Részletes jelentés

A kutatás során 29 cikket írtunk, 2 könyvrészletet jelentettünk meg, 1 disszertáció készült, továbbá 42 előadást tartottunk a kutatás eredményeiből. Tartalmi átfedések miatt az utóbbiakból csak 9-et sorolunk fel a publikációs jegyzékben. A 29 cikkből 17 folyóiratcikk (ebből 11 cikk impakt faktoros folyóiratban került közlésre, összesítve 14,55 impakt faktorral), 9 konferenciakiadványban, 3 pedig egyetemi házi kiadványban jelent meg. A vonatkozó publikációkra szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk. A számok a publikációs jegyzékben levő sorszámokat jelentik. Hat nagyobb területen folytattunk vizsgálatokat.

(a) Elhelyezések és fedések

A klasszikus (kényszerfeltételek nélküli) Tammes-probléma a következőképpen szól: Egy gömbön hogyan kell elhelyezni n egybevágó kört úgy, hogy a körök ne messenek egymásba és a sugaruk maximális legyen? Ennek a problémának különböző kényszerfeltételek melletti változatait vizsgáltuk. Először azt a problémát elemeztük, hogy hogyan lehet N triót alkotó 3N egymásba nem metsző egybevágó kört elhelyezni a gömbön úgy, hogy egy trión belül a három gömbi kör középpontja egy főkörbe írt szabályos háromszög 3 csúcsába essen, és a körök sugara maximális legyen. Erre az optimálási problémára numerikus megoldást adtunk N = 2 – 7 trió esetén [8]. Az eredményeket a szabályos háromszöglapok „compound”-jaként („nolid”-ként) szemléltettük. A Tammes-problémánál ismeretes, hogy n = 5-re, ill. n = 11-re a legjobb megoldás úgy adódik, hogy az n = 6, ill. n = 12 esetében kapott legjobb körelhelyezésből egy kört elhagyunk. (Ez tehát azt is jelenti, hogy ezekben az esetekben n és n – 1 számú körre a maximális körsugár azonos.) Hasonló jelenséget a körtrió elhelyezéseknél is tapasztaltunk. Sőt, itt előfordult olyan eset, ahol az N, N – 1 és N – 2 trióra a maximális körsugár azonos. Nevezetesen N = 4 esetén a megoldást jelentő elrendezésben a 4 háromszög csúcsai egy kuboktaéder csúcsaiba esnek, és a konfiguráció egyértelmű (merev). N = 3 esetén az előzőből egy háromszöget el kell távolítani, és így adódik a megoldás, amely egyértelmű (merev). N = 2 esetén egy újabb háromszöget kell eltávolítani, hogy a megoldáshoz jussunk. Ekkor azonban a megoldás nem egyértelmű. A konfiguráció nem merev, az egyik háromszöget a másikhoz képest folytonos mozgással el lehet fordítani. Ez az eset analóg a Tammes-probléma megoldásával n = 5-re, ahol, ha egy kör az északi, egy kör a déli póluson van, akkor az egyenlítőn levő három kör az egyenlítő mentén szabadon elmozdítható.

A másik, kényszerfeltétel mellett tekintett körelhelyezési probléma az volt, hogy hogyan lehet N párt alkotó 2N egymásba nem metsző egybevágó kört elhelyezni a gömbön úgy, hogy egy páron belül a két kör érintse egymást és mereven össze legyen kapcsolva, és a körök sugara maximális legyen [24]. A problémát gráfelméleti alapon vizsgáltuk. Abban az esetben, ha a körelhelyezés gráfjában a csúcsoknak van legalább egy teljes párosítása, akkor a körpárok elhelyezési problémájának megtaláltuk egy megoldását ugyanazzal a körsugárral, mint a kényszerfeltétel nélküli probléma megoldásában. A vizsgálatban N = 2 – 12 körpárra határoztuk meg és szimmetria alapján osztályoztuk a megoldásokat. Ezek N = 2 – 6-ra és 12-re matematikailag bizonyítottan a legjobb megoldások, N = 7 – 11-re pedig a kényszerfeltételek nélküli probléma sejtett legjobb megoldásain alapulnak. Ott, ahol a kényszerfeltétel nélküli probléma kontakt gráfjában van egy vagy több izolált pont, a körpárok elhelyezési problémáját legegyszerűbben úgy lehet megoldani, hogy minden izolált pontot képzeletben hozzákapcsolunk az összes – érintkezés útján elérhető – szomszédjához, és az így kapott gráfban keresünk egy teljes párosítást. Az N = 2 – 12 esetekben a megoldás alapjául szolgáló, kényszerfeltétel nélküli elhelyezés kontakt gráfja Hamilton-gráf, amely garantálja teljes párosítások létezését, de a Hamilton-tulajdonság nem szükséges feltétel: az első olyan eset, ahol a körpár elhelyezési probléma megoldásának alapjául szolgáló kontakt gráf nem Hamilton-gráf, N = 16-nál fordul elő.

Foglalkoztunk a gömbi körelhelyezési problémáknál az eredmények kémiai, ill. biológiai alakalmazhatóságának kérdésével is. Egy konkrét kémiai eljárás során a következő probléma merült fel. Az eljárásban gömbnek tekinthető 463 nm, ill. 616 nm átmérőjű P2VP latex részecskéken 20 nm átmérőjű monodiszperz szilikon gömbökből bevonat készül. Kérdés, hogy maximum mennyi szilikon részecske helyezhető el a latex gömbök felületén. Itt olyan nagy számú szilikon részecske jön számításba, amilyenre nem ismeretes a (kényszerfeltétel nélküli) Tammes-problémának sem pontos, sem sejtett megoldása. A megoldásra csak korlátokat tudunk előállítani. Felső becslésként a Robinson-féle felső korlát, alsó becslésként a van der Waerden-féle alsó korlát jöhet számításba. A van der Waerden-féle korlát nagyon óvatos becslést ad, ezért az alsó becslést élesítettük az általunk kidolgozott spirál algoritmussal, melynek segítségével bármely körátmérőhöz könnyen meghatározható az elhelyezésben a körök száma. Az elvégzett vizsgálataink alapján a kisebbik latex részecskén elhelyezhető szilikon részecskék maximális száma: $1913 < n < 2111$, a nagyobbik latex részecskén pedig $3315 < n < 3664$. A valóságban azonban a mérések szerint a szilikon részecskék száma – részben az elhelyezés véletlen jellege, részben az utólagos átrendeződés lehetőségének korlátozott volta miatt – lényegesen kisebbnek mutatkozott [36]. Egységes keretbe foglalva áttekintést adtunk arról, hogy hogyan kell kN egymást nem metsző egyforma kört, mely N párt (k = 2), triót (k = 3), kvartettet (k = 4) alkot, elhelyezni a gömbön úgy, hogy a sugaruk maximális legyen azon feltétel mellett, hogy k = 2-re minden párban a körök érintsék egymást, k = 3-ra minden trióban a körök középpontjai a gömb főkörébe írható egyenlő oldalú háromszög csúcsai legyenek, k = 4-re minden kvartettben a körök középpontjai a gömbbe írt szabályos tetraéder csúcsai legyenek. A k = 2 esetben a feladat motivációját az adja, hogy körpárok gömbi elhelyezése lehet a geometriai modellje fehérje dimér molekulák elhelyezésének olyan vírusok köpenyében mint a hepatitis B vírus, vagy a geometriai modellje kétatomos molekulák gömbhéjon való elrendeződésének. A k = 4 esetben a kvartett elhelyezési probléma motivációja a kémiai kötés Linnet-féle kvartett modelljéből jön, ahol elektronpárok helyett elektronkvartettek szerepelnek [28].

A szerkezeti topológiai kutatásainkon végigvonul a gráfok merevségének kérdésköre. Korábbi vizsgálatainkban ennek segítségével lehetett pl. a Tammes-problémát a mérnöki mechanika területére transzponálni, és megjavítani néhány sejtett megoldást. A körelhelyezési kontakt gráf csuklós rúdszerkezettel való helyettesítésének, és ez utóbbi merevségvizsgálatának az ötlete Danzertől ered. A jelen kutatásban levezettük a szimmetriavizsgálatra is kiterjesztett mobilitási kritériumot, amely Danzernek a rúdszerkezetekre vonatkozó koncepcióját is tartalmazza, és alkalmaztuk azt a gömbi körelhelyezés problémájára. Megerősítettük a Danzer-féle szabadságfok egyszerű számlálási szabályát egy egyenletben, amely nemcsak a szabadságfok számát jelzi, hanem a gráf torzításának szimmetriáját is, amellyel az elhelyezés javítható. A legjobb elhelyezésnél számításba jövő különböző lehetőségek közötti összefüggések a Danzer-féle mechanizmusok által kifeszített reprezentációk „co-kernel” szerkezetének a következményei, és számos esetben új lokális optimumhoz vezettek [32].

Vizsgálatokat végeztünk adott számú egybevágó kör változó nyílásszögű gömbsüvegen történő legsűrűbb elhelyezésére. A kutatás még nem jutott el az eredmények publikálhatóságáig.

(b) Morfológiai kérdések

A munkatervben szereplő lótusz receptákulumok vizsgálata keretében megtörtént több tucat száraz receptákulum elektronikus adatfeldolgozása. Az Egyesült Királyságbeli Aberystwyth egyetemének egyik kutatójával közösen végzett munka során több modellt (Voronoi-cellák szerint felvett sejtfalak, fix körperem esetén kialakított habmodell, szabad peremű habmodell) kipróbáltunk. A kutatás még nem jutott el az eredmények publikálhatóságáig.

Vizsgálatokat folytattunk annak megállapítására, hogy a fás szárú bambuszok mechanikai tönkremenetelében milyen szerepet játszanak a morfológiai jellemzők (a szár átmérője, falvastagsága, a diafragmák közötti távolság); a természetben egy bambusznál miért az adott morfológiai paraméterek fordulnak elő. A bambusz szárának felépítése speciális, a fához hasonlóan ortotróp, ugyanakkor attól eltérően hengeres és üreges. A természetben élő nagyméretű bambuszok esetén a feltett kérdésre a válasz a szár anyagának szilárdsági és a szerkezet stabilitási viselkedésének összehasonlítása révén adható meg. Numerikus számításokat végeztünk egy internódusz tönkremenetelének megállapítására. A szár átmérőjének, a fal vastagságának és az internódusz hosszának függvényében a tönkremenetel történhet a szilárdság túllépésével vagy stabilitásvesztéssel. A paraméterek azon tartományát vizsgáltuk, amely megfelel a természetes bambuszfajok jellemző tulajdonságainak. Azt tapasztaltuk, hogy a keresztirányú húzószilárdság túllépése a tipikus tönkremenetel, ugyanakkor a nagyméretű de vékonyfalú internóduszok esetén a stabilitásvesztés következik be, amely a fajok kis részére jellemző. Megállapítottuk, hogy a kétféle tönkremenetel egyidejű bekövetkeztét jelentő optimumhoz képest, a bambusz elsősorban szilárdságilag megy tönkre és stabilitás szempontjából megfelelő [27].

A belső túlnyomással működtetett gömbsátrak olyan szabásmintáit kerestük, amelyek minél tökéletesebb gömb alakot biztosítanak. E célból tanulmányoztuk a futball-labdák tervezését és azt a kérdést, hogy hogyan alakítható ki a gömbhöz legközelebb álló labdaalak. Végigtekintve a labdák tervezését 1863-tól, az Angol Futball Szövetség megalakulásától napjainkig, megállapítható volt, hogy a ma használatos, öt- és hatszögekből álló labda alakja nem optimális, mert az ötszögek távolabb vannak a gömb középpontjától, mint a hatszögek. Ha tehát a labda alapjául a 12 ötszögből és 20 hatszögből álló, ikozaéderes szimmetriával rendelkező poliédert fogadjuk el, akkor a labda alakja közelebb lesz a gömbhöz, ha a poliédernek nemcsak köréírt gömbje, hanem beírt gömbje is van. Ha tehát az ötszögek is és a hatszögek is azonos távolságra vannak a gömb középpontjától, akkor a lapok síkjai a köréírt gömböt azonos méretű körökben metszik, azaz a gömbnek 32 egyforma körrel történő legritkább ikozaéderes szimmetriájú fedését kapjuk. Ekkor az ötszögek megtartják ötszörös forgásszimmetriájukat, de a hatszögek hatszoros forgásszimmetriája háromszorosra csökken [14]. Ha más kritériumot alkalmazunk az optimáláshoz, akkor természetesen más labdaalakot kapunk. A részletesebb vizsgálathoz bevezettünk két matematikai mennyiséget a poliéderek (és általánosan a térbeli testek) gömbölyűségének jellemzésére, amelyek lehetővé teszik a számszerű összehasonlítást. Ezek a mennyiségek a test pontjainak koordinátái hatványkifejezéseinek felületi integráljai: az első az origóra vett nyomatékot fejezi ki, a másik pedig a testnek a tökéletes gömbtől való eltérését méri. Szabályos és félig szabályos poliéderek csonkolásával hat különböző poliédert állítottunk elő, amelyek alakját optimáltuk a gömbölyűség szempontjából. Négy test (a csavart dodekaéder, a csonka ikozaéder kétféle csonkolása és az optimált csonka ikozaéder) gömbölyűsége jobb, mint a legnépszerűbb síkpaneles futball-labdáé. Tehát más megfontolás alapján is a hagyományos technológiával készített labda további tökéletesítése lehetséges [33]. A labda alakja a belső megtámasztású, vékony gömbhéj sejtes horpadási alakjával is kapcsolatba hozható, ahol a horpadáskor a gömbön ötszögek és hatszögek képződnek. Nagy sejtszám esetén azonban hétszögek is előfordulnak [13].

Pekingben a Tiltott Városban vannak olyan oroszlánszobrok, ahol az oroszlán mancsa alatt egy öt- és hatszögekből álló hálózattal ellátott labda van. A hatszögek száma azonban meghaladja a futball-labdán előforduló hatszögek számát. Kínában máshol is és Japánban is vannak több száz éves oroszlánszobrok, melyeken levő labdák (gömbök) geometrikus dekorációja és a modern geodetikus kupolák hálózati alakja között érdekes analógia fedezhető fel. Kutattuk, hogy léteznek-e e régi gömbmegjelenítéseken olyan geometriai hálózatok, amelyek a modern geodetikus kupolák formavilágából hiányoznak. E vizsgálatok szerkezeti morfológiai szempontból érdekes megállapításokra adtak lehetőséget. Számos hálózattípus, mint pl. a gömbi háromszög vagy ötszög-hatszög hálózat, továbbá a gömbi szélességi és hosszúsági körök által kialakított négyszöghálózat a modern építészetben is gyakorta alkalmazott szerkezeti hálózatforma. A gömbi körelhelyezés és fedés is jól ismert. Főleg Japánban azonban találtunk olyan dekorációkat, pl. a Borromeo-gyűrűkhöz hasonló fonott körrácsot a gömbön, melyek elképzelhető, hogy kiállítási csarnokok szerkezetformájaként – ahol az egyedi jelleg fontos – a jövőben alkalmazást nyernek [6].

A poliéderekkel kapcsolatos vizsgálataink során történelmi vonatkozásokat is érintettünk. Ismert tény, hogy a poliéderek tanulmányozása és alkalmazása – mindenekelőtt Leonardo működése révén – a reneszánszban vált fontossá. Kevésbé ismert tény azonban, hogy volt egy rövid időszak az 1600-as évek elején, amikor poliédereket templomi síremlékek dekorálására is alkalmaztak Angliában és Itáliában. A kutatásban négy angol és két itáliai példát vizsgáltunk, és kitértünk ezek építészettörténeti és kultúrtörténeti jelentőségére is [34]. Ez a cikk a Nature érdeklődését is felkeltette. A Nature egyik szerkesztője recenzió írás szándékával elkérte a cikk néhány ábráját. Ugyancsak az 1500-as évek legvége és az 1600-as évek eleje az az időszak, amikor közterületeken építmények dekorációjaként megjelennek az első csillagpoliéderek. A kutatásban geometriai alak meghatározást és számítógépes rekonstrukciót végeztünk 16.-18. századi itáliai barokk [30] és 19.-20. századi magyar protestáns [35] szakrális épületeken alkalmazott csillagpoliéderekre. E területet eddig nem vizsgálták, jóllehet itt érdekes és fontos megállapítások tehetők. Példaként csak a római Santa Maria della Pace templomon levő, a 17. század közepén készített csillagpoliédereket említjük, amelyek olyan konvex poliédereken alapulnak, amelyeknek teljes rendszere (a Johnson-poliéderek) csak az 1960-as években lett kimunkálva. A csillagpoliéderek az éleik és csúcsaik révén csuklós rúdszerkezeti modellel is reprezentálhatók. E modellek közül azonban néhányan nem merevek. Vizsgáltuk a csúszkás kapcsolatokat is tartalmazó, csuklós csillagpoliéder-vázak mozgását a rácsos tartók elméletének általánosításával. Kimutattuk, hogy a rudak metsződésének csupán adott szimmetriájú halmazát csúszkás kapcsolatnak tekintve, a mindig létező véges mozgás mellett további infinitezimális mechanizmusok is megjelennek [29], [41].

Építészeti alkalmazások alapján folytattuk a zárt kosaraknak egy korábbi OTKA kutatásban elkezdett morfológiai vizsgálatát. Elsősorban a kocka felszínén egymásra merőleges irányban futó szálakból készült fonatokat vizsgáltuk, ahol a szálak „ferde rendszerű” fonást valósítanak meg, azaz a kocka éleivel 0, 45 és 90 foktól eltérő szöget zárnak be. Sejtéseket állítottunk fel a szálak számának a ferdeség két paraméterétől való függésére. Ezek egyike: ha a ferdeségi paraméterek relatív prímek, akkor a fonatban levő – zárt hurkot képező – szálak száma csak 3, 4 vagy 6 lehet [21].

(c) Konvexitás

Az (a) pontban vizsgált elhelyezési kérdések és a (b) pontban vizsgált morfológiai kérdések közül néhányan lényegében optimálási problémák. Az optimálás hátterében a matematikának egy gyorsan fejlődő ága, a konvexitás áll, mely a geometriában összefogja a geometriai szélsőérték-feladatokat, merevségi feladatokat, valamint a konvex testek vizsgálatával összefüggő feladatokat. A szerkezeti topológiai kutatások keretében végzett vizsgálataink konvexitásra vonatkozó matematikai megalapozása terén az alábbi eredmények születtek.

Definíció: Egy C konvex testre pontok C-távolsága az ab szakasz euklideszi hossza elosztva a C-nek ab szakasszal párhuzamos maximális hosszú húrja hosszának felével. a = b-re a,b C-távolsága 0. Bebizonyítottuk az alábbi két tételt [5]: (1) Legyen C egy parallelogrammától különböző konvex test. Ekkor létezik C-t tartalmazó szimplex, amelynek minden éle C-hossza legfeljebb 4. (2) Legyen C egy parallelogrammától különböző konvex test. Ekkor létezik olyan C-t tartalmazó háromszög, amelynek minden oldala C-hossza egy t<4 érték.

Legyenek a d-dimenziós euklideszi térben megadva K_1,…,K_k konvex testek, ahol k a 2,…,d számok valamelyike. Bebizonyítottuk, hogy ekkor létezik egy S, (k–1)-dimenziós sík az euklideszi térben, amelyre a következő teljesül. Az S-nek bármelyik K_i konvex testünkkel való metszetének (k–1)-dimenziós térfogata maximális a K_i testünknek az összes, S-sel párhuzamos (k–1)-dimenziós síkkal való metszeteinek (k–1)-dimenziós térfogatai között [12].

Legyen K a d-dimenziós euklideszi térben egy konvex test. Vegyünk n véletlen szakaszt K-ban (azaz 2n véletlen pont, páronként szakaszokkal összekötve), és vegyük ezek „Minkowski-átlagát”, azaz (Minkowski-)összegüket leosztva n-nel. Ez a K-ban levő P konvex poliéder. Azt vizsgáltuk, milyen jól közelítheti ez a poliéder a K testünket a térfogat szempontjából, azaz legfeljebb milyen nagy lehet P és K térfogati hányadosa. A legrosszabb a közelítés akkor, ha a K az gömb [19].

Bebizonyítottuk, hogy ha egy legalább két-dimenziós euklideszi térben van két konvex test, amelynek bármely kongruens példányainak metszete, vagy pedig uniójuk konvex burka centrálisan szimmetrikus, akkor a két test két kongruens gömb. Ezen eredményt kiterjesztettük nem-üres belsejű, zárt konvex halmazokra is, és azokra is teljes leírást kaptunk [közlésre előkészítve].

Új, egyszerűbb bizonyítást adtunk a következő régi tételre [20]: Legyen X valós Banach-tér, Y az X-nek n-kodimenziós zárt altere, n = 1, 2, …, és epszilon > 0 tetszőleges. Ekkor létezik egy projekció P:X az X-en (azaz, folytonos lineáris operátor X-en, amelyre P^2=P), amelynek magtere Y, és normája legfeljebb [2+(n–1){sqrt(n+2)}]/(n+1)+ epszilon.

Bebizonyítottuk [25], hogy egy d-dimenziós Minkowski-térben levő konvex test pontosan akkor centrálisan szimmetrikus, ha bármilyen irányból történő megvilágítás esetén a megvilágított felületrész és a meg nem világított felületrész felszíne egyenlő. (Minkowski-tér: d-dimenziós vektortér, ahol a norma nem az euklideszi norma, hanem bármely norma, ami a normára kirótt szokásos axiómáknak eleget tesz.) A felszín fogalma a 2-dimenziós esetben egyértelmű, míg a legalább 3-dimenziós esetben szintén bizonyos axiómáknak eleget tevő, de azon belül tetszőleges felszínfogalom.

Topológikus terekre jól ismert a regulárisan nyílt halmaz fogalma, azaz az olyan halmazé, amely bármely pontjával együtt annak nemcsak egy környezetét tartalmazza (mint nyílt halmazok esetében), hanem még egy környezetének lezárását is. Ennek egy kétoldali variánsát vizsgáltuk [37]: egy topológia helyett ugyanazon az alaphalmazon két topológiát vettünk. Ezt bitopológiának szokták nevezni. A bitopológiának kanonikus példája a valós számegyenesen az úgynevezett alulról félig folytonosság és a felülről félig folytonosság topológiái által alkotott pár. Megjegyezzük, hogy egy valós függvény pontosan akkor folytonos, ha egyszerre alulról és felülről félig folytonos. Nagyon sok topológikus tulajdonság esetében érdemes egy topológiának az „egyik oldali tulajdonságait” egy „alsó”, és a „másik oldali tulajdonságait” egy „felső” topológiának adni. Így egy topológia helyett máris topológiák egy párját kapjuk, ugyanazon alaphalmazon. Ennek megfelelő módon, nagyon sok topológikus tétel természetes módon szétbontható a topológikus tér helyett fenti módon vett bitopológiára vonatkozó tétellé. Ezt tettük meg cikkünkben a regulárisan nyílt halmazokról szóló tételek vonatkozásában.

High bizonyította a következő tételt: Ha egy síkbeli konvex lemez bármely két egybevágó példányának közös része centrálszimmetrikus, akkor a lemez kör. Cikkünkben [39] kiterjesztettük High tételét a gömbfelszínre, és a hiperbolikus síkra. Ha ezek bármelyikében van két konvex lemez, és ezek bármely egybevágó példányainak metszete centrálszimmetrikus, akkor a lemezein k egybevágó körök. Ezt a tételt kiterjesztjük a magasabb dimenziós gömbök felszínére, és a magasabb dimenziós hiperbolikus terekre, de akkor fel kell tennünk a kétszeri folytonos differenciálhatóságot, és a görbület pozitivitását. Az eredmény analóg: testjeink kongruens gömbök. Vizsgáljuk a kérdés egy variánsát. Ha az euklideszi síkon, a gömbfelületen, vagy a hiperbolikus síkon két konvex lemez bármely kongruens példányainak metszete tengelyesen szimmetrikus, akkor mindkét lemez kör, amelyek sugarai azonban általában különbözőek.

A Kollár Lajos által szerkesztett stabilitáselmélet könyv második, javított kiadásához korszerűsítettük a könyv második fejezetét, amely a stabilitási tartomány konvexitásán alapuló összegezési tételeket ismerteti [23].

(d) Sima felületek és rácsok

Vizsgálatokat végeztünk a hatszöghálózatú forgásfelület megfeszített alakjának meghatározására. Mindenekelőtt az alakmeghatározásra szolgáló numerikus eljárás geometriai alapjaira koncentráltunk. Megmutattuk, hogy a hatszöghálózatú forgásfelület megfeszített alakja függ a hálózat hatszög-oldalainak irányától, továbbá attól is, hogy a feszítés pusztán normálerővel, vagy normálerő és csavarónyomaték együttes alkalmazásával történik [2].

Megmutattuk, hogy minden megfeszült trivalens gömbi hálózat felfogható egy síklapokkal határolt poliéder élhálózata centrális vetületének, ami egyben a trivalens gömbi hálózat megfeszíthetőségének szükséges és elégséges feltétele. Ennek megfordításaként bebizonyítottuk, hogy minden poliéder centrális gömbi vetülete sajátfeszültségi állapotba hozható [18].

Foglalkoztunk a térben megfeszülő trivalens szálhálózatok alakjának felvételével [38]. Vizsgáltuk a megfeszülő térbeli hálók és síkbeli vetületeik kapcsolatát. Megmutattuk, hogy a hálózat és a szálerőrendszer párhuzamos, ill. centrális vetítésével olyan síkbeli hálózatok állnak elő, amelyek maguk is megfeszült síkbeli hálózatok, továbbá, hogy azok a poliéderek, amelyek hálózatának párhuzamos vetítésével megfeszült hálózatot állítunk elő, egyszersmind a sajátfeszültségi szálerő-rendszer feszültségpoliéderei. Elemeztük, hogyan vehetők fel közvetlenül olyan trivalens síkbeli hálózatok, amelyek sajátfeszültségi állapotba hozhatók, ill. milyen módon változtatható e hálózatok geometriája a megfeszíthetőség fenntartása mellett. Megmutattuk, hogyan konstruálhatók sajátfeszültségi állapotba hozható trivalens síkbeli hálózatok alapján a térben kifeszülő trivalens hálózatok.

Vizsgálatokat folytattunk a rugalmas kapcsolatú, átellenes éleiken egymáshoz kapcsolt egybevágó merev tetraéderekből álló láncolat alakváltozásaival és kihajlásával kapcsolatban. A vizsgált tetraéderlánc kapcsolódó éleinek felezőpontjait összekötő egyenes az átellenes élekre merőleges. Ez a lánc egy olyan merev elemekből összeállított rúdnak tekinthető, amelynek egyes elemei a rúd hossza mentén elemenként azonos szöggel elforduló, a rúd tengelyére merőleges forgástengelyek körüli relatív elfordulásra képesek. Rugalmas kapcsolat esetén erre a szerkezetre értelmezhető az egyenes tengelyű rudak kihajlásával analóg feladat: milyen nagyságú nyomóerő okozza a szerkezet egyensúlyának elágazását, ill. milyen térbeli elmozdulások tartoznak a kritikus nyomóerőhöz. A kutatás még nem jutott el az eredmények publikálhatóságáig.

Gömbfelszínre illeszkedő, csuklósan kapcsolt főkörívekből felépülő szerkezetek esetében célszerű lehet az egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek két gömbfelszíni szögváltozó segítségével történő felírása. A Hellinger-Reissner-elv alkalmazásával megmutattuk ennek egy lehetséges módját úgy, hogy érintő irányú erők elmozduláson végzett munkái helyett az erők gömbi középpontra vett nyomatékának elforduláson végzett munkáiból indultunk ki, ugyanis érintő irányú erőkre nézve nem létezik analóg külső potenciál [4]. Ugyancsak a gömbi rácsos tartók esetében az érintő merevségi mátrix komponenseinek vizsgálata alapján definiáltuk a hagyományos rácsos tartók esetében közisert erősűrűségnek (force density, stress, tension coefficient) megfelelő analóg mennyiséget, majd kimutattuk, hogy a gömbsugár növelésével határátmenetben az érintőmerevség komponensei és az erősűrűség is a hagyományos (síkbeli) rácsos tartó megfelelő mennyiségeihez tartanak; példát mutattunk továbbá csak nyomott ívekből felépülő, ám stabil egyensúlyi konfigurációjú gömbi láncolatra [40]. Mindezeken túlmenően kimutattuk, hogy a három-dimenziós Descartes-koordinátákra ismert szimmetria-orientált vizsgálat kétdimenziós (gömbi) koordináta-rendszerben is alkalmazható [3]. Kovács Flórián a tárgyban nyújtott be és sikeresen védett meg PhD disszertációt [3], amely már a [4]-ben szereplő, itt ismertetett új eredményeket is tartalmazza.

(e)Kinyitható és összecsukható szerkezetek
Folytattuk a táguló vírusoknak a korábbi OTKA kutatásban elkezdett kinematikai vizsgálatát. Megadtuk a szabályos öt- és hatszögekből felépülő, rácsos tartóval modellezett kettős kapcsolatú vírus véges, szimmetrikus mozgáspályáinak leírását. Bizonyítottuk, hogy adott hatszögelrendezés mellett négyféle ötszögelrendezés létezik, és hogy a pályák között elágazás is előfordul [10].

Vizsgálatokat folytattunk arra nézve, hogy egy túlhatározott, zárt gyűrűt alkotó, hat rudas térbeli Bricard-mechanizmus hogyan alkalmazható kinyitható-összecsukható szerkezetnek. Bebizonyítottuk, hogy egy háromszorosan szimmetrikus Bricard-mechanizmus esetében bizonyos paraméter értékeknél előfordulhat a kompatibilitási út elágazása [7]. E jelenség azért különleges, mert egy túlhatározott mechanizmuson tetszőleges alaki tökéletlenséget alkalmazva a mechanizmus általában elveszíti mozgásképességét, és merev szerkezetté válik.

(f) Kinematikailag határozatlan szerkezetek szingularitásai
A túlhatározott mechanizmusok kompatibilitási útjának elágazását a négyoldalú antiprizmagyűrű esetén is megvizsgáltuk. Megnéztük, hogy a kinematikai határozatlanság milyen esetei jöhetnek létre, ha a kompatibilitási utak szinguláris pontjaiban a rendszert kis mértékben megzavarjuk [11].

Vizsgálatokat végeztünk az egyensúlyi utak (kompatibilitási utak) elágazásánál előforduló kettőscsúcs-katasztrófával kapcsolatban. Olyan modellcsaládot elemeztünk, amelyik egy paraméter változtatásával a kettőscsúcs-katasztrófa négy alosztályán is keresztülhalad. Az így elért alosztályokban előállítottuk a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjait, és két legveszélyesebb tökéletlenség együttes hatására bemutattuk a tökéletlen szerkezetek egyensúlyi útjainak lehetséges típusait [1],[9],[16],[17].

A két szimmetriasíkkal rendelkező szerkezetek optimális tervezésénél elérhető, hogy a két legkisebb kritikus teher megegyezzék. Ekkor a tökéletes szerkezet potenciális energia függvényének aktív része (alkalmas állapotváltozók esetén) olyan kétváltozós függvény lesz, amelyiknek a legalacsonyabb fokú tagja negyedfokú. A homogén negyedfokú rész elemzésével osztályoztuk a katasztrófaelmélet alapján a típusokat, majd az egyensúlyi utak vizsgálata alapján alosztályokat mutattunk ki. A léptékek alkalmas megválasztásával az alosztályok egymáshoz való kapcsolata a síkon megadható. Az egyes alosztályokhoz megmutattuk az egyensúlyi utak számát, jellegét (merre görbül) és típusát (stabilis, labilis, sőt ez utóbbiban annak foka). Kimutattuk, hogy egyes alosztályokban a hatodfokú tagok megváltoztathatják az egyensúlyi utak (elfajult) tulajdonságait (vízszintes egyenes, utak egybeesése) [26].

A Kollár Lajos által szerkesztett stabilitáselmélet könyv második, javított kiadásához korszerűsítettük a könyv katasztrófaelmélet fejezetét [15].

Korábbi OTKA kutatásaink eredményeire alapozva módszert ismertettünk annak megállapítására, hogy egy infinitezimális mechanizmus elsőrendű-e [22].

Egy korábbi OTKA kutatásunkban bebizonyítottuk, hogy a rugalmas szerkezetekre 10 felcserélhetőségi tétel létezik, és ezekre példákat is mutattunk. Az eredmények sajtó alá rendezése és publikálása azonban a jelen kutatás keretében történt [31]. Ez a témakör eredetileg nem szerepelt a jelen kutatás programjában.

A tervezettől való eltérések

(1) A kutatási terv a térrácsok numerikus vizsgálata területén a spektrálfelbontáson alapuló számítási eljárás kidolgozását irányozta elő. E munkát a tervek szerint Dr. Szabó János irányította és részben maga végezte volna. A kutatás kezdetén bekövetkezett súlyos betegsége miatt azonban Dr. Szabó János sajnálatos módon a kutatómunka feladására és a kutatócsoportból való kiválásra kényszerült. Ezért ez az előirányzott részkutatás nem valósult meg. Helyette a szerkezeti topológia szempontjából ugyancsak fontos, a konkrét épületeken előforduló különböző poliéderek (csillagpoliéderek) vizsgálatát, valamint a poliéderekkel összefüggésben a gömb alakú pneumatikus szerkezetek (futball-labdák) morfológiai vizsgálatát végeztük el.

(2) A pályázati kutatási terv három brit kutatóval való együttműködést irányzott elő. A kutatás során azonban az egyes résztémákon háromnál lényegesen több külföldi (nemcsak brit) és hazai kutatóval működtünk együtt. Az együttműködő kutatók költségei azonban nem terhelték a jelen T046846 OTKA ny. számú kutatás büdzséjét. A kutatók más forrásból fedezték költségeiket.

(3) A pályázatban a kutatást négy évre, évenként egyenlő költségek mellett terveztük. A szerződés költségterve azonban, nyilvánvalóan az OTKA-t kényszerítő körülmények következtében, nagyon egyenlőtlen költségelosztással készült. A negyedik évre majdnem akkora összeg volt előirányozva, mint az előző három évre együttesen. Az aránytalanság feloldása, az összeg észszerű felhasználása és a kutatás eredményessége érdekében kézenfekvő

megoldást választottunk. Kértük, és az OTKA engedélyét meg is kaptuk, hogy a kutatást egy évvel meghosszabbíthassuk. A változás a beszerzendő eszközökben is változást és költségátcsoportosítást is igényelt, amit az OTKA előzetes engedélyével végre is hajtottunk.