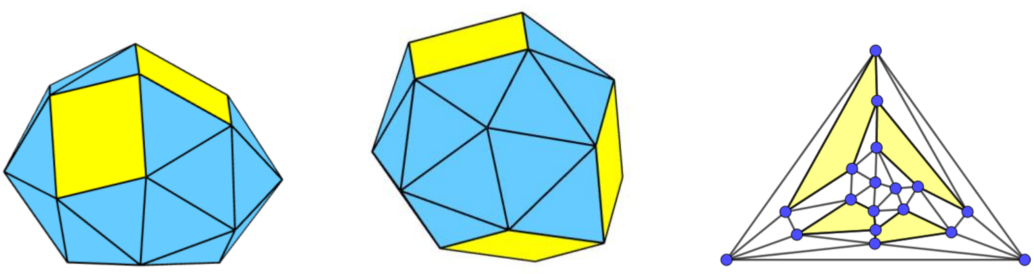
6. példa. (O.2, ld. 8. ábra) 1-paraméteres poliédermodellt készítünk, ebben a két, közös éllel rendelkező négyzetlap által bezárt szöget vesszük paraméternek. Feltehető, hogy a két négyzet egységnyi élhosszú, ezeket megszerkesztjük. A közös él felezőmerőleges síkjára szimmetrikus lesz a megszerkesztett poliéder. A közös él egyik végpontjától 1 távolságra levő újabb poliédercsúcs megszerkeszthető 3 olyan egységgömb metszéspontjaként, melyek középpontjai a négyzetek csúcsai közül kerülnek ki. Ez egy újabb négyzetlap csúcsa. Az ezzel átellenes csúcs megszerkeszthető, mivel az említett szimmetriasík túloldalán levő hasonló elhelyezkedésű négyzet hasonló csúcsától 1 távolságra van – a poliédernek két négyzet által bezárt szögfelezősíkjában (amely szintúgy szimmetriasík) síkbeli szerkesztéssel adódik ez a csúcs.



8. ábra. A 6. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

Ezután a négyzetlap másik két csúcsa és a poliéder összes többi csúcsa is könnyen megszerkeszthető. A szerkesztés végén lesz két él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A paraméter beállításával ezek közül az egyik él tetszőlegesen közel kerülhet az 1 hosszúsághoz. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a paramétert úgy állítsuk be, hogy mindkét változó élhossz, 1-hez minél közelebbi legyen, minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak $\varepsilon = 0{,}012$ jön ki).

7. példa. (O.16, ld. 9. ábra) 1-paraméteres poliédermodellt készítünk. Két $180°$-os forgásszimmetriája van ennek a poliédernek: az egyik szimmetriatengely két olyan poliédercsúcsot köt össze, melyekre két-két négyzet illeszkedik; a másik szimmetriatengely két olyan élfelező pontot köt össze, melyek két-két olyan háromszöglapra illeszkednek, amelyek összes csúcsa valamely négyzetlap csúcsa is egyben. Először két, közös csúcsú, 1 oldalhosszú négyzetlapot és két, közöttük elhelyezkedő szabályos háromszöglapot szerkesztünk meg úgy, hogy a négy lap közös csúcsából kiinduló élek végpontjai egy téglalapot határozzanak meg, Majd közülük az egyes négyzetlapokhoz 1-1 olyan szabályos háromszöglapot szerkesztünk, amelynek közös éle van valamelyik négyzetlappal, és egy ilyen háromszöglapnak a hozzá közös éllel csatlakozó négyszöglappal bezárt szögét paraméternek vesszük fel (mindkét szög ugyanakkora a $180°$-os forgásszimmetria miatt).



9. ábra. A 7. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

A két, utoljára szerkesztett háromszöglapnak azokhoz a csúcsaihoz, melyek nincsenek rajta négyzetlappal közös élén, megszerkesztjük a forgástengelyen levő olyan poliédercsúcsot, amely tőlük $\sqrt{2}$ távolságra van (egy-egy újabb egység oldalhosszú négyzetlap átellenes csúcsában), majd az erre az élre illeszkedő két négyzetlapot és a közöttük elhelyezkedő háromszöglapokat (ez utóbbiak nem feltétlenül szabályos háromszögek) úgy, hogy a poliédercsúcsból kiinduló élek végpontjai téglalapot határozzanak meg. A maradék 4 csúcs megszerkeszthető olyan egységgömb-hármasok metszéspontjaként, melyek középpontja alkalmasan választott, már megszerkesztett poliédercsúcs.

A szerkesztés végén lesz három él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A paraméter beállításával ezek közül az egyik él tetszőlegesen közel kerülhet az 1 hosszúsághoz. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a megszerkesztett egységnyi élhosszak helyett csak ahhoz közeli élhosszakat szerkesztünk meg, ügyes élhosszbeállítások után, minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak $\varepsilon = 0{,}062$ jön ki).

7. Összefoglaló

Amint az az 5. fejezetben szerepel, véges sok elemi majdnem-Johnson-poliéder létezik (ekvivalensnek tekintve a megegyező laphálójú poliédereket), ha a $(\{\delta_k\}_{k\in I_P})$ abszolút szögeltérés-hibahatárokat megfelelően kicsinynek választjuk. Érdekes lenne az összes ilyen poliéder meghatározása.

Felvetődhet, hogy kiszámítsuk a legjobb $(\varepsilon, \{\delta_k\}_{k\in I_P})$-hibakorlátokat az egyes elemi majdnem-Johnson-poliéderek esetén, legalábbis néhány egyszerűbb esetben. Talán könnyebben megoldható ez a probléma azon konvex poliéderekre megszorítkozva, amelyeknél a nem szabályos sokszöglapok csak a háromszöglapok közül kerülnek ki, mert ekkor a szögeltérésekkel nem kell foglalkoznunk, csak az élarányokkal.

Köszönetnyilvánítás.

Szeretnénk megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörről előadhatott az első szerző Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2022-es programjában.

Irodalomjegyzék

[1] **Grünbaum, B., Johnson, N. W.**, The faces of a regular-faced polyhedron, J. of London Math. Soc. **40** (1965) 577-586. doi:10.1112/jlms/s1-40.1.577

[2] **Johnson, N. W.**, Convex Solids with Regular Faces, Canadian Journal of Mathematics. **18** (1966) 169–200. doi:10.4153/cjm-1966-021-8

[3] Johnson Solid Near Misses, Orchidpalms, https://www.orchidpalms.com/polyhedra/acrohedra/nearmiss/jsmn.htm

[4] Near-miss Johnson solid, Polytope Wiki – Miraheze, https://polytope.miraheze.org/wiki/List_of_near-miss_Johnson_solids

[5] Near-miss Johnson solid, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Near-miss_Johnson_solid

[6] **Talata, I**., Nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezése dinamikus geometriai módszerekkel, Dimenziók VIII (2020) 15-24. doi:10.20312/dim.2020.02

[7] **Talata, I**., Majdnem szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számítógépes modellezése, Dimenziók IX (2021) 3-12. doi:10.20312/dim.2021.01

[8] **Zalgaller, V. A.**, "Convex Polyhedra with Regular Faces". Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova (in Russian). **2** (1967), 1–221.