

TEMATIKUS BESZÁMOLÓ – OTKA NYILVÁNTARTÁSI SZÁM T046834 ÉPK

Összeállította: Szeidl György témavezető

2008. február 28.

A jelen tematikus beszámoló a Munkaterv pontjainak megfelelően van tagolva. A kutatási eredmények egy része nem tervezett kutatásokról ad számot. Ezek kutatások azonban valamilyen módon (pl. az ötletadás révén) mindig szorosan kötődnek a tervezett kutatásokhoz.

1. KUTATÁSI PROGRAM ELSŐ TÉMAKÖR

A kutatási program vonatkozó szakasza – idézet az aláírt szerződésből. Héjak nemlineáris elméletének kidolgozása véges merevtestszerű forgások és kis alakváltozásjellemzők esetére. Irodalmi hipotézisek alkalmazása a héj mint 3d-s szilárd test elmozdulásmezéjére. Alakváltozástól függő felületi terhelések. Terveztük numerikus számítások végrehajtását is VEM módszerrel.

1.1. A héjelméleti vizsgálatokkal kapcsolatos feladat és az eredmények.

1.1.1. A feladat pontos megfogalmazása. A héjelméletek kinematikájának (mint a héjelméletek jellemző részének) célja, hogy a héj mint szilárd test terhelés hatására kialakuló geometriai változásainak 3D-s leírását (feladatát) - feltevések és elhanyagolások felhasználásával - helyettesítse a héj középfelületén (alapfelületén) értelmezett változókra visszavezetett 2D-s feladattal. A Geometriailag nemlineáris héjelmélet véges forgásmező és kis alakváltozásmező esetére című kutatás célja a héj középfelületének véges (finite) forgásmezőjéből (a felület-elemek merevtestszerű forgását leíró forgási tenzormezőből) következő geometriai nemlinearitás figyelembevétele a héj kismértékű (infinitesimal) alakváltozási jellemzőinek (fajlagos hossz-, -szög és -térfogatváltozásainak) feltételezése mellett, együttmozgó, görbevonalú koordináta-rendszer alkalmazásával, Lagrange leírási módban (a héj alakváltozás előtti középfelületére épített koordináta-rendszerben).

1.1.2. Eredmények. A kutatás két lépésben történt. Első lépésként elsősorban a középfelület felület-elemének véges forgása és alakváltozási jellemzőinek kismértékű megváltozása volt a vizsgálat tárgya. A forgást leíró tenzor három forgástenzor szorzataként jelent meg. Kis alakváltozási jellemzők feltételezésével (a középfelület elmozdulásmezőjével és forgásmezőjével) előállítottak a Green-Lagrange és a Jaumann alakváltozási tenzorok koordinátái a középfelületen, majd a Reissner-Mindlin feltételezés alkalmazásával a Green-Lagrange alakváltozási tenzorkoordinátái tetszőleges pontban.

A kutatások második lépésére a címben megjelölt héjelméleti kinematikában általánosító feltételezések bevezetése és további kiterjesztések voltak a jellemzők. Alapfeladat volt a tetszőleges helyzetű anyagi pont elemi környezetének geometriai összevetése a terhelés utáni és a terhelés előtti állapotban (bázisvektorok változása, anyagi vonalelemek változása, merevtestszerű forgás, fajlagos hossz- és szögváltozások, felületelem változások, térfogatelem változások), mindez az alakváltozás előtti középfelületen értelmezett mennyiségek segítségével.

Feltételezés szerint a forgástenzor véges, nem függ a középfelületre merőleges koordinátától, az alakváltozási mértékek azonban kicsik és mindhárom koordinátától függenek. További feltételezés, hogy az alakváltozás utáni bázisvektorok a középfelület elmozdulásmezőjével és forgástenzor-mezőjével, valamint véges számú, az alakváltozás előtti középfelületen értelmezett vektormezővel (az ezekből képzett sorokkal) közelíthetők. A felületi terhelések alakváltozást követően.

Ilyen módon a Green-Lagrange alakváltozási tenzor és - lineáris anyagmodell mellett - II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor középfelületre áthelyezett koordinátáinak végezzámú tenzormezővel előírt sorai képezhetők. Eközben fel lettek használva a paláspereken előírható feszültségi peremfeltételek, továbbá meg lettek adva az oldalperemeken a kinematikai peremfeltételek, valamint az itt ható elemi erők is.

Az alakváltozás előtti állapotban - az előzőek figyelembevételével - felírt virtuális munka elv nemlineáris jellegű. A feladatok megoldása - egy célszerűen felvett (nem szükségszerűen egyensúlyi) állapotból kiindulva - a Newton-Raphson iterációs algoritmus alkalmazásával érhető el.

Numerikus számításokra eddig nem került sor.

1.1.3. Publikációk. Az [1] cikk és a [2] előadás érdemel kiemelését. A cikk letölthető a <http://www.uni-miskolc.hu/home/web/pumns/mechanics> url címről.

1.1.4. Kiegészítő megjegyzés. A fenti azaz az 1.1. szakaszban bemutatott vizsgálatok mind tervezett vizsgálatok.

A kutatási program vonatkozó szakasza – idézet az aláírt szerződésből. A peremintegrálegyenletek elméletében és a síkrugalmasságtani feladatok körében ismeretesek az ún. direkt módszer egyenletei duál rendszerben izotróp testre. Nyitott kérdés az egyenletek alakja anizotrop (ortotrop) testre. Ezek meghatározása az alapmegoldások meghatározását igényli. Numerikus számítások hagyományos és hálótól független módon is végezhető.

A jelen szakasz megértéséhez szükséges fogalmak. *Primál rendszerben és klasszikus felépítésben* az elmozdulásvektor az *alaprészváltozó*, az alakváltozási tenzor az ún. *elsődleges közbenső változó*, továbbá a szimmetrikus feszültségi tenzor az ún. *másodlagos közbenső változó*.

Primál rendszerben és mikropoláris felépítésben az elmozdulásvektor és a független forgásvektor (együtt elmozdulásvektorok) az *alaprészváltozók*, az alakváltozási tenzor és független forgási alakváltozási tenzor (együtt az alakváltozási tenzorok) az ún. *elsődleges közbenső változók*, továbbá a (nemszimmetrikus erő) feszültségi tenzor és nyomatéki feszültségi tenzor (együtt feszültségtenzorok) az ún. *másodlagos közbenső változók*.

A vizsgálat tárgyát jelentő síkbeli tartományon primál rendszerben a következő mezőegyenletek állnak fenn:

- az értelmező (vagy kinematikai) egyenlet(ek) az alakváltozási tenzort(tenzorokat) származtatja(ják) az elmozdulásvektor(ok)ból és biztosítja(ák) az ún. kompatibilitási egyenlet(ek) fennállását,
- a feszültségi tenzor(ok) az anyagegyenletekkel adódik (adódnak) az alakváltozási tenzor(ok)ból,
- a feszültségi tenzor(ok), mint mérlegegyenlet(ek), az egyensúlyi egyenlet(ek)nek tesz(nek) eleget.

A síkbeli tartomány elvben lehet egyszeresen, vagy többszörösen összefüggő és lehet (végtelenbe nyúló) külső tartomány is.

Duál rendszerben és klasszikus felépítésben két elsőrendű feszültségfüggvény és a forgásmező az *alaprészváltozók*, a feszültségi tenzor az ún. *elsődleges közbenső változó*, továbbá a szimmetrikus alakváltozási tenzor az ún. *másodlagos közbenső változó*.

Duál rendszerben és mikropoláris felépítésben az elsőrendű feszültségfüggvény tenzorok nem zérus koordinátái, azaz az ún. feszültségfüggvények az *alaprészváltozók*, a (nemszimmetrikus erő) feszültségi és a nyomatéki feszültségi tenzor (együtt a feszültségi tenzorok) az ún. *elsődleges közbenső változók*, továbbá a nemszimmetrikus alakváltozási tenzor és a forgási alakváltozási tenzor (együtt alakváltozási tenzorok) az ún. *másodlagos közbenső változók*.

A vizsgálat tárgyát jelentő síkbeli tartományon duál rendszerben a következő mezőegyenletek állnak fenn:

- az értelmező (vagy kinematikai) egyenletek klasszikus esetben a feszültségi tenzort származtatják a két elsőrendű feszültségfüggvényből és biztosítják az erőegyensúly fennállását – a nyomatéki egyensúlyt biztosító szimmetriafeltételt külön kell előírni; mikropoláris esetben az értelmező egyenletek a feszültségi tenzorokat származtatják elsőrendű feszültségfüggvény tenzorokból (összesen három feszültségfüggvényből) és biztosítják valamennyi egyensúlyi egyenlet teljesülését,
- az alakváltozási tenzor(ok) az anyagegyenletekkel adódik (adódnak) a feszültségi tenzor(ok)ból,
- az alakváltozási tenzor(ok), mint mérlegegyenlet(ek)nek, a kompatibilitási mezőegyenlet(ek)nek tesz(nek) eleget.

A síkbeli tartomány elvben lehet egyszeresen vagy többszörösen összefüggő és lehet (végtelenbe nyúló) külső tartomány is.

Valamely peremrészén duál felépítés esetén az alábbiak a peremfeltételek:

- feszültségi peremfeltétel(ek) (ha vonalmenti terhelés van előírva, akkor levezethető közvetlenül a feszültségfüggvényekre is peremfeltétel és az értekezés az utóbbiakat használja majd),
- alakváltozási peremfeltétel(ek) (ha klasszikus esetben az elmozdulásmező, illetve mikropoláris esetben az elmozdulásmező és a forgásmező van előírva akkor ezekre duál rendszerben nem írható közvetlenül elő peremfeltétel, mivel ezek a mennyiségek nem szerepelnek a duál rendszer változói között – a megoldást az ún. az alakváltozási peremfeltételek alkalmazása kínálja: az utóbbiak a peremen vett elmozdulások és forgások ívkoordináta szerinti deriváltjaira illetve az alakváltozási tenzorok peremen tekintett koordinátáira tett előírások).

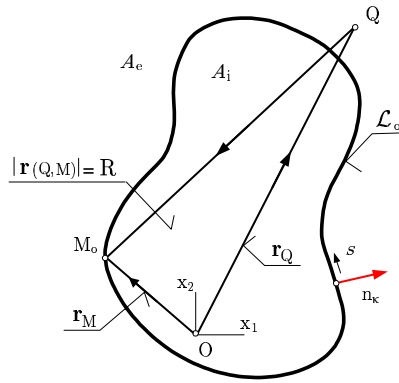
Egyszeresen összefüggő tartomány esetén, ha több különálló peremíven van elmozdulásmező előírva, illetve többszörösen összefüggő tartomány esetén teljesülnie kell még az ún. kiegészítő és makro kompatibilitási feltételeknek is.

A kompatibilitási mezőegyenlet(ek), az alakváltozási peremfeltétel(ek), továbbá a kiegészítő és a makro kompatibilitási feltételek együtt biztosítják, hogy az alakváltozási tenzor(ok)ból a – vizsgált síkbeli tartomány adott merevtestszerű mozgása esetén – a tartományon és a peremen (kontúrgörbéken) is klasszikus esetben egyértékű elmozdulásmező, mikropoláris esetben pedig egyértékű elmozdulásmező és egyértékű forgásmező legyen előállítható.

2.1. Megoldandó feladat primál rendszerben ortotrop testre. A rugalmasságtan primál rendszerében az ortotrop testekkel kapcsolatos síkfeladatok esetén a direkt peremelem módszer külső tartományokkal kapcsolatos egyenleteinek az a hátránya, hogy nem jelennek meg bennük a végtelen távoli pontban konstans feszültségekkel kapcsolatos tagok¹. Ha azonban a megfelelően megfogalmazott direkt peremelem módszer egyenletei lineáris elmozdulásmezőt állítanak elő a végtelenben, akkor konstans a vonatkozó alakváltozási- és feszültségmező a végtelenben. Következésképp nincs szükség arra, hogy véges tartománnyal helyettesítsük a külső tartományt a számítás során.

A fentebb mondottak alapján az tehát a kulcs kérdés, hogy hogyan módosul a három SOMIGLIANA formula - ezek közül a második a direkt módszer integrálegyenlete - ha konstans feszültségi és alakváltozási állapotot feltételezve a végtelenben.

2.1.1. A feladat egyenletei. A vizsgálatokat az $x_1 = x$ és $x_2 = y$ kartéziuszi koordinátarendszerben végezzük. A koordinátarendszer origóját O jelöli. {Görög}[Latin index] az {1,2}[1,2,3] értékeket veheti fel, néma indexek szerint összegezni kell. A tekintett belső és külső tartományokat A_i és A_e , a tartományok közös peremgömbjét pedig \mathcal{L}_o jelöli. A külső normális n_π , $\delta_{\kappa\lambda}$ a KRONECKER szimbólum, az x_α szerinti parciális deriváltakat ∂_α jelöli, $\epsilon_{3\kappa\lambda}$ pedig a permutációs szimbólum. A pozitív s ívkoordináta irányában haladva jobbra mutat a külső normális, a tartomány pedig baloldalon van.



1. ábra. Külső és belső tartomány néhány jelöléssel

Síkfeladatok esetén rendre u_κ , $e_{\kappa\lambda}$ és $t_{\kappa\lambda}$ jelöli az elmozdulásmezőt, valamint az alakváltozási és feszültségi tenzor síkbeli koordinátáit. Az n_π normálisú vonalelemen $t_\lambda = n_\pi t_{\pi\lambda}$ a feszültségvektor. A $Q(\xi_1, \xi_2)$ pontban működő $e_\lambda(Q)$ erő hatására $u_\lambda(M) = U_{\lambda\kappa}(M, Q)e_\kappa(Q)$ az $M(x_1, x_2)$ pont elmozdulása és $t_\lambda(M) = T_{\lambda\kappa}(M, Q)e_\kappa(Q)$ az $M \neq Q$ pontbeli n_π normálisú felületelemen ébredő feszültségvektor, ahol $U_{\lambda\kappa}(M, Q)$ és $T_{\lambda\kappa}(M, Q)$ az ún. első és másodrendű alapmegoldás – ezek képletei a lábjegyzetben idézett cikkből vehetők ki. A két pont távolságát r jelöli. Ha a Q , vagy M pont az \mathcal{L}_o peremgömbjére lokalizált, akkor ezt indexben álló o jelzi.

Ha zérus a végtelen távoli pontban a feszültségi tenzor, akkor valamely peremértékfeladat megoldása integrálásokkal állítható elő (első SOMIGLIANA formula külső tartományra):

$$(2.1a) \quad u_\kappa(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o)U_{\lambda\kappa}(M_o, Q) - u_\lambda(M_o)T_{\lambda\kappa}(M_o, Q)] ds_{M_o}, \quad Q \in A_e.$$

Mivel egy adott perempontban a peremfeltételekből általában vagy csak a $t_\lambda(M_o)$ feszültségvektor, vagy pedig csak az $u_\lambda(M_o)$ elmozdulásvektor ismert további egyenletre van szükség a (2.1a) előállítás alkalmazhatóságához szükséges ismeretlenek ($t_\lambda(M_o)$, ha $u_\lambda(M_o)$ ismert, illetve $u_\lambda(M_o)$, ha $t_\lambda(M_o)$ ismert) meghatározásához. Kimutatható, hogy a peremen fennáll a

$$(2.1b) \quad c_{\kappa\rho}u_\rho(Q_o) = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta(Q_o) + \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o)U_{\lambda\kappa}(M_o, Q_o) - u_\lambda(M_o)T_{\lambda\kappa}(M_o, Q_o)] ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in \mathcal{L}_o,$$

egyenlet, ahol $c_{\kappa\rho} = \delta_{\kappa\rho}/2$, ha a kontúr folytonos Q_o -ban (csúcspont esetén $c_{\kappa\rho}$ az érintők által bezárt szögtől függ). Ez az integrálegyenlet a direkt módszer integrálegyenlete (a második SOMIGLIANA formula külső tartományra). Ha a Q az \mathcal{L}_o görbén kívül található – az ábrán a belső tartományhoz képes, amelyet A_i -vel jelölünk (a külső pedig A_e) – akkor belátható, hogy

$$(2.1c) \quad 0 = \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o)U_{\lambda\kappa}(M_o, Q) - u_\lambda(M_o)T_{\lambda\kappa}(M_o, Q)] ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in A_i,$$

¹Lásd pl.: F. J. Rizzo, D. J. Shippy: A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Bodies, Journal of Composite Materials, 1(4), (1960), 36-61.

ami a harmadik SOMIGLIANA formula külső tartományra. A (2.1b) integrálegyenlet megoldása után alkalmazhatóvá válik a (2.1b) képlet. Az elmozdulásmező birtokában természetesen számíthatók az alakváltozások és feszültségek is. A vonatkozó képletek kiírásától eltekintünk.

2.1.2. *Eredmények.* Tételezzük fel, hogy

$$(2.2) \quad \tilde{u}_\kappa(M) = c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} x_\rho \omega + e_{\kappa\beta}(\infty) x_\beta$$

az $u_\lambda(M)$ elmozdulásmező alakja a végtelen távoli pontban (azaz a fenti képlet az elmozdulásmező aszimptotikus előállítás), ha x_β , vagy ami ugyanaz, ha M a végtelenhez tart, ahol c_κ eltolódás, ω végtelenbeli mozgásokhoz tartozó forgás, $c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} x_\rho \omega$ a vonatkozó merevtestszerű elmozdulás, $e_{\kappa\beta}(\infty)$ a végtelenben vett konstans alakváltozási tenzor, $e_{\kappa\beta}(\infty) x_\beta$ pedig az ehhez tartozó elmozdulás mező. Az $e_{\kappa\beta}(\infty)$ alakváltozásokból adódó konstans $t_{\kappa\beta}(\infty)$ feszültségeket a HOOKE törvényből nyerjük:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} t_{11}(\infty) &= c_{11}e_{11}(\infty) + c_{12}e_{22}(\infty), & t_{22}(\infty) &= c_{12}e_{11}(\infty) + c_{22}e_{22}(\infty), \\ t_{12}(\infty) &= t_{21}(\infty) = 2c_{66}e_{12}(\infty). \end{aligned}$$

Itt

$$(2.4) \quad c_{11} = \frac{s_{22}}{d}, \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{s_{12}}{d}, \quad c_{22} = \frac{s_{11}}{d}, \quad c_{66} = \frac{1}{s_{66}}, \quad \text{és } d = s_{11}s_{22} - s_{12}^2,$$

amelyben $c_{11}, \dots, c_{11}, s_{11}, \dots, s_{66}$ az ortotrop test anyagállandói.

Igazoltuk kétféleképpen is, hogy fennállnak külső tartományon a módosított és kiegészített SOMIGLIANA formulák azaz

$$(2.5a) \quad u_\kappa(Q) = c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} \xi_\rho(Q) \omega + e_{\kappa\beta}(\infty) \xi_\beta(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o) U_{\lambda\kappa}(M_o, Q) - u_\lambda(M_o) T_{\lambda\kappa}(M_o, Q)] ds_{M_o},$$

$Q \in A_e.$

továbbá

$$(2.5b) \quad c_{\kappa\rho} u_\rho(Q_o) = c_\kappa c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} \xi_\rho(Q_o) \omega + e_{\kappa\beta}(\infty) \xi_\beta(Q_o) + \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o) U_{\lambda\kappa}(M_o, Q_o) - u_\lambda(M_o) T_{\lambda\kappa}(M_o, Q_o)] ds_{M_o},$$

$Q = Q_o \in \mathcal{L}_o,$

és

$$(2.5c) \quad 0 = c_\kappa c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} \xi_\rho(Q_o) \omega + e_{\kappa\beta}(\infty) \xi_\beta(Q_o) + \oint_{\mathcal{L}_o} [t_\lambda(M_o) U_{\lambda\kappa}(M_o, Q) - u_\lambda(M_o) T_{\lambda\kappa}(M_o, Q)] ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in A_i.$$

Az új tagok kékkel vannak szedve. A numerikus megoldások során eltekinthetünk a merevtestszerű mozgástól: c_κ és ω zérusnak választható.

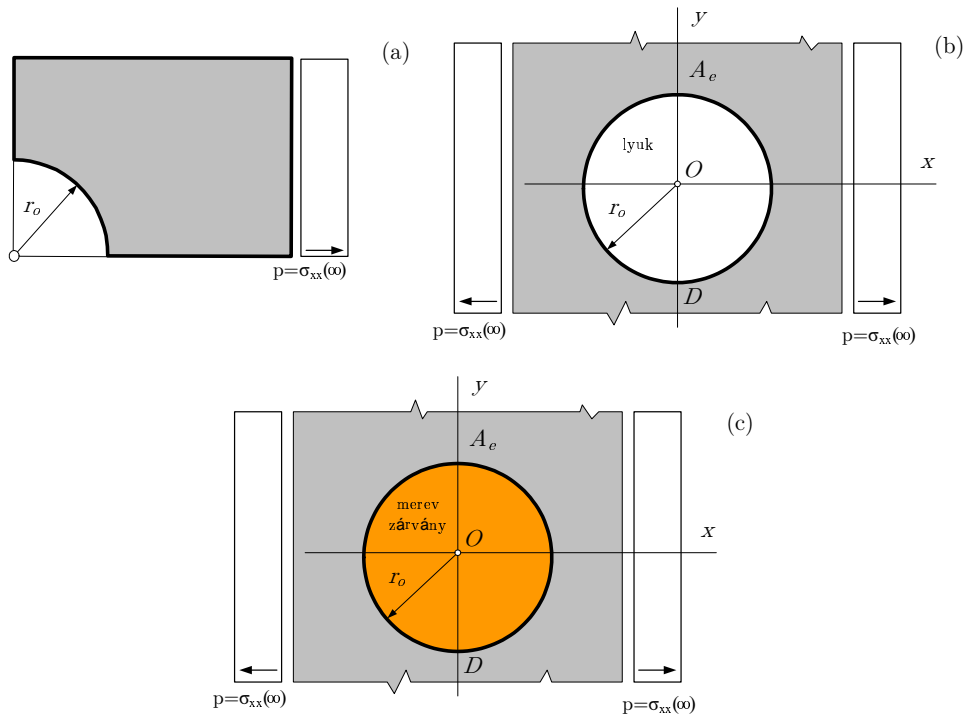
2.1.3. *Példák.* A numerikus megoldás érdekében program készült FORTRAN 90 nyelven. A továbbiakban két teszt-feladat megoldását mutatjuk be. A vizsgált tartományt mindkét esetben az O középpontú $r_o = 10$ mm sugarú \mathcal{L}_o kör által határolt külső A_e tartomány jelöli. Ennek nyírfa az anyaga az $s_{11} = 8.497 \times 10^{-5}$ mm²/N, $s_{12} = s_{21} = -6.11 \times 10^{-2}$ mm²/N, $s_{22} = 1.6999 \times 10^{-4}$ mm²/N és $s_{66} = 1.456 \times 10^{-3}$ mm²/N anyagállandókkal. A végtelen távoli pontban feltesszük, hogy $\tau_{12}(\infty) = \sigma_{22}(\infty) = 0$ N/mm² és $\sigma_{11}(\infty) = p = 100$ N/mm² a feszültségi tenzor koordinátái.

A 2.a. ábrarészlet a hagyományos peremelemes számítás esetére szemlélteti a numerikus megoldás alapjául szolgáló belső tartományt. A külső méreteket úgy szokás felvenni hogy a felső és jobboldali egyeneseken már jó közelítéssel a végtelen távoli pont feszültségi állapotát tudjuk működtetni.

Mi nem éltünk ezzel a geometriai jellegű közelítéssel, hanem pontosan modelleztük a külső tartományt.

Az első feladat esetén üres az \mathcal{L}_o kör belseje és terheletlen annak pereme. Ezeket a viszonyokat a 2.b. ábrarészlet szemlélteti.

A második feladat esetén merev zárvány található az \mathcal{L}_o kör belsejében. Ezeket a viszonyokat a 2.c. ábrarészlet szemlélteti.



2. ábra. A vizsgált külső tartomány hagyományos és pontos modellezése

LEKHTNISKI könyve² tartalmazza zárt formában a feszültségekre vonatkozó megoldásokat a peremen. Emellett táblázatba foglalt numerikus eredményeket is közöl. Ezek az idézett könyv 197. oldalának 17-es táblázatában található, de az 1. és 2. táblázatokban is megjelennek a polárszög diszkrét értékeire fekete színnel szedve.

Polárszög	Kör alakú kivágás	
	σ_θ/p	Lekhn., p.197
0°	-0.7071	-0.707
15°	-0.3399	-0.340
30°	0.0692	0.069
45°	0.4040	0.404
60°	0.9644	0.966
75°	2.5771	2.577
90°	5.4514	5.453

1. táblázat. Kör alakú kivágással gyengített síkra vonatkozó eredmények

Polárszög	Merev zárvány					
	σ_r/p	Lekhn., p.197	$\tau_{r\theta}/p$	Lekhn., p.197	σ_θ/p	Lekhn., p.197
0°	1.2363	1.237	0.0000	0.000	0.0445	0.044
15°	1.1562	1.156	-0.2994	-0.299	0.0934	0.093
30°	0.9370	0.937	-0.5185	-0.519	0.2697	0.270
45°	0.6378	0.698	-0.5987	-0.599	0.5154	0.516
60°	0.3383	0.388	-0.5185	-0.519	0.6989	0.699
75°	0.1192	0.119	-0.2994	-0.299	0.5637	0.564
90°	0.0389	0.039	0.0000	0.000	0.0028	0.003

2. táblázat. Kör alakú kivágással gyengített síkra vonatkozó eredmények

A saját eredményeket piros színnel szedtük. Figyeljük meg, hogy a merev zárvány estén jelentős az eltérés σ_r -ben a polárszög 45°-os és 60°-os értékeire. Mindkét esetben sajtóhibáról van szó, hiszen saját számításainkat a duál rendszerbeni vizsgálatok során megismételtük, és a pirossal szedett eredményekkel gyakorlatilag egyezők az ott kapott eredmények.

²Az anyagállandókat és a kontrollmegoldást a S. G. Lekhnitski: Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Nauka, 1977, orosz könyvből vettük.

2.1.4. *Publikációk.* A hosszadalmas és szigorú igazolást a [3] cikk közli. Az eredményekről előadás is elhangzott az ESMC2006 konferencián [4]. Elegáns és tömör igazolást (ehhez az ötletet az egyik bíráló adta), és számpéldát közöl az [5] tanulmány. A fenti eredmények magyarul a [11] értekezés első fejezetében lelhetők fel.

2.1.5. *Kiegészítő megjegyzés.* A fenti azaz a 2.1. szakaszban bemutatott vizsgálatok nem tervezett vizsgálatok. Szorosan kötődnek azonban a következő, azaz a 2.2 szakasz vizsgálataihoz.

2.2. Megoldandó feladat duál rendszerben ortotrop testre. A duál rendszerbeli vizsgálatok fő célja összhangban a kutatási tervben megfogalmazott célkitűzésekkel direkt peremelem módszer teljes kidolgozása. Ennek a feladatnak tudomásunk szerint nem ismeretes a megoldása a peremelem módszer szakirodalmában.

2.2.1. *A duál rendszerben tekintett síkfeladat mezőegyenletei és peremfeltételei.* Az \mathcal{F}_ρ vektor az elsőrendű feszültségfüggvények vektora. Most is feltételezzük, hogy nincs külső terhelés. Homogén, ortotrop anyag esetén a klasszikus rugalmasságtan mezőegyenleteit duál rendszerben az alábbi egyenletek alkotják:

1. A duál kinematikai egyenletek:

$$(2.6a) \quad \begin{aligned} t_{11} &= \mathcal{F}_1 \partial_2, & t_{21} &= \mathcal{F}_2 \partial_2, \\ t_{12} &= -\mathcal{F}_1 \partial_1, & t_{22} &= -\mathcal{F}_2 \partial_1. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek a feszültségeket adják elsőrendű feszültségfüggvényekkel kifejezve. A fenti feszültségekre vonatkozó megoldás kielégíti a primál rendszer

$$t_{11} \partial_1 + t_{12} \partial_2 = 0, \quad t_{21} \partial_1 + t_{22} \partial_2 = 0$$

homogén egyensúlyi egyenleteit.

2. A HOOKE törvény inverz alakja:

$$(2.6b) \quad \begin{aligned} e_{11} &= u_1 \partial_1 = s_{11} t_{11} + s_{12} t_{22}, & e_{22} &= u_2 \partial_2 = s_{21} t_{11} + s_{22} t_{22}, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} (u_1 \partial_2 + u_2 \partial_1) = \frac{s_{66}}{4} (t_{12} + t_{21}). \end{aligned}$$

3. A duál mérlegegyenletek, vagy kompatibilitási egyenletek:

$$(2.6c) \quad e_{11} \partial_2 - e_{12} \partial_1 + \varphi_3 \partial_1 = 0, \quad e_{21} \partial_2 - e_{22} \partial_1 + \varphi_3 \partial_2 = 0,$$

ahol φ_3 a merevtestszerű forgás.

4. Mivel a (2.6a) egyenletekkel előállított feszültségmező nem szimmetrikus, ki kell egészíteni a fenti egyenleteket a

$$(2.6d) \quad t_{12} = t_{21}$$

szimmetria feltétellel.

A (2.6a), ..., (2.6d) mezőegyenleteket ki kell egészíteni a vonatkozó peremfeltételekkel.

Az \mathcal{L} peremgörbe \mathcal{L}_u jelű ívén az elmozdulásvektor, az \mathcal{L}_t jelű ívén pedig a feszültségvektor az előírt. Az előírt értékeket a vonatkozó betű felett álló kalap jelöli majd.

Mivel az elmozdulásvektor nem változója a duál rendszernek SZEIDL igazolta³, hogy az \mathcal{L}_u jelű ívén a

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{u}_1}{ds} &= n_1 e_{21} - n_2 e_{11} - n_1 \varphi_3, \\ \frac{d\hat{u}_2}{ds} &= n_1 e_{22} - n_2 e_{12} - n_2 \varphi_3 \end{aligned} \quad s \in \mathcal{L}_u$$

egyenletek a peremfeltételek – ezek, élve KOZÁK elnevezésével alakváltozási peremfeltételek.

Legyen P_t az \mathcal{L}_t ív kezdőpontja. Legyen továbbá az s az \mathcal{L}_t ív valamely belső pontja. Az $\hat{\mathcal{F}}_\rho(s)$ -t az

$$\hat{\mathcal{F}}_\rho(s) = \int_{P_t}^s \hat{t}_\rho(\sigma) d\sigma$$

integrál értelmezi. Kimutatható, hogy a

$$(2.8) \quad \mathcal{F}_\rho(s) = \hat{\mathcal{F}}_\rho(s) + C_\rho, \quad s \in \mathcal{L}_t$$

peremfeltétel írható elő a feszültségfüggvényekre, ahol a C_ρ egyelőre határozatlan integrációs állandó, hiszen nincs garancia arra, hogy ismerjük az ív P_{ti} kezdőpontjában a feszültségfüggvény értékét. (Ha $C_\rho = 0$, akkor $\mathcal{F}_\rho(s)$ a feszültségek eredője a tekintett íven.) Ha egy terhelt ív van, akkor mindig lehetséges a $C_\rho = 0$ választás.

³G. Szeidl: Boundary integral equations for plane problems in terms of stress functions of order one. Journal of Computational and Applied Mechanics, 2(2), 2001, 237-261.

Vezessük be a

$$(2.9) \quad [\mathfrak{D}_{ik}] = \begin{bmatrix} s_{11}\partial_2\partial_2 + \frac{s_{66}}{4}\partial_1\partial_1 & -\left(s_{12} + \frac{s_{66}}{4}\right)\partial_1\partial_2 & -\partial_1 \\ -\left(s_{21} + \frac{s_{66}}{4}\right)\partial_1\partial_2 & s_{22}\partial_1\partial_1 + \frac{s_{66}}{4}\partial_2\partial_2 & -\partial_2 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$(2.10) \quad \mathbf{u}_k = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, -\varphi_3)$$

jelöléseket. A szóhasználatot illetően pedig állapotjunk meg abban, hogy az $\mathbf{u}_k = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ vektort *duál elmozdulásvektornak*, a $\mathbf{t}_\kappa = -du_\kappa/ds$ vektort pedig *duál feszültségvektornak* nevezzük, amely a peremen vett elmozdulásmezőből számított mennyiség.

Ha elimináljuk a (2.6a), ..., (2.6d) egyenletekből a közbülső változókat, azt kapjuk, hogy a keresett \mathbf{u}_k vektor az

$$(2.11) \quad \mathfrak{D}_{ik}\mathbf{u}_k = 0$$

parciális differenciálegyenletnek köteles eleget tenni. A fentiek alapján az alábbiak részletezik az eredményeket.

2.2.2. Eredmények. Az eredményeket sorszámozva közöljük:

1. Az

$$(2.12) \quad \mathfrak{D}_{ik}\mathbf{u}_k + \delta(M-Q)e_i(Q) = 0$$

differenciálegyenlet (a \mathfrak{D} felett álló M azt jelenti, hogy az M pont koordinátái szerint deriválunk) teljes síkra vonatkozó

$$\mathbf{u}_k(M, Q) = e_j(Q)\mathfrak{U}_{jk}(M, Q)$$

megoldásában az $\mathfrak{U}_{kj}(M, Q)$ mátrixot *elsőrendű alapmegoldásnak* nevezzük. Meghatároztuk az elsőrendű alapmegoldást:

$$(2.13a) \quad [\mathfrak{U}_{pq}(M, Q)] = \mathcal{K} \text{Im} \sum_{\kappa=1}^2 \times$$

$$(2.13b) \quad \times \begin{bmatrix} -d_\kappa(2 \ln \rho_\kappa + 3) \beta_\kappa^2 & d_\kappa(2 \ln \rho_\kappa + 3) \beta_\kappa & \frac{2d_\kappa}{\rho_\kappa} \left[\left(s_{21} + \frac{s_{66}}{2} \right) \beta_\kappa^2 + s_{22} \right] \\ d_\kappa(2 \ln \rho_\kappa + 3) \beta_\kappa & -d_\kappa(2 \ln \rho_\kappa + 3) & \frac{2d_\kappa \beta_\kappa}{\rho_\kappa} \left[\left(s_{12} + \frac{s_{66}}{2} \right) + s_{11} \beta_\kappa^2 \right] \\ \frac{2d_\kappa}{\rho_\kappa} \left[\left(s_{21} + \frac{s_{66}}{2} \right) \beta_\kappa^2 + s_{22} \right] & \frac{2d_\kappa \beta_\kappa}{\rho_\kappa} \left[\left(s_{12} + \frac{s_{66}}{2} \right) + s_{11} \beta_\kappa^2 \right] & - \left\{ 2a_{33} - s_{21}s_{66} - \frac{s_{66}^2}{2} \right\} \beta_\kappa^2 \frac{d_\kappa}{\rho_\kappa^2} \end{bmatrix}$$

ahol

$$(2.13c) \quad \beta_\kappa = a_\kappa + ib_\kappa, \quad \tilde{\beta}_\kappa = a_\kappa - ib_\kappa, \quad b_\kappa > 0.$$

a

$$(2.13d) \quad s_{22} + (2s_{21} + s_{66})\beta^2 + s_{11}\beta^4 = 0$$

egyenlet gyöke, míg d_κ a β_κ^3 -hoz tartozó kofaktora (előjeles aldeterminánsa) a

$$(2.13e) \quad d = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ 1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_1^2 & \tilde{\beta}_1^3 \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ 1 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2^2 & \tilde{\beta}_2^3 \end{bmatrix} = -4b_1b_2 \left[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \right] \left[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \right]$$

determinánsnak:

$$(2.13f) \quad d_1 = - \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_1^2 \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 \\ 1 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2^2 \end{bmatrix} = (\beta_2^2 - \tilde{\beta}_1^2) (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1) - (\beta_2 - \tilde{\beta}_1) (\tilde{\beta}_2^2 - \tilde{\beta}_1^2)$$

$$(2.13g) \quad d_2 = - \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 \\ 1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_1^2 \\ 1 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2^2 \end{bmatrix} = (\tilde{\beta}_2 - \beta_1) (\tilde{\beta}_1^2 - \beta_1^2) - (\tilde{\beta}_1 - \beta_1) (\tilde{\beta}_2^2 - \beta_1^2).$$

$$(2.13h) \quad a_{33} = s_{11}s_{22} + \left(\frac{s_{66}}{4} \right)^2 - \left(s_{21} + \frac{s_{66}}{4} \right)^2$$

$$(2.13i) \quad \mathcal{K} = -\frac{1}{I_1 + I_2}, \quad I_\kappa = 4\pi \frac{d_\kappa}{b_\kappa + 1} (b_\kappa^3 s_{11} + b_\kappa^2 (s_{21} + s_{66}) - b_\kappa s_{12} - s_{22}).$$

2. Meghatároztuk a (2.7) képletek segítségével az elsőrendű alapmegoldásból adódó

$$\mathbf{t}_\kappa(M_o) = -\frac{du_\kappa(M_o, Q)}{ds}$$

duál feszültségvektort. Az eredményt adó

$$(2.14a) \quad \mathbf{t}_\kappa(M_o) = e_l(Q) \mathfrak{T}_{l\kappa}(M_o, Q)$$

képletben $\mathfrak{T}_{l\kappa}(M_o, Q)$ a másodrendű alapmegoldás:

$$(2.14b) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_{11}(M_o, Q) &= \mathcal{K} \operatorname{Im} \sum_{\kappa=1}^2 \frac{2d_\kappa}{\rho_\kappa} \left\{ n_2 (-s_{11}\beta_\kappa^3 - s_{12}\beta_\kappa) - \frac{n_1}{2} s_{66}\beta_\kappa^2 - n_1 \left[s_{22} + \left(s_{21} + \frac{s_{66}}{2} \right) \beta_\kappa^2 \right] \right\} \\ &\dots \\ \mathfrak{T}_{32}(M_o, Q) &= \mathcal{K} \operatorname{Im} \sum_{\kappa=1}^2 \frac{2d_\kappa}{\rho_\kappa} \left\{ \frac{n_2 s_{66}}{2\rho_\kappa} \left[\left(s_{21} + \frac{s_{66}}{2} \right) \beta_\kappa^2 + s_{22} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_1 \beta_\kappa}{\rho_\kappa} \left[\left(\left(s_{21} + \frac{s_{66}}{2} \right) (s_{21}\beta_\kappa^2 - s_{22}) \right) + s_{22}(s_{21} - s_{11}\beta_\kappa^2) \right] + n_2 \frac{\beta_\kappa^2}{\rho_\kappa} \left[a_{33} - \frac{s_{21}s_{66}}{2} - \frac{s_{66}^2}{4} \right] \right\} \end{aligned}$$

3. Megvizsgáltuk az alapmegoldások tulajdonságait. Az elsőrendű alapmegoldás szimmetrikus:

$$(2.15) \quad \mathfrak{U}_{jk}(M, Q) = \mathfrak{U}_{kj}(M, Q) = \mathfrak{U}_{jk}(Q, M) = \mathfrak{U}_{kj}(Q, M)$$

Igazoltuk, hogy az első és másodrendű alapmegoldás oszlopai kielégítik a

$$(2.16) \quad \mathfrak{D}_{ik} \mathfrak{U}_{k\lambda}(M_o, Q) = \mathfrak{D}_{ik} \mathfrak{T}_{k\lambda}(M_o, Q) = 0, \quad M_o \neq Q$$

alapegyenletet. Igazoltuk, hogy a másodrendű alapmegoldásra nézve fennáll az

$$(2.17) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) ds_{M_o} = \begin{cases} -\delta_{\kappa\lambda}, & \text{ha } Q \in A_i \\ -\frac{1}{2}\delta_{\kappa\lambda}, & \text{ha } Q = Q_o \in \mathcal{L}_o \\ 0, & \text{ha } Q \notin A_i \end{cases}$$

összefüggés.

4. Levezettük a

$$(2.18) \quad \int_{A_i} \left[\mathbf{u}_k (\mathfrak{D}_{kl} \mathbf{u}_l) - \mathbf{u}_k^* (\mathfrak{D}_{kl} \mathbf{u}_l) \right] dA = \oint_{\mathcal{L}_o} \left[\mathbf{u}_\lambda \mathbf{t}_\lambda - \mathbf{u}_\lambda^* \mathbf{t}_\lambda \right] ds$$

duál Somigliana identitást. A képlet mindig fennáll, ha az \mathbf{u}_k^* és \mathbf{u}_k kellő rendben differenciálható az A_i tartományon; egyéb tekintetben mindkét függvény tetszőleges lehet. \mathbf{t}_λ^* és \mathbf{t}_λ az \mathbf{u}_k^* és \mathbf{u}_k -hoz tartozó duál feszültség.

5. A (2.18) indentitás felhasználásával levezettük *belső tartományra* a három duál SOMIGLIANA formulát. Az első

$$(2.19a) \quad \mathbf{u}_k(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(M_o, Q) \mathbf{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(M_o, Q) \mathbf{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_i$$

duál SOMIGLIANA formula szerint, ha ismerjük az $\mathbf{u}_\lambda(M_o)$ feszültségfüggvényeket, valamint az elmozdulásmező s ívkoordináta szerinti $-\mathbf{t}_\lambda(M_o)$ deriváltját (a duál feszültséget) az \mathcal{L}_o kontúron, akkor kvadraturák segítségével számítható az $\mathbf{u}_k = (F_1, F_2, -\varphi_3)$ rugalmas állapot az A tartomány Q belső pontjában.

Az \mathcal{L}_o kontúr egy pontjában vagylagosan írhatók elő az $\mathbf{u}_\lambda(M_o)$ feszültségfüggvények illetve az elmozdulásmező s ívkoordináta szerinti vett $-\mathbf{t}_\lambda(M_o)$ deriváltjai. A második

$$(2.19b) \quad c_{\kappa\lambda}(Q_o) \mathbf{u}_\lambda(Q_o) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(M_o, Q_o) \mathbf{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q_o) \mathbf{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in \mathcal{L}_o$$

duál SOMIGLIANA formula olyan integrálegyenlet (a direkt módszer integrálegyenlete), amely alkalmas a hiányzó $\mathbf{u}_\lambda(M_o)$ vagy $\mathbf{t}_\lambda(M_o)$ meghatározására. Ezek ismeretében pedig alkalmazható az első duál SOMIGLIANA formula. A képletben $c_{\kappa\lambda}(Q_o) = \delta_{\kappa\lambda}/2$ ha sima a peremgörbe a Q_o pontban. Egyébként az érintők által bezárt szögtől függ.

MEGJEGYZÉS: A (2.19b) -ben álló két vonalintegrált CAUCHY féle főértékben kell venni.

A harmadik duál SOMIGLIANA formula

$$(2.19c) \quad 0 = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) \mathbf{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) \mathbf{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_e$$

alakú.

6. Legyen $\mathfrak{s}_k = (t_{11}, t_{12}, t_{22})$. Levezettük a belső pontban a feszültségeket adó

$$(2.20a) \quad \mathfrak{s}_k(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} S_{k\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} D_{k\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_i$$

(2.20b)

összefüggést, ahol

$$(2.20c) \quad [S_{\kappa\lambda}] = -2\mathcal{K} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \frac{d_k}{\rho_k} \begin{bmatrix} -\beta_k^3 & \beta_k^2 \\ \beta_k^2 & -\beta_k \\ -\beta_k & 1 \end{bmatrix}.$$

és

$$(2.20d) \quad [D_{\kappa\lambda}] = \mathcal{K} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \frac{2d_k}{\rho_k^2} \times \begin{bmatrix} n_2 (-s_{11}\beta_k^4 - s_{12}\beta_k^2) - \frac{n_1}{2} s_{66}\beta_k^3 - n_1 [s_{22}\beta_k + (s_{21} + \frac{s_{66}}{2}) \beta_k^3] & -\frac{n_2}{2} s_{66}\beta_k^3 + n_1 (s_{21}\beta_k^4 + s_{22}\beta_k^2) + n_2 [s_{22}\beta_k + (s_{21} + \frac{s_{66}}{2}) \beta_k^3] \\ n_2 (s_{11}\beta_k^3 + s_{12}\beta_k) + \frac{n_1}{2} s_{66}\beta_k^2 - n_1 \beta_k^2 [(s_{12} + \frac{s_{66}}{2}) + s_{11}\beta_k^2] & -\frac{n_2}{2} s_{66}\beta_k^2 - n_1 (s_{21}\beta_k^3 + s_{22}\beta_k) - n_2 \beta_k^2 [(s_{12} + \frac{s_{66}}{2}) + s_{11}\beta_k^2] \\ -n_2 (s_{11}\beta_k^2 + s_{12}) - \frac{n_1}{2} s_{66}\beta_k + n_1 \beta_k [(s_{12} + \frac{s_{66}}{2}) + s_{11}\beta_k^2] & \frac{n_2}{2} s_{66}\beta_k + n_1 (s_{21}\beta_k^2 + s_{22}) + n_2 \beta_k [(s_{12} + \frac{s_{66}}{2}) + s_{11}\beta_k^2] \end{bmatrix}.$$

7. Az A_e külső tartományon a koordinátasík \mathcal{L}_o zárt görbén kívül fekvő részét értjük. A végtelenben vett feszültségek a

$$(2.21) \quad \tilde{\mathfrak{u}}_1(Q) = \xi_2 t_{11} - \xi_1 t_{12} + c_1(\infty) \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{u}}_2(Q) = \xi_2 t_{21} - \xi_1 t_{22} + c_2(\infty)$$

feszültségfüggvényekből származtathatók. Feltételezzük továbbá, hogy a végtelen távoli pontban zérus a me-revtestszerű forgás: $\tilde{\mathfrak{u}}_3(Q) = \tilde{\mathfrak{u}}_3(\infty) = 0$. A $c_\kappa(\infty)$ is zérus értékűnek választható (nem befolyásolja a feszültségi állapotot). Igazoltuk, hogy külső tartományra

$$(2.22a) \quad \mathfrak{u}_k(Q) = \tilde{\mathfrak{u}}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{u}_{k\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_e$$

és

$$(2.22b) \quad c_{\kappa\lambda}(Q_o) \mathfrak{u}_\lambda(Q_o) = \tilde{\mathfrak{u}}_\kappa(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{u}_{\kappa\lambda}(M_o, Q_o) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q_o) \mathfrak{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in \mathcal{L}_o$$

továbbá

$$(2.22c) \quad 0 = \tilde{\mathfrak{u}}_\kappa(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{u}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_i$$

alakú a három duál Somigliana formula míg a belső pontbeli feszültségek pedig a

$$(2.22d) \quad \mathfrak{s}_k(Q) = \mathfrak{s}_k(\infty) + \oint_{\mathcal{L}_o} S_{k\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} D_{k\lambda}(M_o, Q) \mathfrak{u}_\lambda(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_e$$

képletből számíthatók.

8. A peremen ismert az $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ normális, ismeretesek továbbá a megoldásból az $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y$ elsőrendű feszültségfüggvények, valamint a duál feszültségvektor $\mathfrak{t}_x, \mathfrak{t}_y$ elemei. Megmutattuk, hogy a peremmenti σ_x, σ_y és τ_{xy} feszültségek a

$$(2.23) \quad \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ n_y^2 s_{11} + n_x^2 s_{21} & -n_x n_y \frac{s_{66}}{2} & n_y^2 s_{12} + n_x^2 s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathcal{F}_x/ds \\ d\mathcal{F}_y/ds \\ -n_y \mathfrak{t}_y - n_x \mathfrak{t}_x \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerből számíthatók.

9. Belső tartományra kvadratikus izoparametrikus peremelemek felhasználásával a

$$(2.24a) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \cdots & \mathbf{h}_{1n_{bn}} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \cdots & \mathbf{h}_{2n_{bn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{h}_{n_{bn}1} & \mathbf{h}_{n_{bn}2} & \cdots & \mathbf{h}_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{n_{bn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \cdots & \mathbf{b}_{1n_{bn}} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \cdots & \mathbf{b}_{2n_{bn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b}_{n_{bn}1} & \mathbf{b}_{n_{bn}2} & \cdots & \mathbf{b}_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{t}_{n_{bn}} \end{bmatrix},$$

avagy tömörebb formában írva a

$$(2.24b) \quad \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{t}$$

egyenletrendszert kapjuk az ismeretlen csomóponti mennyiségek számítására ahol n_{bn} a peremcsomópontok száma (a \mathbf{H} és \mathbf{B} mátrixok elemeit adó integrálokat itt nem írjuk ki). Megmutattuk, hogy duál rendszerben

$$(2.25) \quad \sum_{j=1}^{2n_{bn}} H_{ij} = 0 \quad \text{vagy ami ugyanaz, hogy} \quad H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{2n_{bn}} H_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_{bn},$$

ahol H_{ij} a \mathbf{H} mátrix egy eleme. A képlet az erősen szinguláris integrálokat tartalmazó H_{ii} számítását teszi lehetővé, és ugyanolyan szerkezetű mint primál rendszerben (az igazolás gondolatmenete eltérő!).

Ha külső tartomány a vizsgált tartomány, akkor egy taggal bővül a megoldandó egyenletrendszer. Definiáljuk az $\tilde{\mathbf{u}}$ mátrixot az

$$(2.26) \quad \tilde{\mathbf{u}}^T = [\underbrace{\tilde{u}_1^1 \tilde{u}_2^1}_{\tilde{\mathbf{u}}_1^T} | \underbrace{\tilde{u}_1^2 \tilde{u}_2^2}_{\tilde{\mathbf{u}}_2^T} | \dots | \underbrace{\tilde{u}_1^{n_{bn}} \tilde{u}_2^{n_{bn}}}_{\tilde{\mathbf{u}}_{n_{bn}}^T}]$$

egyenlettel, ahol $\tilde{\mathbf{u}}_j$ egy olyan mátrix, amely a Q_j ($j = 1, \dots, n_{bn}$) pontokban vett \tilde{u}_κ értékeket tartalmazza. Ezzel a jelöléssel az

$$(2.27) \quad \mathbf{H}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{t}$$

alakban írható fel az ismeretlen csomóponti értékekre megoldandó egyenletrendszer. Az

$$(2.28) \quad H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{2n_{bn}} H_{ij} + 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_{bn}$$

egyenlet kihasználásával ismét elkerülhető az erősen szinguláris integrálok számítása.

2.2.3. Példák. Program készült Fortran 90 forráskódban. Megoldottuk duál rendszerben is a 2.1.3. szakasz példáit. Az eredményeket ugyanolyan szerkezetű táblázatban közöljük. Figyeljük meg, hogy eltérés csak a negyedik jegyben jelentkezik:

Polárszög	Köralakú kivágás	
	σ_θ/p	Lekhn., p.197
0°	-0.70744	-0.707
15°	-0.33928	-0.340
30°	0.06951	0.069
45°	0.40451	0.404
60°	0.96605	0.966
75°	2.57736	2.577
90°	5.45409	5.453

3. táblázat. Köralakú kivágással gyengített síkra vonatkozó eredmények duál rendszerben

Polárszög	Merev zárvány					
	σ_r/p	Lekhn., p.197	$\tau_{r\theta}/p$	Lekhn., p.197	σ_θ/p	Lekhn., p.197
0°	1.2363	1.237	0.0000	0.000	0.0444	0.044
15°	1.1558	1.156	-0.2999	-0.299	0.0936	0.093
30°	0.9364	0.937	-0.5188	-0.519	0.2701	0.270
45°	0.6370	0.698	-0.5986	-0.599	0.5158	0.516
60°	0.3377	0.388	-0.5181	-0.519	0.6990	0.699
75°	0.1188	0.119	-0.2987	-0.299	0.5627	0.564
90°	0.0389	0.039	0.0000	0.000	0.0028	0.003

4. táblázat. Eredmények merev zárvány esetén duál rendszerben

2.2.4. Publikációk. Az eredményeket belső tartományra a [6] teljes terjedelemben megjelenő előadás, valamint a [10] magyarul írt cikk ismertette. Részeredményekről ad számot külső tartományra a [7, 8] teljes terjedelemben megjelent előadás. Összefoglaló jellegű belső és külső tartománnyal kapcsolatban a teljes terjedelemben megjelent a [9] előadás. Valamennyi eredmény fellelhető a [11] PhD értekezésben. Rangos folyóiratban történő közlés előkészületben.

2.2.5. Kiegészítő megjegyzés. A fenti azaz a 2.2. szakaszban bemutatott vizsgálatok mind tervezett vizsgálatok.

2.3. A mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladata duál rendszerben. A duál rendszerbeli vizsgálatok fő célja homogén izotróp test feltételezése mellett direkt peremelem módszer teljes kidolgozása duál rendszerben. Az első síkfeladatot primál rendszerben és belső tartományra van irodalmi eredmény⁴. Duál rendszerbeni vizsgálatok a variációs elvek tekintetében Szeidl korábbi it nem idézett munkái. Peremelemes vizsgálatról duál rendszerben nincs tudomásunk.

⁴P. Schiavone: Integral equation methods in plane asymmetric elasticity. Journal of Elasticity, **43**, (1996), 31-43.

2.3.1. A duál rendszerben tekintett első síkfeladat és a síkfeladattal kapcsolatos néhány eredmény. ⁵

Mikropoláris esetben az u_ρ elmozdulásmező és φ_3 forgásmező egymástól független. Az erőfeszítések $t_{\pi\rho}$ tenzora pedig nem szimmetrikus. Az erőpárfeszítések tenzorát $\mu_{\nu 3}$ jelöli. $t_{(\kappa\lambda)}$ és $t_{\langle\kappa\lambda\rangle}$ az erőfeszítések tenzorának szimmetrikus és nem szimmetrikus részei. A μ , ν , α , γ és ε görög betűk az izotróp test anyagjellemzői. $\gamma_{\kappa\lambda}$ és $\kappa_{\nu 3}$ a két alakváltozási tenzor. E és D_ρ pedig az ún. inkompatibilitási tenzorok. A mikropoláris rugalmasságtan duál rendszerében az alábbi egyenletek alkotják a mezőegyenleteket:

– Duál kinematikai egyenletek:

$$(2.29a) \quad t_{\pi\rho} = \varepsilon_{\pi\mu 3} \partial_\mu \mathcal{F}_\rho + \overset{\circ}{t}_{\pi\rho} ,$$

$$(2.29b) \quad \mu_{\nu 3} = \varepsilon_{\nu\pi 3} (\partial_\pi \mathcal{H} + \varepsilon_{3\rho\pi} \mathcal{F}_\rho) + \overset{\circ}{\mu}_{\nu 3} ,$$

amelyek az önegyensúlyi $t_{\pi\rho}$ és $\mu_{\nu 3}$ feszültségeket adják elsőrendű \mathcal{F}_ρ , \mathcal{H} feszültségfüggvényekkel kifejezve.

A képletekben $\overset{\circ}{t}_{\pi\rho}$ és $\overset{\circ}{\mu}_{\nu 3}$ a primál egyensúlyi egyenletek partikuláris megoldásai.

– A HOOKE törvény inverz alakja:

$$(2.30) \quad \gamma_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2\mu} t_{(\kappa\lambda)} + \frac{1}{2\alpha} t_{\langle\kappa\lambda\rangle} - \frac{\nu}{2\mu} t_{\phi\phi} \delta_{\kappa\lambda} ,$$

$$(2.31) \quad \kappa_{\nu 3} = \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\nu 3} .$$

– A kompatibilitási differenciál-egyenletek (duál mérlegegyenletek):

$$(2.32) \quad E = \varepsilon_{3\rho\pi} \kappa_{\rho 3} \partial_\pi = 0 , \quad D_\rho = \varepsilon_{3\nu\pi} (\gamma_{\pi\rho} \partial_\nu + \varepsilon_{\pi\rho 3} \kappa_{\nu 3}) = 0 .$$

A (2.29b), (2.31) és (2.32) mezőegyenleteket ki kell egészíteni a peremfeltételekkel. Mivel az elmozdulásmezők nem változói a duál rendszernek az \mathcal{L}_u -t alkotó peremíveken a

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \tau_\pi \gamma_{\pi\rho} &= \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} + \tau_\pi \varepsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}_3 , & s \in \mathcal{L}_u , \\ \tau_\pi \kappa_{\pi 3} &= \frac{d\hat{\varphi}_3}{ds} , & s \in \mathcal{L}_u \end{aligned}$$

alakváltozási peremfeltételeket kell előírni. A képletekben τ_π az \mathcal{L} peremgörbe érintő egységvektora. Az ismert mennyiségeket most is kalap jelzi.

Az ún. duál feszültségeket a

$$(2.34) \quad \mathbf{t}_\rho = \tau_\pi \gamma_{\pi\rho} \quad \text{és} \quad \mathbf{t}_3 = \tau_\pi \kappa_{\pi 3}$$

képletek értelmezik.

Legyen $\overset{\circ}{t}_\rho = n_\pi \overset{\circ}{t}_{\pi\rho}$ és $\overset{\circ}{\mu} = n_\nu \overset{\circ}{\mu}_{\nu 3}$. Legyen továbbá

$$(2.35) \quad \hat{\mathcal{F}}_\rho(s) = \int_{P_t}^s [\hat{t}_\rho(\sigma) - \overset{\circ}{t}_\rho(\sigma)] d\sigma , \quad s \in \mathcal{L}_t .$$

és

$$(2.36) \quad \hat{\mathcal{H}} = \int_{P_t}^s [\hat{\mu}(\sigma) - \overset{\circ}{\mu}(\sigma) + n_\rho \hat{\mathcal{F}}_\rho] d\sigma , \quad s \in \mathcal{L}_t .$$

Vegyük észre, hogy mindkét mennyiség számítható, ha ismerjük az \mathcal{L}_t íven a \hat{t}_ρ erőfeszítést és $\hat{\mu}$ erőpárfeszítést.

Az

$$(2.37) \quad \mathcal{F}_\rho(s) = \hat{\mathcal{F}}_\rho(s) + C_\rho , \quad s \in \mathcal{L}_t$$

egyenlet az \mathcal{F}_ρ feszültségfüggvényre előírt peremfeltétel, amelyben a C_ρ integrációs állandó. Kimutatható, hogy a $\mathcal{H}(s)$ feszültségfüggvénnyel kapcsolatos peremfeltétel pedig

$$(2.38) \quad \mathcal{H}(s) = \hat{\mathcal{H}}(s) + C - \varepsilon_{3\kappa\rho} [x_\kappa(s) - x_\kappa(P_t)] C_\rho , \quad s \in \mathcal{L}_t$$

alakú, ahol a C további integrációs állandó. Az integrációs állandók zérusnak választhatók, ha csak egy \mathcal{L}_t ív van.

Legyenek

$$(2.39) \quad \mathbf{t}^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\alpha + \mu)}{4\mu\alpha} \quad \text{és} \quad \mathbf{a} = \frac{(\gamma + \varepsilon)(1 - \nu)}{2\mu}$$

⁵Ezek viszonylag hosszadalmas bemutatását a később ismertetett eredmények jobb áttekinthetősége kedvéért vállaltuk fel. Hozzáteszük, hogy a jelen szakasz eredményei (mind a korábbiak, mind pedig a jelen OTKA kutatás keretében elért eredmények) még nincsenek szakcikkekben publikálva.

új konstansok. Vezessük be a

$$(2.40) \quad \mathfrak{D}_{lk} = \begin{bmatrix} 1 - l^2 \Delta + (l^2 - \mathfrak{a}) \partial_2 \partial_2 & -(l^2 - \mathfrak{a}) \partial_1 \partial_2 & -\partial_2 \\ -(l^2 - \mathfrak{a}) \partial_1 \partial_2 & 1 - l^2 \Delta + (l^2 - \mathfrak{a}) \partial_1 \partial_1 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & -\Delta \end{bmatrix}$$

és

$$(2.41) \quad \mathbf{u}_k = (\mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_2 | \mathcal{H})$$

jelöléseket. Ha elimináljuk a (2.29a), ..., (2.32) egyenletekből a közbülső változókat, azt kapjuk, hogy a keresett \mathbf{u}_k vektor az

$$(2.42) \quad \mathfrak{D}_{ik} \mathbf{u}_k = 0$$

parciális differenciálegyenletnek köteles eleget tenni.

Az

$$(2.43) \quad \mathfrak{D}_{ik} \mathbf{u}_k + \delta(M - Q) e_i(Q) = 0$$

differenciálegyenlet (a \mathfrak{D} felett álló M azt jelenti, hogy az M pont koordinátái szerint deriválunk) teljes síkra vonatkozó

$$\mathbf{u}_k(M, Q) = e_j(Q) \mathfrak{U}_{jk}(M, Q)$$

megoldásában az $\mathfrak{U}_{kj}(M, Q)$ mátrixot *elsőrendű alapmegoldásnak* nevezzük. Meghatároztuk az elsőrendű alapmegoldást:

$$(2.44a) \quad \mathfrak{U}_{\alpha\beta}(M, Q) = \frac{a}{2\pi k^2} \left\{ \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} \ln R + \frac{3}{4} + \mathfrak{a} k^2 \mathcal{E}(kR) \right] - \frac{r_\alpha r_\beta}{R^2} \left[\frac{1}{2} + \mathfrak{a} k^2 \mathcal{D}(kr) \right] \right\},$$

$$(2.44b) \quad \mathfrak{U}_{3\alpha}(M, Q) = -\mathfrak{U}_{\alpha 3}(M, Q) = \frac{a}{2\pi k^2} (-1)^{(\alpha)} r_{3-\alpha} \left(\frac{1}{2} \ln R + \frac{1}{4} \right),$$

$$(2.44c) \quad \mathfrak{U}_{33}(M, Q) = -\frac{a}{2\pi k^2} \left\{ \frac{1}{4} R^2 \ln R - \left(\frac{1}{k^2} + \mathfrak{a} \right) - \mathfrak{a} \ln R \right\}$$

ahol

$$(2.45) \quad \mathcal{E}(z) = (K_1(z) - 1/z) / z \quad \text{és} \quad \mathcal{D}(z) = K_0(z) + 2(K_1(z) - 1/z) / z.$$

Meghatároztuk a (2.34) képletek segítségével az elsőrendű alapmegoldásból adódó $\mathfrak{t}_\kappa(M_o)$ duál feszültségvektort. Az eredményt adó

$$(2.46) \quad \mathfrak{t}_\kappa(M_o) = e_l(Q) \mathfrak{T}_{l\kappa}(M_o, Q)$$

képletben $\mathfrak{T}_{l\kappa}(M_o, Q)$ a másodrendű alapmegoldás. Ez az összefüggés az $e_l = e_l(Q)$ inkompatibilitás hatására ébredő \mathfrak{t}_l duál feszültségek számításának formulája a perem $n_l = n_l(M_o)$ normálisú M_o pontjában. Legyen

$$(2.47) \quad \Phi_{\rho 1} = \frac{1}{2} \left[(1 - 2\nu) - (-1)^{(\rho)} 2 \frac{r_\rho^2}{R^2} \right] + (-1)^{(\rho)} \mathfrak{a} k^2 \left[\left(1 - 4 \frac{r_\rho^2}{R^2} \right) \mathcal{D}(kR) - \frac{r_\rho^2}{R} k K_1(kR) \right],$$

$$(2.48) \quad \Phi_{\rho 2} = \frac{1}{2} \left[(1 - 2\nu) + (-1)^{(\rho)} 2 \frac{r_\rho^2}{R^2} \right] - (-1)^{(\rho)} \mathfrak{a} k^2 \left[\left(1 - 4 \frac{r_\rho^2}{R^2} \right) \mathcal{D}(kR) - \frac{r_\rho^2}{R} k K_1(kR) \right],$$

$$(2.49) \quad \Phi_{3\kappa} = (1 - 2\nu) R^2 \left(\frac{1}{2} \ln R + \frac{1}{4} \right) - \nu \frac{R^2}{2} + \frac{r_{3-\kappa}^2}{2},$$

$$(2.50) \quad \Psi_{\rho\kappa} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{R^2} - (-1)^{(\rho)} 2 \mathfrak{a} k^2 \left(1 - (-1)^{(\rho)} 2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{R^2} \right) \mathcal{D}(kR) + \mathfrak{a} k^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{R} k K_1(kR) \right\} +$$

$$+ (-1)^{(\kappa)} \frac{\mu}{2\alpha} \mathfrak{a} k^2 R k K_1(kR),$$

$$(2.51) \quad \mathcal{K}_{\rho 3} = -\mathfrak{a} k^2 [R^2 \mathcal{E}(kR) - r_\rho^2 \mathcal{D}(kR)],$$

$$(2.52) \quad \Psi_{13} = \Psi_{23} = r_1 r_2 \mathfrak{a} k^2 \mathcal{D}(kR).$$

A fenti képletekkel

$$(2.53) \quad \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)R^2} \times \begin{bmatrix} -n_2r_2\Phi_{11} + n_1r_1\Psi_{11} & n_1r_2\Phi_{12} - n_2r_1\Psi_{12} & \frac{2\mu}{(\gamma+\varepsilon)}(n_2\mathcal{K}_{13} + n_1\Psi_{13}) \\ n_2r_1\Phi_{21} + n_1r_2\Psi_{21} & -n_1r_1\Phi_{22} - n_2r_2\Psi_{22} & -\frac{2\mu}{(\gamma+\varepsilon)}(n_1\mathcal{K}_{23} + n_2\Psi_{23}) \\ n_2\Phi_{31} + \frac{1}{2}n_1r_1r_2 & -n_1\Phi_{32} - \frac{1}{2}n_2r_1r_2 & -\frac{2\mu}{(\gamma+\varepsilon)}\mathbf{a}(n_1r_1 + n_2r_2) \end{bmatrix}.$$

a másodrendű alapmegoldás.

Az elsőrendű alapmegoldás szimmetrikus:

$$(2.54) \quad \mathfrak{U}_{jk}(M, Q) = \mathfrak{U}_{kj}(M, Q) = \mathfrak{U}_{jk}(Q, M) = \mathfrak{U}_{kj}(Q, M)$$

Az első és másodrendű alapmegoldás oszlopai kielégítik a

$$(2.55) \quad \mathfrak{D}_{ik}^Q \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q) = \mathfrak{D}_{ik}^Q \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) = 0, \quad M_o \neq Q$$

alapegyenletet. A másodrendű alapmegoldásra nézve fennáll az

$$(2.56) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M_o, Q) ds_{M_o} = \begin{cases} -\delta_{\kappa\lambda}, & \text{ha } Q \in A_i \\ -\frac{1}{2}\delta_{\kappa\lambda}, & \text{ha } Q = Q_o \in \mathcal{L}_o \\ 0, & \text{ha } Q \notin A_i \end{cases}$$

összefüggés. (A fenti állítások lényegében ugyanazok mint ortotróp testek duál rendszerben vett síkfeladata esetén.)

Vezzük be a $'\mathfrak{D}_{kl} = \mathfrak{D}_{kl}/(\gamma+\varepsilon)$ jelölést. Igazoltuk a

$$(2.57) \quad \int_{A_i} \left[\mathfrak{u}_k ('\mathfrak{D}_{kl} \mathfrak{u}_l^*) - \mathfrak{u}_k^* ('\mathfrak{D}_{kl} \mathfrak{u}_l) \right] dA = \oint_{\mathcal{L}_o} \left[\mathfrak{u}_l^* \mathfrak{t}_l - \mathfrak{u}_l \mathfrak{t}_l^* \right] ds.$$

duál Somigliana identitást. A képlet mindig fennáll, ha az \mathfrak{u}_k^* és \mathfrak{u}_k kellő rendben differenciálható az A_i tartományon; egyéb tekintetben mindkét függvény tetszőleges lehet. \mathfrak{t}_l^* és \mathfrak{t}_l az \mathfrak{u}_k^* és \mathfrak{u}_k -hoz tartozó duál feszültség.

A (2.57) indentitás felhasználásával levezettük belső tartományra a három duál SOMIGLIANA formulát. Az első

$$(2.58a) \quad \mathfrak{u}_k(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q) \mathfrak{t}_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) \mathfrak{u}_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_i$$

duál SOMIGLIANA formula szerint, ha ismerjük az $\mathfrak{u}_l(M_o)$ feszültségfüggvényeket (a duál elmozdulásvektort), valamint a $\mathfrak{t}_l(M_o)$ a duál feszültségvektort az \mathcal{L}_o kontúron, akkor kvadratúrák segítségével számítható az $\mathfrak{u}_k = (\mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_2 | \mathcal{H})$ rugalmas állapot az A tartomány Q belső pontjában.

Az \mathcal{L}_o kontúr egy pontjában vagylagosan írhatók elő az $\mathfrak{u}_l(M_o)$ feszültségfüggvények (a duál elmozdulásvektor), illetve a duál feszültségvektor. A második

$$(2.58b) \quad c_{kl}(Q_o) \mathfrak{u}_l(Q_o) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q_o) \mathfrak{t}_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q_o) \mathfrak{u}_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in \mathcal{L}_o$$

duál SOMIGLIANA formula olyan integrálegyenlet (a direkt módszer integrálegyenlete), amely alkalmas a hiányzó $\mathfrak{u}_l(M_o)$ vagy $\mathfrak{t}_l(M_o)$ meghatározására. Ezek ismeretében pedig alkalmazható az első duál SOMIGLIANA formula. A képletben $c_{\kappa\lambda}(Q_o) = \delta_{\kappa\lambda}/2$ ha sima a peremgörbe a Q_o pontban. Egyébként az érintők által bezárt szögtől függ.

MEGJEGYZÉS: A (2.58b) -ben álló két vonalintegrált CAUCHY féle főértékben kell venni.

A harmadik duál SOMIGLIANA formula

$$(2.58c) \quad 0 = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q) \mathfrak{t}_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) \mathfrak{u}_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_e$$

alakú.

2.3.2. **Eredmények.** Az eredményeket sorszámozva közöljük:

1. Legyen $\mathfrak{s}_K = (t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22})$ $K = 1, \dots, 4$. Legyen továbbá $\mathfrak{m}_\kappa = (\mu_{13}, \mu_{23})$. Levezettük a Q belső pontban az erőfeszültségeket és erőpárfeszültségeket adó

$$(2.59a) \quad \mathfrak{s}_K(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} S_{Kl}(M_o, Q) t_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} D_{Kl}(M_o, Q) u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad K = 1, \dots, 4$$

és

$$(2.59b) \quad \mathfrak{m}_\kappa(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} M_{\kappa l}(M_o, Q) t_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} N_{\kappa l}(M_o, Q) u_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{U}_{\kappa l}(M_o, Q)] t_l(M_o) ds_{M_o} + \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{T}_{\kappa l}(M_o, Q)] u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad \kappa = 1, 2.$$

képleteket. A képletekben álló $S_{Kl}(M_o, Q)$, $D_{Kl}(M_o, Q)$, $M_{\kappa l}(M_o, Q)$ és $N_{\kappa l}(M_o, Q)$ számítását a [11] értekezés C. Függelékben közöljük.

2. Az A_e külső tartományon a koordinátasík \mathcal{L}_o zárt görbén kívül fekvő részét értjük. A végtelen távoli pont feszültségi állapotát az

$$(2.60a) \quad \mathcal{F}_1 = \tilde{u}_1(Q) = \xi_2 t_{11} - \xi_1 t_{12} + c_1(\infty) \quad \text{és} \quad \mathcal{F}_2 = \tilde{u}_2(Q) = \xi_2 t_{21} - \xi_1 t_{22} + c_2(\infty)$$

továbbá a

$$(2.60b) \quad \mathcal{H} = \tilde{u}_3(Q) = t_{11}(\infty) \frac{\xi_2^2}{2} - t_{12}(\infty) \xi_1 \xi_2 + t_{22}(\infty) \frac{\xi_1^2}{2} + c_1(\infty) \xi_2 - c_2(\infty) \xi_1$$

feszültségfüggvények írják le. Ezek egyben a teljes síkon és annak bármely részén rugalmas állapotot jelentenek. (A végtelen távoli pontban szimmetrikus az erőfeszültségek tenzora és zérus értékűek az erőpárfeszültségek.)

3. Igazoltuk, hogy *külső tartományra*

$$(2.61a) \quad u_k(Q) = \tilde{u}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q) t_\lambda(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_e$$

és

$$(2.61b) \quad c_{kl}(Q_o) u_l(Q_o) = \tilde{u}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q_o) t_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q_o) u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q = Q_o \in \mathcal{L}_o$$

továbbá

$$(2.61c) \quad 0 = \tilde{u}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{kl}(M_o, Q) t_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{kl}(M_o, Q) u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad Q \in A_i$$

alakú a három duál Somigliana formula.

4. Külső tartomány esetén a belső pontbeli erőfeszültségek az

$$(2.62) \quad \mathfrak{s}_K(Q) = \mathfrak{s}_K(\infty) + \oint_{\mathcal{L}_o} S_{Kl}(M_o, Q) t_l(M_o) ds_{M_o} - \oint_{\mathcal{L}_o} D_{Kl}(M_o, Q) u_l(M_o) ds_{M_o}, \quad K = 1, \dots, 4$$

összefüggésből számíthatók. (Az erőpárfeszültségek képlete nem változik, mivel zérus az erőpárfeszültség a végtelen távoli pontban.)

5. A peremen ismert az $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ normális, ismeretesek továbbá a megoldásból az \mathcal{F}_x , \mathcal{F}_y és \mathcal{H} elsőrendű feszültségfüggvények, valamint a duál feszültségvektor t_x , t_y és t_z elemei. Megmutattuk, hogy a peremmenti t_{xx} , t_{xy} , t_{yx} és t_{yy} erőfeszültségek, valamint a μ_{xz} és μ_{yz} erőpárfeszültségek a

$$(2.63) \quad \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \\ -n_y \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\nu}{2\mu} \right) & n_x \left(\frac{1}{4\mu} - \frac{1}{4\alpha} \right) & n_x \left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\alpha} \right) & n_y \frac{\nu}{2\mu} & 0 & 0 \\ -n_x \frac{\nu}{2\mu} & -n_y \left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\alpha} \right) & -n_y \left(\frac{1}{4\mu} - \frac{1}{4\alpha} \right) & n_x \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\nu}{2\mu} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma+\varepsilon} n_y & \frac{1}{\gamma+\varepsilon} n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{yx} \\ t_{yy} \\ \mu_{xz} \\ \mu_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathcal{F}_x}{ds} \\ \frac{d\mathcal{F}_y}{ds} \\ \frac{d\mathcal{H}}{ds} - n_x \mathcal{F}_x - n_y \mathcal{F}_y \\ t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}.$$

megoldásaként adódnak.

6. Megoldási algoritmust dolgoztunk ki és program készült Fortran 90 nyelven. A program belövése jelenleg folyik.

2.3.3. *Publikációk.* Az eredményeket belső tartományra a [11] értekezés, valamint a belső tartományokkal kapcsolatos eredményeket bemutató a [12] előadás, illetve a külső tartományokkal kapcsolatos eredményekre vonatkozó a [13] előadás említhető. Rangos folyóiratban történő közlés csak eredményes futtatások után lehetséges.

2.3.4. *Kiegészítő megjegyzés.* A fenti azaz a 2.3. szakaszban bemutatott vizsgálatok nem tervezett vizsgálatok, amelyek azonban szorosan kötődnek az ortotrop testek duál rendszerben tekintett síkfeladataival kapcsolatos vizsgálatokhoz.

2.4. Peremkontúr módszer duál rendszerben többszörösen összefüggő tartományra.

2.4.1. *A feladat pontos megfogalmazása.* A peremkontúr módszert primál rendszerben különböző rugalmasságtani feladatokra S. Mukherjee és szerzőtársai dolgozták ki.⁶ Duál rendszerben síkfeladatokra és izotrop testre a lkalmasságtani és kvadratikus alakfüggvények megkonstruálásával (a módszernek ezen függvények megválasztása lényegi lépése) Szirbik dolgozta ki a módszert⁷. A cél az eredmények kiterjesztése többszörösen összefüggő tartományra. Részletezve: duál rendszerben, ha a tartomány többszörösen összefüggő vagy, ha egy zárt peremgömbön legalább két terhelte peremív lehetséges fel (ezeket olyan peremívek választják el, amelyeken elmozdulásmező az előírt), akkor a direkt módszer integrálegyenlete mellett teljesíteni kell az ún. kiegészítő (egy-egy terhelte peremívre vonatkozó) és nagybani (egy-egy teljes terhelte zárt peremgömbre vonatkozó) kompatibilitási feltételeket. A kérdés az, hogy hogyan építhetők be ezek a feltételek a numerikus megoldás algoritmusába. A vizsgálatok analitikus megfontolásokat igényelnek annak érdekében, hogy megőrizzük a peremkontúr módszer azon előnyét, hogy nem kell numerikusan integrálni a peremelemek felett.

2.4.2. *A feladat egyenletei.* A jelölésrendszer megegyezik a 2.2. szakaszban alkalmazott jelölésrendszerrel. Ami pedig az egyenleteket illeti, azok a Hook törvénytől és az alapmegoldások matematikai alakjától eltekintve ugyancsak megegyeznek a 2.2. szakasz egyenleteivel. Tegyük fel, hogy belső tartomány a vizsgálatok tárgya.

Legyen zárt görbe az \mathcal{L}_{ti} peremgömbre – egyszeresen összefüggő tartomány esetén $i = 0$ és ez az egyetlen peremgömbre. Ha a görbe mentén terhelés előírt (az i -t megelőző t erre utal – tractions), akkor fenn kell állnia a

$$(2.64) \quad \int_{\mathcal{L}_{ti}} n_\rho [\epsilon_{\rho\pi 3} e_{\pi\lambda} - \delta_{\rho\lambda} \varphi_3] ds = 0$$

nagybani kompatibilitási feltételnek. Tekintsük az előzőtől különböző \mathcal{L}_j peremgömbre (a tartomány többszörösen összefüggőnek tekintett) \mathcal{L}_{tjk} ívét (ezen is terhelés az előírt). A szakasz kezdő és végpontját $P_{tjk,1}$ és $P_{tjk,2}$ jelöli. Az ilyen íveken teljesülnie kell a

$$(2.65) \quad \int_{\mathcal{L}_{ti}} n_\rho [\epsilon_{\rho\pi 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_{\rho\lambda} \varphi_3] ds - \hat{u}_\lambda |_{P_{tjk,1}}^{P_{tjk,2}} = 0 \quad i = 1, 3,$$

kiegészítő kompatibilitási feltételnek. A macro (kiegészítő és nagybani) kompatibilitási feltételek száma megegyezik a feszültségfüggvényekkel kapcsolatos a (2.8) peremfeltételekben álló C_ρ integrációs állandók számával. (Kimutatható, hogy a kompatibilitás makró feltételei nem függetlenek, egy elhagyható, és az integrációs állandók közül is egy zérusnak választható. Ez azt jelenti, hogy annyi egyenlet áll rendelkezésre, amennyi az állandók száma.) Egy többszörösen összefüggő tartományon tekintett peremértékfeladat feladat megoldása feltételezi ezen integrációs állandók ismeretét.

2.4.3. *Eredmények.* Az eredményeket sorszámozzuk.

1. Meghatároztuk analitikusan a duál alapegyenletet (a duál mezőegyenleteket), kielégítő

$$(2.66) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_1^T &= [1 & 0 & 0] , & \mathbf{u}_6^T &= [0 & 0 & 1] , \\ \mathbf{u}_2^T &= [\eta_1 & -\eta_2 & 0] , & \mathbf{u}_7^T &= [-2\eta_1\eta_2 & \eta_2^2 & k\eta_2] , \\ \mathbf{u}_3^T &= [\eta_2 & 0 & 0] , & \mathbf{u}_8^T &= [\eta_1^2 & -2\eta_1\eta_2 & k\eta_1] , \\ \mathbf{u}_4^T &= [0 & 1 & 0] , & \mathbf{u}_9^T &= [\eta_2^2 & 0 & k\eta_1] , \\ \mathbf{u}_5^T &= [0 & \eta_1 & 0] , & \mathbf{u}_{10}^T &= [0 & \eta_1^2 & k\eta_2] , \end{aligned}$$

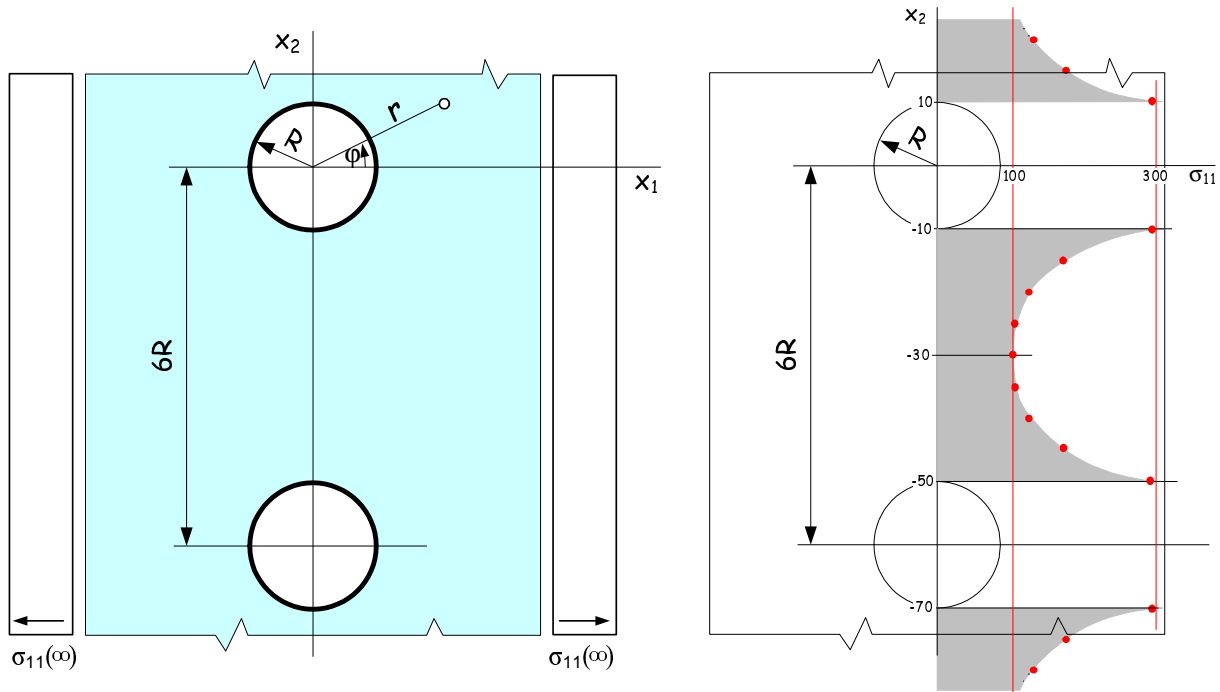
feszültségfüggvényekhez és forgáshoz (az első 6 lineáris a teljes 10 lineáris és kvadratikus közelítést tesz lehetővé a peremelemek) az elmozdulásokat a peremen (peremíveken) (10 egymástól különböző függvény). Ezek birtokában zárt struktúrában írhatók fel a megoldandó egyenletrendszer kiegészítő makró kompatibilitási feltételek. Ily módon biztosítottuk, hogy az ismeretlenség és egyenletszám azonos legyen.

⁶A. Nagarjan, E. D. Lutz, and S. Mukherjee: A novel boundary element method for linear elasticity with no numerical integration for two dimensional and line integrals for three-dimensional problems. *Journal of Applied Mechanics*, **264**(61), (1994), 264–269.

⁷G. Szeidl and S. Szirbik. *Selected Topics in Boundary Integral Formulations for Solids and Fluids: Boundary Contour Method for Plane Problems in a Dual Formulation with Quadratic Shape Functions*, chapter 14. Springer, Wien New York, 2002.

2. Módosítottuk és kiegészítettük a megoldás algoritmusát. A nehézséget az okozza, hogy peremelemenként kell a vonatkozó egyenleteket összeilleszteni. Program készült Fortran 90 forrásnyelven, és több tesztfeladatot oldottunk meg.

2.4.4. *Példa.* Numerikus példaként két darab $R = 10$ mm sugarú körkivágással gyengített külső tartomány esetét oldottuk, melyet $\sigma_{11}(\infty) = 100$ [MPa], $\tau_{12}(\infty) = \tau_{21}(\infty) = \sigma_{22}(\infty) = 0$ módon terhelünk. $\mu = 8 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0.3$. A számítási eredmények közül az x_2 tengelymenti σ_{11} feszültségeloszlást mutatja be az ábra:



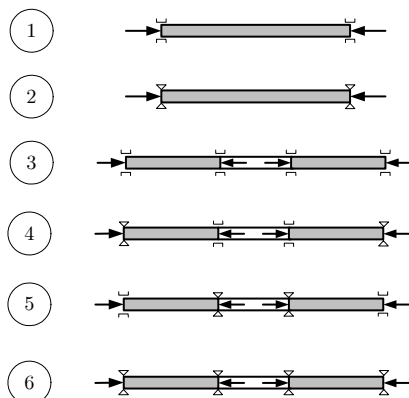
A numerikus eredmények jó egyezésben vannak irodalmi eredményekkel

2.4.5. *Publikációk.* Lineáris alakfüggvények alkalmazásáról a [14] előadás, kvadratikus alakfüggvényekkel történő megoldásról a [15] előadás tájékoztat. A kettőt összegező [15] cikk a JCAM 2008 tavaszi füzetében jelenik meg.

2.4.6. *Kiegészítő megjegyzés.* A fenti az az a 2.4. szakaszban bemutatott vizsgálatok nem tervezett vizsgálatok, amelyek azonban szorosan kötődnek az ortotrop testek duál rendszerben tekintett síkfeladataival kapcsolatos vizsgálatokhoz.

3. KUTATÁSI PROGRAM HARMADIK TÉMAKÖR

A kutatási program vonatkozó szakasza – idézet az aláírt szerződésből. A terhelés hatására megváltozik a szerkezeti elemek rezgéseinek frekvenciaspektruma. Kör illetve körgyűrűalakú lemezek a terhelés frekvenciaspektrumra gyakorolt hatásának vizsgálatát terveztük a kutatási programban (a peremelemmódszerrel történő vizsgálatokat nem terveztük).



3. ábra. A vizsgált lemezek és támaszelrendezések

A vizsgálatok alapötlete Bickley cikkéből ered⁸ Emellett elsősorban Chen és szerzőtársai dolgozatai említhetők (a lábjegyzet egyet idéz⁹, amelyek megoldási eljárása különbözik az ittenitől. A kérdéses összefüggés linearitását meglepő módon Chen és szerzőtársai sem vették észre.

3.1. A kör és körgyűrűalakú lemezek esetén megoldandó feladat. A Kirchoff-féle lemezelmélet keretei között az ábrán vázolt saját síkjában konstans sugárirányú permterhelésnek kitett (körgyűrűalakú lemez esetén mind a belső, mind pedig a külső peremen azonos a sugárirányú terhelés sűrűsége) lemezek esetén meg kívánjuk határozni a feladatok ún. Green függvényeit és ezek birtokában a terhelés hatását a frekvenciaspektrumra tengelyszimmetrikus viszonyok feltételezése mellett.

3.1.1. A feladat egyenletei. A vizsgálatokat az (R, φ, z) hengerkoordináta-rendszerben végezzük: R a sugár, φ a polárszög, a z tengely pedig merőleges a lemez középsíkjára. Legyen $2b$ a lemez vastagsága, f sugárirányú nyomás a középsíkban, $I_1 = 8b^3/12$ a tehetetlenségi nyomaték, E a rugalmassági modulus, E_1 -et az $E_1 = E/(1-\nu^2)$ összefüggés értelmezi, J_n, Y_n ($n = 0,1,2$) Bessel függvények, $p_z(R)$ a z irányú terhelés M_R, Q_R élnyomaték és élerő, R_K és R_B a lemez külső belső sugara, $w(R) = w(\rho)$ a z irányú elmozdulás, $\tilde{\Delta} = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$ differenciáloperátor, ν a Poisson tényező, $\rho = R/R_K$ és $\rho_b = R_B/R_K$ dimenziómentes változó, illetve belső sugár, $\mathcal{F} = R_K^2 \frac{f}{I_1 E_1}$ pedig dimenziómentes terhelés a lemez síkjában.

Tengelyszimmetrikus viszonyok között

$$(3.1) \quad \tilde{\Delta} \tilde{\Delta} w + \mathcal{F} \tilde{\Delta} w = \frac{R_K^4}{I_1 E_1} p_z$$

alakú a megoldandó differenciaegyenlet. A (3.1) differenciál-egyenlethez befogott perem esetén a

$$(3.2a) \quad w|_{\rho=1(\text{ vagy } \rho=\rho_o)} = 0 \quad (\text{zérus az elmozdulás}),$$

$$(3.2b) \quad \left. \frac{dw}{d\rho} \right|_{\rho=1(\text{ vagy } \rho=\rho_o)} = 0 \quad (\text{zérus az szögelfordulás})$$

peremfeltételek, görgővel alátámasztott perem esetén pedig a

$$(3.3a) \quad w|_{\rho=1(\text{ vagy } \rho=\rho_o)} = 0 \quad (\text{zérus az elmozdulás}),$$

$$(3.3b) \quad \left. \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{dw}{d\rho} \right) \right|_{\rho=1(\text{ vagy } \rho=\rho_o)} = 0 \quad (\text{zérus az } M_R \text{ nyomaték})$$

peremfeltételek társulnak. A V_R élerő (nyíróerő) az

$$(3.4) \quad \frac{R_K^3}{I_1 E_1} V_R = \frac{d}{d\rho} \tilde{\Delta} w + \mathcal{F} \frac{dw}{d\rho}$$

összefüggésből adódik.

Tegyük fel, hogy a ξ sugarú körön ($\xi \in [0,1]$ dimenziómentes koordináta) konstans megoszló terhelés működik, és a terhelésnek egységnyi az eredője. Jelölje a fenti terheléshez tartozó lehajlásfüggvényt $G(\rho, \xi)$. Vegyük észre, hogy amint azt az argumentumok kiírása is jelzi, a lehajlásfüggvény nemcsak a ρ -tól hanem az ξ -től is függ. Ez a $G(\rho, \xi)$ függvény az ún. Green függvény.

3.1.2. Eredmények. Az eredményeket most is sorszámozva közöljük:

1. Mind a hat megtámasztási esetre meghatároztuk a vonatkozó peremértékfeladat Green függvényét. Itt példaként csak a 2 és 5 jelű megtámasztások esetére közöljük a Green függvényt adó képleteket.

A 2 jelű megtámasztás esetén

$$(3.5a) \quad G(\rho, \xi) = \frac{1}{2f\pi} \left\{ \ln \xi - \frac{\pi Y_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi) J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho)}{2} - \frac{(1-\nu) \left(J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) - J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi) - J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho) \right)}{\sqrt{\mathcal{F}} \left[(1-\nu) J_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right]} + \right. \\ \left. + \frac{\pi \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi) \left[(1-\nu) Y_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} Y_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right] J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho)}{\sqrt{\mathcal{F}} 2 \left[(1-\nu) J_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right]} \right\}$$

$$\rho < \xi$$

⁸Bickley, W. G.: Deflexions and vibrations of a circular elastic plate under tension, Phil. Mag., S.7., 15(100), (1933), 777-797.

⁹Lien-When Chen, Ji-Liang Dong: Vibrations of an initially stressed transversely isotropic circular thick plate. International Journal of Mechanical Sciences, 26(4), (1984), 253-263.

$$(3.5b) \quad G(\rho, \xi) = \frac{1}{2f\pi} \left\{ \ln \rho - \frac{\pi Y_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho) J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi)}{2} - \frac{(1-\nu) \left(J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) - J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho) - J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi) \right)}{\sqrt{\mathcal{F}} \left[(1-\nu) J_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right]} + \right. \\ \left. + \frac{\pi \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\rho) \left((1-\nu) Y_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} Y_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right) J_0(\sqrt{\mathcal{F}}\xi)}{2\sqrt{\mathcal{F}} \left[(1-\nu) J_1(\sqrt{\mathcal{F}}) - \sqrt{\mathcal{F}} J_0(\sqrt{\mathcal{F}}) \right]} \right\}$$

$\rho > \xi$

alakú a Green függvény.

Vezessük be az egyszerűbb írásmód kedvéért a

$$(3.6a) \quad \begin{aligned} J_{00} &= J_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b), & J_{01} &= J_0(\sqrt{\mathfrak{F}}), \\ Y_{00} &= Y_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b), & Y_{01} &= Y_0(\sqrt{\mathfrak{F}}), \end{aligned}$$

valamint a

$$(3.6b) \quad \begin{aligned} J_{10} &= J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b), & J_{11} &= J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}), \\ Y_{10} &= Y_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b), & Y_{11} &= Y_1(\sqrt{\mathfrak{F}}), \end{aligned}$$

jelöléseket. Legyen továbbá

$$(3.7) \quad G_{N5} = -\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b^2 \ln(\rho_b)(Y_{11}J_{00} - J_{11}Y_{00}) + \rho_b \ln(\rho_b)(Y_{11}J_{10} - J_{11}Y_{10})(1-\nu) + \rho_b^2(Y_{01}J_{00} - J_{01}Y_{00}) \\ + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}}}(Y_{11}J_{00} - J_{11}Y_{00})(1-\nu) + \frac{(1-\nu)}{\sqrt{\mathfrak{F}}}\rho_b(Y_{10}J_{01} - J_{10}Y_{01}) + \frac{4}{\pi\mathfrak{F}}(1-\nu).$$

A bevezetett jelölésekkel az 5 jelű megtámasztásra

$$(3.8a) \quad \begin{aligned} G(\rho, \xi) &= \frac{1}{2\pi f} \frac{1}{G_{N5}} \left\{ (\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b^2 \ln(\xi) \ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{11}J_{00} - J_{11}Y_{00}) - \rho_b \ln(\xi) \ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{11}J_{10} - J_{11}Y_{10})(1-\nu) \right. \\ &+ \frac{\pi}{2}\sqrt{\mathfrak{F}}\rho_b^2 \ln(\rho_b)(Y_{0\rho}J_{00} - J_{0\rho}Y_{00})(Y_{0\xi}J_{11} - J_{0\xi}Y_{11}) - \frac{\pi}{2}\rho_b \ln(\rho_b)(Y_{0\rho}J_{10} - J_{0\rho}Y_{10})(Y_{0\xi}J_{11} - J_{0\xi}Y_{11})(1-\nu) \\ &+ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{\mathfrak{F}}}\rho_b \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{01}J_{10} - J_{01}Y_{10}) - \ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{0\xi}J_{10} - J_{0\xi}Y_{10}) - \ln\left(\frac{\xi}{\rho_b}\right)(Y_{0\rho}J_{10} - J_{0\rho}Y_{10}) \right] \\ &+ \rho_b^2 \left[-\ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{01}J_{00} - J_{01}Y_{00}) + \ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)(Y_{0\xi}J_{00} - J_{0\xi}Y_{00}) + \ln\left(\frac{\xi}{\rho_b}\right)(Y_{0\rho}J_{00} - J_{0\rho}Y_{00}) \right] \\ &+ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{\mathfrak{F}}} \left[\ln(\xi)(Y_{11}J_{00} - J_{11}Y_{00}) + \ln(\xi)(Y_{0\rho}J_{11} - J_{0\rho}Y_{11}) + \ln(\rho)(Y_{0\xi}J_{11} - J_{0\xi}Y_{11}) \right] \\ &+ \frac{1}{\mathfrak{F}}(1-\nu) \left[-(Y_{01}J_{00} - J_{01}Y_{00}) + (Y_{0\xi}J_{00} - J_{0\xi}Y_{00}) + (Y_{0\rho}J_{00} - J_{0\rho}Y_{00}) \right. \\ &- (Y_{0\xi}J_{01} - J_{0\xi}Y_{01}) - (Y_{0\rho}J_{01} - J_{0\rho}Y_{01}) - (Y_{0\xi}J_{0\rho} - J_{0\xi}Y_{0\rho}) \\ &- \frac{\pi}{2} \frac{1-\nu}{\sqrt{\mathfrak{F}}} \left[(Y_{0\rho}J_{00} - J_{0\rho}Y_{00})(Y_{0\xi}J_{11} - J_{0\xi}Y_{11}) - \rho_b(Y_{0\xi}J_{01} - J_{0\xi}Y_{01})(Y_{0\rho}J_{10} - J_{0\rho}Y_{10}) \right] \\ &\left. - \frac{\pi}{2}\rho_b^2(Y_{0\rho}J_{00} - J_{0\rho}Y_{00})(Y_{0\xi}J_{01} - J_{0\xi}Y_{01}) + \frac{2}{\pi\mathfrak{F}} \ln\left(\frac{\xi}{\rho}\right)(1-\nu) \right\} \quad \rho < \xi \end{aligned}$$

(3.8b)

$$\begin{aligned}
G(\rho, \xi) = & \frac{1}{2\pi f} \frac{1}{G_{N5}} \left\{ (\sqrt{\mathfrak{F}} \rho_b^2 \ln(\rho) \ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{11} J_{00} - J_{11} Y_{00}) - \rho_b \ln(\rho) \ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{11} J_{10} - J_{11} Y_{10})(1-\nu) \right. \\
& + \frac{\pi}{2} \sqrt{\mathfrak{F}} \rho_b^2 \ln(\rho_b)(Y_{0\xi} J_{00} - J_{0\xi} Y_{00})(Y_{0\rho} J_{11} - J_{0\rho} Y_{11}) - \frac{\pi}{2} \rho_b \ln(\rho_b)(Y_{0\xi} J_{10} - J_{0\xi} Y_{10})(Y_{0\rho} J_{11} - J_{0\rho} Y_{11})(1-\nu) \\
& + \frac{(1-\nu)}{\sqrt{\mathfrak{F}}} \rho_b \left[\ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{01} J_{10} - J_{01} Y_{10}) - \ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{0\rho} J_{10} - J_{0\rho} Y_{10}) - \ln(\frac{\rho}{\rho_b})(Y_{0\xi} J_{10} - J_{0\xi} Y_{10}) \right] \\
& + \rho_b^2 [-\ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{01} J_{00} - J_{01} Y_{00}) + \ln(\frac{\xi}{\rho_b})(Y_{0\rho} J_{00} - J_{0\rho} Y_{00}) + \ln(\frac{\rho}{\rho_b})(Y_{0\xi} J_{00} - J_{0\xi} Y_{00})] \\
& + \frac{(1-\nu)}{\sqrt{\mathfrak{F}}} [\ln(\rho)(Y_{11} J_{00} - J_{11} Y_{00}) + \ln(\rho)(Y_{0\xi} J_{11} - J_{0\xi} Y_{11}) + \ln(\xi)(Y_{0\rho} J_{11} - J_{0\rho} Y_{11})] \\
& + \frac{1}{\mathfrak{F}} (1-\nu) [-(Y_{01} J_{00} - J_{01} Y_{00}) + (Y_{0\xi} J_{00} - J_{0\xi} Y_{00}) + (Y_{0\rho} J_{00} - J_{0\rho} Y_{00}) \\
& - (Y_{0\xi} J_{01} - J_{0\xi} Y_{01}) - (Y_{0\rho} J_{01} - J_{0\rho} Y_{01}) - (Y_{0\rho} J_{0\xi} - J_{0\rho} Y_{0\xi})] \\
& - \frac{\pi}{2} \frac{1-\nu}{\sqrt{\mathfrak{F}}} [(Y_{0\xi} J_{00} - J_{0\xi} Y_{00})(Y_{0\rho} J_{11} - J_{0\rho} Y_{11}) - \rho_b (Y_{0\rho} J_{01} - J_{0\rho} Y_{01})(Y_{0\xi} J_{10} - J_{0\xi} Y_{10})] \\
& \left. - \frac{\pi}{2} \rho_b^2 (Y_{0\xi} J_{00} - J_{0\xi} Y_{00})(Y_{0\rho} J_{01} - J_{0\rho} Y_{01}) + \frac{2}{\pi \mathfrak{F}} \ln(\frac{\rho}{\xi})(1-\nu) \right\} \quad \rho > \xi
\end{aligned}$$

a Green függvény alakja.

Következik a Green függvény értelmezéséből, hogy a Green függvény ismertetésében a $p_z(\rho)$ terhelés által okozott lehajlás a

$$(3.9) \quad W(\rho) = 2\pi R_k^2 \int_0^1 G(\rho, \xi) p_z(\xi) \xi d\xi$$

képletből számítható.

- Ha rezgéseket végez a saját síkjában terhelt lemez, akkor p_z helyére a tehetetlenségi erőrendszer $-\frac{\gamma}{g}\ddot{w}$ sűrűségvektorát $-\gamma$ a fajsúly és a lemez vastagságának szorzata, g a nehézségi gyorsulás – kell írni a (3.1) differenciálegyenletben. Ily módon kapjuk, hogy

$$(3.10) \quad \tilde{\Delta} \tilde{\Delta} w + \mathcal{F} \tilde{\Delta} w + \frac{R_k^4}{I_1 E_1} \frac{\gamma}{g} \ddot{w} = 0$$

ahol w a hely és idő függvénye. Állóhullám alakú megoldást keresve legyen

$$w = W(R, \varphi) \cos \alpha t = W(x, y) \cos \alpha t,$$

ahol W a rezgésamplitúdó, α pedig a rezgések sajátfrekvenciája. Visszahelyettesítés után a közismert módon adódik a W amplitúdó függvényre vonatkozó

$$(3.11) \quad \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) W + \mathcal{F} W \right] = \frac{R_k^4}{I_1 E_1} \frac{\gamma}{g} \alpha^2 W,$$

differenciál-egyenlet.

Legyen

$$(3.12) \quad \mathcal{A} = \frac{\gamma \alpha^2 R_k^4}{g I_1 E_1} \quad \text{és} \quad y(\rho) = \sqrt{\rho} W(\rho).$$

Legyen továbbá

$$(3.13) \quad \mathcal{G}(\rho, \xi) = 2\pi \sqrt{\rho} \frac{f G(\rho, \xi)}{\mathcal{F}} \sqrt{\xi}.$$

Kimutattuk, hogy az $y(\rho)$ függvény a

$$(3.14) \quad y(\rho) = \mathcal{A} \int_0^1 \mathcal{G}(\rho, \xi) y(\xi) d\xi.$$

homogén Fredholm féle szimmetrikus magú integrálegyenletnek köteles eleget tenni. A fenti homogén integrálegyenlet \mathcal{A} sajátértékei az \mathcal{F} függvényei. A homogén Fredholm féle szimmetrikus magú integrálegyenlettel meghatározott sajátértékfeladatot a numerikus megoldás érdekében algebrai sajátértékfeladatra vezettük vissza. Program készült Fortran 90 forrásnyelven. Numerikus megoldásra az 1, 2, 3 és 6 megtámasztások estén került eddig sor. Az 5 és 6 jelű esetekben a megoldás a ρ_b -nek is függvénye. Ezért itt csak az első két esetre

és az utolsó esetre vonatkozó megoldást közöljük. A képletekben \mathcal{F}_1 mindig ez első kritikus terheléshez, \mathcal{A}_1 pedig az első sajátfrekvencia négyzetéhez tartozik.

Az 1 jelű megtámasztás. A numerikus eredmények szerint

$$(3.15) \quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = 0.9998 - 0.9712 \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1} - 0.0285 \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1} \right)^2 \simeq 1.000 - 1.000 \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1}, \quad \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_1.$$

A 2 jelű megtámasztás esetén pedig

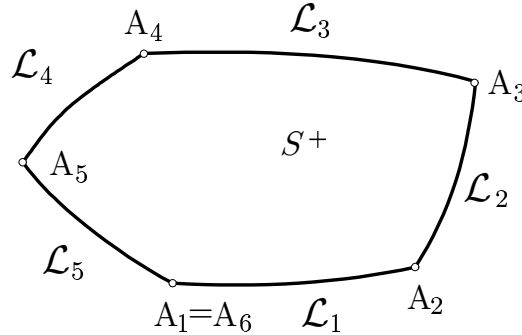
$$(3.16) \quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = 1.000 - 1.000 \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1}, \quad \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_1.$$

A kapott függvények első esetben jó közelítéssel, a második esetben pontosan egyenest adnak. Az 5 jelű megtámasztásnál közelítőleg lineáris a vonatkozó függvény a benne szereplő paraméterek azonban ρ_b függvényei. A 6 jelű megtámasztás estén az eredmény megegyezik a (3.16) képlettel. Itt a ρ_b -től való függés csak az \mathcal{A}_1 és \mathcal{F}_1 -en keresztül jelenik meg.

3.1.3. Publikációk. Az eredményeket az 1, 2, 3 és 6 jelű esetre a [17] konferenciaelőadás tartalmazza, ami megjelent CD-n teljes terjedelemben. Magyar nyelvű cikk a Gép című folyóiratban az első két esetre közli az eredményeket [18].

3.1.4. Kiegészítő megjegyzés. A fenti azaz a 3.1. szakaszban bemutatott vizsgálatok mind tervezett vizsgálatok.

3.2. A direkt módszer integrálegyenletei saját síkjában terhelt lemezre. Ha konstans a lemez saját síkjában működő terhelésből a feszültségi állapot, akkor peremelem módszer is kidolgozható a terhelés (ezt továbbra is egyparaméteresnek vesszük) és a sajátrezgések közötti kapcsolat tisztázására. Ezen megközelítésnek az az előnye, hogy a kapott kettős integrálegyenlet független a tekintett tartomány alakjától és nem kikötés a tengelyszimmetria, ha kör, illetve körgyűrűalakú lemez a vizsgálat tárgya. Az $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5$ görbe az S^+ tartomány kontúrja. Az n a töréspontok száma a peremen (most 5).



4. ábra. A vizsgált nem sima peremű tartománya

Az egyenleteket részben az (x_1, x_2) síkbeli görbevonalú koordinátarendszerben vegyes indexes írásmódban, illetve konkrét esetekben a síkbeli kartézusi (x, y) koordinátarendszerben tekintjük. A kovariáns deriválást két rövid párhuzamos egyenes után álló indexkettős jelöli. A 3 jelű koordináta egybeesik a z koordinátával. $w = w_3$ a középfelület elmozdulása, $g^{\alpha\beta}$ a kontravariáns metrikus tenzor, $M^{\alpha\beta}$ az élyomatékok tenzora, $b_{\alpha\beta} = w_3 |_{|\alpha\beta}$ a görbületi tenzor, $N^{\alpha\beta} = -f g^{\alpha\beta}$ a síkbeli élerők tenzora, $b^3 = p_z$ a lemez középsíkjára merőleges teher, n_α a külső normális, t_β az érintőirányú egységvektor (ebben a szakaszban tehát nem feszültségvektor). A bevezetett jelölésekkel

$$(3.17) \quad M^{\alpha\beta} = -I_1 E_1 \left(\nu g^{\alpha\lambda} g^{\mu\gamma} + \frac{1-\nu}{2} [g^{\alpha\mu} g^{\lambda\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\lambda\mu}] \right) w_3 |_{|\mu\gamma} = -I_1 E_1 g^{\alpha\lambda\mu\gamma} w_3 |_{|\mu\gamma}$$

az anyagegyenlet homogén izotróp testre. Az

$$(3.18) \quad M^{\alpha\beta} |_{|\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + b^3 = 0$$

differenciálegyenlet a statikai feladat differenciálegyenlete, amelyet természetesen ki kell egészíteni az anyag-egyenlettel és a peremfeltételekkel.

3.3. Eredmények. Az eredményeket ismét sorszámozva közöljük:

1. Legyen u_3 legalább négyszer folytonosan deriválható skalármű az S^+ tartományon. Igazoltuk, hogy

$$(3.19) \quad \int_{S^+} \left(M_{\|\alpha\beta}^{\alpha\beta} - f g^{\alpha\beta} w_{3\|\alpha\beta} \right) u_3 dA = \\ = I_1 E_1 \int_{S^+} u_{3\|\alpha\beta} g^{\alpha\beta\mu\gamma} w_{3\|\mu\gamma} dA + f \int_{S^+} g^{\alpha\beta} w_{3\|\alpha} u_{3\|\beta} dA + \\ + \oint_{\mathcal{L}} \left[n_\beta M_{\|\alpha}^{\beta\alpha} + \frac{d}{ds} (n_\alpha M^{\alpha\beta} t_\beta) - f n_\beta g^{\beta\alpha} w_{3\|\alpha} \right] u_3 ds - \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta \frac{du_3}{dn} ds - \sum_{i=1}^n n_\alpha M^{\alpha\beta} t_\beta u_3 \Big|_i^{i+1}.$$

A fenti képlet következménye a saját síkjában terhelt lemezzel kapcsolatos SOMIGLIANA identitás (a 3 indexet mindenütt elhagytuk):

$$(3.20) \quad \int_A \left(M_{\|\alpha\beta}^{\alpha\beta}(w) - f g^{\alpha\beta} w_{\|\alpha\beta} \right) u dA - \int_A \left(M_{\|\alpha\beta}^{\alpha\beta}(u) - f g^{\alpha\beta} u_{\|\alpha\beta} \right) w dA = \\ = \oint_{\mathcal{L}} \left[n_\beta M_{\|\alpha}^{\beta\alpha}(w) + \frac{d}{ds} (n_\alpha M^{\alpha\beta}(w) t_\beta) - f n_\beta g^{\beta\alpha} w_{\|\alpha} \right] u ds - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_\beta M_{\|\alpha}^{\beta\alpha}(u) + \frac{d}{ds} (n_\alpha M^{\alpha\beta}(u) t_\beta) - f n_\beta g^{\beta\alpha} u_{\|\alpha} \right] w ds - \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_\alpha M^{\alpha\beta}(w) n_\beta \frac{du}{dn} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_\alpha M^{\alpha\beta}(u) n_\beta \frac{dw}{dn} ds - \\ - \sum_{i=1}^n n_\alpha M^{\alpha\beta}(w) t_\beta u \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_\alpha M^{\alpha\beta}(u) t_\beta w \Big|_i^{i+1}.$$

2. Kartéziuszi koordinátarendszerben az

$$I_1 E_1 \Delta \Delta w_3 + f \Delta w_3 = b_3$$

alakban írható fel a (3.18) egyenlet. A

$$(3.21) \quad I_1 E_1 \Delta \Delta U_0(M, Q) + f \Delta U_0(M, Q) = \delta(M - Q)$$

differenciálegyenlet megoldását alapmegoldásnak nevezzük. Legyen

$$(3.22) \quad k = \sqrt{\frac{f}{I_1 E_1}}.$$

Ezzel a jelöléssel

$$(3.23) \quad U_0(M, Q) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln r - \frac{1}{4} Y_0(kr) \right)$$

a nulladik alapmegoldás, ahol az r a két pont távolsága (korábban is így jelöltük), $Y_0(kr)$ pedig Bessel függvény. Legyen $\nu_\kappa(Q)$ a Q pontbeli ds vonalelem normálisa. A Q -ból az M pontba mutató r_{QM} vektor koordinátáit pedig jelölje rendre $r_x = r_1$ és $r_y = r_2$. A

$$(3.24) \quad U_1(M, Q) = \nu_\kappa \nabla_\kappa U_0(M, Q) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{\pi kr} + \frac{1}{2} Y_1(kr) \right) \frac{dr}{dv}$$

skalár az ún első alapmegoldás (fizikailag szögelfordulás).

3. Legyen belső pont a Q . Ha u_3 helyére $U_0(M, Q)$ -t gondolunk és kizárjuk a tartományból a Q pont ε sugarú környezetét, akkor az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenet után megkapjuk az első Somigliana képletkettős közül az első:

$$(3.25) \quad w(Q) = \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (w(M_o)) + \frac{d}{ds} [n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) t_{\beta}] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{\parallel\beta}(M_o) \right\} U_0(M_o, Q) ds_{M_o} - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (U_0(M_o, Q)) + \frac{d}{ds} (n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q)) t_{\beta}) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} U_{0\parallel\beta}(M_o, Q) \right] w(M_o) ds_{M_o} \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) n_{\beta} \frac{\partial U_0(M_o, Q)}{\partial n} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q)) n_{\beta} \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} ds_{M_o} - \\ - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w) t_{\beta} U_0(M_o, Q) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q)) t_{\beta} w \Big|_i^{i+1} + \int_{S^+} U_0(M, Q) p_z(M) dS_M \quad Q \in S^+$$

Megjegyezzük, hogy a négy késsel szedett mennyiség közül kettő ismert a peremfeltételekből. Ha másodsorra u_3 helyére $U_1(M, Q)$ -t, és $w(M_o)$ helyére a $w(M_o) - w(Q)$ különbséget gondoljuk (ez megengedett, mert $w(Q)$ deriváltjai eltűnnek), akkor a fenti képletre vezető gondolatmenettel az első Somigliana képletkettős közül megkapjuk a másodikat:

$$(3.26) \quad \frac{\partial w(Q)}{\partial \nu} = \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (w(M_o)) + \frac{d}{ds} [n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) t_{\beta}] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{\parallel\beta}(M_o) \right\} U_1(M_o, Q) ds_{M_o} - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (U_1(M_o, Q)) + \frac{d}{ds} (n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q)) t_{\beta}) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} U_{1\parallel\beta}(M_o, Q) \right] (w(M_o) - w(Q)) ds_{M_o} \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) n_{\beta} \frac{\partial U_1(M_o, Q)}{\partial n} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q)) n_{\beta} \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} ds_{M_o} - \\ - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w) t_{\beta} U_1(M_o, Q) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q)) t_{\beta} (w(M_o) - w(Q)) \Big|_i^{i+1} + \\ + \int_{S^+} U_1(M, Q) p_z(M) dS_M \quad Q \in S^+$$

4. Legyen sima perempont a $Q = Q_o$. Kimutatható, hogy fennáll a második duál SOMIGLIANA képletkettős. Az első egyenlet

$$(3.27) \quad \frac{w(Q)}{2} = \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (w(M_o)) + \frac{d}{ds} [n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) t_{\beta}] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{\parallel\beta}(M_o) \right\} U_0(M_o, Q_o) ds_{M_o} - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (U_0(M_o, Q_o)) + \frac{d}{ds} (n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q_o)) t_{\beta}) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} U_{0\parallel\beta}(M_o, Q_o) \right] w(M_o) ds_{M_o} \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) n_{\beta} \frac{\partial U_0(M_o, Q_o)}{\partial n} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q_o)) n_{\beta} \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} ds_{M_o} - \\ - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w) t_{\beta} U_0(M_o, Q_o) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_0(M_o, Q_o)) t_{\beta} w \Big|_i^{i+1} + \int_{S^+} U_0(M, Q_o) p_z(M) dS_M \quad Q_o \in \mathcal{L}$$

alakú. Megjegyezzük, hogy a négy késsel szedett mennyiség közül kettő ismert a peremfeltételekből. Ha másodsorra u_3 helyére $U_1(M, Q)$ -t, és helyére a $w(M_o) - w(Q_o)$ különbséget gondoljuk, akkor a fenti képletre vezető gondolatmenettel az első Somigliana képletkettős közül megkapjuk a másodikat:

$$(3.28) \quad \frac{\partial w(Q)}{\partial \nu} = \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (w(M_o)) + \frac{d}{ds} [n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) t_{\beta}] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{\parallel\beta}(M_o) \right\} U_1(M_o, Q_o) ds_{M_o} - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} (U_1(M_o, Q_o)) + \frac{d}{ds} (n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q_o)) t_{\beta}) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} U_{1\parallel\beta}(M_o, Q_o) \right] (w(M_o) - w(Q_o)) ds_{M_o} \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w(M_o)) n_{\beta} \frac{\partial U_1(M_o, Q_o)}{\partial n} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q_o)) n_{\beta} \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} ds_{M_o} - \\ - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (w) t_{\beta} U_1(M_o, Q_o) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta} (U_1(M_o, Q_o)) t_{\beta} (w(M_o) - w(Q_o)) \Big|_i^{i+1} + \\ + \int_{S^+} U_1(M, Q_o) p_z(M) dS_M \quad Q \in S^+$$

Mivel a peremen a peremfeltételekből a

$$\begin{aligned} & w(M_o) \\ & \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} \\ M_n(Q_o) &= n_\alpha M^{\alpha\beta}(w(M_o)) n_\beta \\ V_n(Q_o) &= n_\alpha M^{\alpha\beta}_{||\beta}(w(M_o)) + \frac{d}{ds} [n_\alpha M^{\alpha\beta}(w(M_o)) t_\beta] - f n_\alpha g^{\alpha\beta} w_{||\beta}(M_o) \end{aligned}$$

négyesből csak kettő ismert a (3.27) és (3.28) integrálegyenlet kettős alkalmas a peremen hiányzó mennyiségek meghatározására. Ha mind a négy mennyiség ismert a peremen, akkor a w elmozdulásmező a (3.25) egyenletből számítható.

5. Ha rezgő lemezt tételezve fel w helyére $W(x, y) \sin \alpha t$ -t, p_z helyére pedig a tehetetlenségi erőrendszer sűrűségét írjuk, akkor a (3.27) és (3.28) integrálegyenlet kettőséből megkapjuk azt a sajátértékfeladatot, amely alkalmas az f paraméter rezgésekre gyakorolt hatásának tisztázására.

3.3.1. *Publikációk.* Az eddigi eredményeket a [19] és [20] konferenciaelőadásban mutattuk be. A megoldási algoritmus kidolgozása és a numerikus implementáció azonban még sok munkát igényel.

3.3.2. *Kiegészítő megjegyzés.* A fenti azaz a 3.2. szakaszban bemutatott vizsgálatok nem tervezett vizsgálatok.

4. KUTATÁSI PROGRAM HARMADIK TÉMAKÖR

Idézet a kutatási program vonatkozó szakaszából – az aláírt szerződésből. A lehetőségekkel összhangban tervezzük mikropoláris anyagú héjak esetén a lineáris héjelméletek egyenleteinek előállítását a háromméretű feladat egyenleteinek alkalmas sorfejtésével.

4.0.3. *Eredmények.* Ezek a vizsgálatok csak kezdeti állapotban vannak. Ennek egyrészt a nem tervezett, de a tervezetthez szorosan kötődő és eredményeket felmutató vizsgálatok munkaigénye, másrészt a témakör feltételes volta (a lehetőségekkel összhangban kifejezésre utalunk) az oka.

HIVATKOZÁSOK

1. KOZÁK, I.: Tensors of finite rotations and small strains on the middle surface of a shells, Journal of Computational and Applied Mechanics, **6**(2), (2005), 257-276.
2. KOZÁK, I.: Geometriailag nemlineáris héjelmélet véges forgásmező és kis alakváltozásmező esetére, Előadás a X. Magyar Mechanikai Konferencián, Miskolc, 2007.08. 27-29, Az előadások rövid összefoglalói, 57.o.
3. GYÖRGY SZEIDL, DUDRA JUDIT: BEM formulation for plane orthotropic bodies – a modification for exterior regions and its proof, Periodica Polytechnica, Vol. 51, Number 2., (2007), pp. 1-13.
4. G. SZEIDL, J. DUDRA: Boundary Integral Equations for Plane Orthotropic Bodies and Exterior Regions, 6th European Solid Mechanics Conference ESMC2006, 28 August – September 1, 2006, Budapest, Hungary.
5. G. SZEIDL, J. DUDRA: Boundary Integral Equations for Plane Orthotropic Bodies – a Modification for Exterior Regions, Electronic Journal of Boundary Elements (közlésre leadott cikk), 2007.
6. JUDIT DUDRA, GYÖRGY SZEIDL: Fundamental solutions and dual Somigliana relations for inner regions and an orthotropic body, microCAD 2005, International Scientific Conference, Section G: Applied Mechanics. Modern Numerical Methods, University of Miskolc, Hungary, pp. 31-36.
7. György Szeidl, Judit Dudra: Boundary integral equations for plane orthotropic bodies - novel formulation for exterior region, microCAD 2006, International Scientific Conference, Section G: Applied Mechanics, University of Miskolc, Hungary, pp. 13-18.
8. György Szeidl: BEM formulations for plane orthotropic bodies and exterior regions. COMAT 2006, Advanced Composite Materials Engineering, Transilvania University of Brasov, Romania, CD, ISBN 973-635-821-8, ISBN 978-635-821-0.
9. György Szeidl, Judit Dudra: Boundary integral equations for plane orthotropic bodies in a dual formulation. COMEC 2007, Computational Mechanics and Virtual Engineering, Brasov, Romania.
10. Dudra Judit: Alapmegoldások duál rendszerbeli síkfeladatokra ortotróp test esetén, Miskolci Egyetem – GÉP folyóirat, LVI. évfolyam, Vol. 2005/5-6, pp. 21-27.
11. DUDRA JUDIT: Peremelem módszer ortotróp testekre és a mikropoláris rugalmasságtan síkfeladataira duál és primál rendszerben, Ph.D. értekezés, Munkahelyi vita 2008. január 31., A munkahelyi vitára benyújtott szöveg letölthető a http://www.siphd.uni-miskolc.hu/hirek/munkahelyi_vitak.php3?54 url címről.
12. GYÖRGY SZEIDL, JUDIT DUDRA: Integral equations in the dual system of micropolar elasticity for the first plane problem., microCAD 2007, International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics, University of Miskolc, Hungary, pp. 1-6.
13. GYÖRGY SZEIDL, JUDIT DUDRA: Boundary integral equations for the first plane problem end exterior regions in the dual system of micropolar theory of elasticity., microCAD 2008, International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics, University of Miskolc, Hungary, pp. 67-72.
14. SZIRBIK, S.: Application of the boundary contour method to mixed boundary value problems in the dual system of plane elasticity, microCAD 2005 International Computer Science Conference, Section G: Applied Mechanics. Modern Numerical Methods, University of Miskolc, Hungary, pp. 161-166.
15. SZIRBIK, S.: Boundary Contour Method for Mixed Boundary Value Problems in the Dual System of Plane Elasticity 6th European Solid Mechanics Conference, Budapest, Hungary 28 August – 1 September, 2006.

16. SZIRBIK, S.: Boundary contour method for mixed boundary value problems and multiply connected regions with quadratic elements in the dual system of plane elasticity. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Volume 8, Number 1 (közlésre elfogadva), 2008.
17. GYÖRGY SZEIDL, NÓRA SZŰCS, BALÁZS TÓTH: Vibrations of a circular plates subjected to a radial uniform load in its plane, *Numerical Methods in Continuum Mechanics, 4th Workshop on Trefftz Methos*, Zilina, Slovak Republic, August 23-26, 2005, ISBN 80-969165-5-6, 2005. (megjelent teljes terjedelemben a konferencia cd-jén.)
18. SZŰCS NÓRA: Saját síkjában terhelt körlemez rezgései, *Miskolci Egyetem – GÉP folyóirat*, LVI. évfolyam, Vol. 2007/5-6, pp. 41-47.
19. SZEIDL GYÖRGY, SZŰCS NÓRA: A direkt módszer integrálegyenletei saját síkjában terhelt lemezre. X. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2007. augusztus 27-29., Az előadások összegoglalói, Kiadvány 92.o.
20. NÓRA SZŰCS: Integral equations od the direct method for plates prestressed by a constant in plane load., *microCAD 2008, International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, University of Miskolc, Hungary, pp. 73-84.