Eszter BÓRA & Péter JUHÁSZ, Budapest

Ausgehend vom Extrem – ein besonderer Problemfaden der Pósa-Methode

Kurzfassung: Brückenechsen, diophantische Gleichungen, blaue und rote Punkte in der Ebene, feindselige Musiker. Was verbindet sie? Der Lehrplan der Pósa-Methode-Wochenend-Mathematikcamps besteht aus sogenannten Problemfäden. Die Verbindung zwischen den Problemen, die zum selben Faden gehören, ist der Ansatz einer möglichen Lösung. Die Probleme können aus verschiedenen Bereichen der Mathematik stammen, aber eine ähnliche Idee kann helfen, sie zu lösen.

In diesem Artikel berichten wir zunächst über den Ursprung der Methode und den Aufbau der Camps. Im zweiten Teil führen wir den Begriff des Problemfadens und seine Rolle in den Camps ein. Abschließend werden mehrere Probleme zum Problemfaden *Ausgehend vom Extrem* vorgestellt.

Title: Starting from extreme – a special problem thread of the Pósa method

Abstract: Tuataras, Diophantine equations, blue and red points on the plane, hostile musicians. What is the connection? The curriculum of Pósa method weekend mathematics camps is built from so-called problem threads. The connection between the problems belonging to the same thread is the approach to a possible solution. The problems can come from different areas of mathematics, but a similar idea can help to solve them.

In this article, first, we write about the origin of the method and the structure of the camps. In the second part, we introduce the notion of problem thread and its role in the camps. Finally, several problems are presented from a "starting from extreme" problem thread.

Classification: 97D50

Keywords: Pósa method, problem thread, problem-solving, starting from extreme, talent nurturing

Einleitung

Lajos Pósa

Lajos Pósa kommt aus der ersten Mathematik-Spezialklasse in Ungarn, die inzwischen legendär geworden ist (Fried, 2010). Seine Klassenkameraden waren unter anderen *László Lovász* und *Miklós Laczkovich,* die heute weltberühmte Mathematiker sind. *Pósa* war auch einer der Talentiertesten in dieser Klasse, bereits im Alter von 15 Jahren hat er mit *Pál Erdős* einen

Artikel veröffentlicht und das Pósa-Theorem bewiesen, das eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamilton-Kreises in einem Graphen liefert und weltweit in Universitätskursen zur Graphentheorie gelehrt wird.
Pósa schloss sein Studium an der Eötvös Loránd Universität als Mathematiker ab, promovierte und erwarb den „kleinen“ Doktortitel, aber danach hat er mit der mathematischen Forschung aufgehört und sich dem Unterrichten von Mathematik zugewandt. Er wurde Mitglied der von *János Surányi* geleiteten Gruppe, die versuchte, die von *Tamás Varga* geprägte Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule auf die Sekundarstufe auszudehnen. Heute sind die Methode und die Ergebnisse von *Tamás Varga* bekannt (Gosztonyi, 2020), die Arbeit dieser Gruppe aber weniger. Als Mitglied der Gruppe unterrichtete *Pósa* an weiterführenden Schulen in Budapest, eng angelehnt an *Tamás Vargas* Konzept. Gleichzeitig fragten aber auch immer mehr Menschen nach unterschiedlichen Talentmanagement-Aktivitäten wie Fachzirkel und Einzelförderung. Die Schüler entwickelten sich gut, die Atmosphäre im Unterricht war gut, aber *Pósa* vermisste Gelegenheiten, sich ganz zu vertiefen, weil immer wenig Zeit blieb und das schulische Umfeld einer langanhaltenden, ruhigen Nachdenklichkeit nicht förderlich war. Er wollte für die Schüler Bedingungen schaffen, unter denen sie und der Lehrer nicht an Zeit gebunden sind und sich ungestört auf die Lösung von Problemen konzentrieren können. Als Lösung für diese Schwierigkeit wurde die Idee der *Mathecamps am Wochenende* geboren. Heute werden diese Camps nur noch als *Pósa-Camps* bezeichnet, auch wenn sie nicht mehr von *Pósa*, sondern von seinen Schülern geleitet werden. Im nächsten Abschnitt stellen wir diese Form des Talentmanagements vor.

Camps

Pósa organisiert seit 1988 Wochenend-Mathecamps für besonders begabte Schüler. Anfangs startete nicht jedes Jahr eine Campgruppe, und es war nicht einheitlich, wer eingeladen wurde. Weder das fachliche Programm noch die didaktischen Methoden waren so eindeutig wie heute, und wichtige methodische Elemente haben sich in den letzten 30 Jahren stark verändert. Hier beschreiben wir die aktuelle Situation, von der gesagt werden kann, dass sie in den letzten 15 Jahren im Wesentlichen konstant war (Győri & Juhász, 2017).
Anfangs führte Pósa alleine die Wochenendcamps durch, aber heute unternehmen das mehrere seiner Studenten, von denen einer 15 Jahre Erfahrung in diesem Bereich hat. Verschiedene Campleiter haben unterschiedliche

Geschmäcker, einige Dinge haben sich gegenüber dem ursprünglichen Konzept geändert, aber das Wesentliche ist gemeinsam, wir versuchen dieses hier darzustellen.
Für einen Schüler beginnen die Camps in der siebten Klasse. Wenn sich jemand einer Gruppe anschließt, wird er bis auf wenige Ausnahmen die ganze Zeit Mitglied dieser Gruppe sein. So besucht ein Schüler 10 bis 15 Camps, von denen die meisten zweitägig sind (Freitagnachmittag bis Sonntagnachmittag), aber manchmal organisieren wir auch dreitägige Camps.

Wie wird ein Kind ein Pósa-Camper?

Basierend auf den Ergebnissen der nationalen Mathematik-Wettbewerbe in den Klassen 5 bis 9 laden wir jedes Jahr 90 Schülerinnen und Schüler zu einem Sommer-Mathe-Camp ein, zu einem MaMuT, was für Mathematical Fun Camp steht. Davon auch schon ca. 30 Schüler der 6. Klasse, die die Möglichkeit haben, am Wochenendcamp teilzunehmen, indem sie einige Aufgaben nach dem Sommercamp einsenden. In der Regel nutzen 20-25 Schüler diese Möglichkeit. Jedes Jahr im September-Oktober besuchen wir einige hervorragende ungarische Gymnasien, wo wir Mathematikprogramme veranstalten, und in Absprache mit den Lehrern der Schüler laden wir die Besten zum Camp ein. Es gibt auch Lehrer, die seit vielen Jahren, ja Jahrzehnten, mit uns in Kontakt stehen und regelmäßig Schüler empfehlen. Sie wissen bereits so genau, wann es sich lohnt, jemanden zu empfehlen, dass wir es gewohnt sind, diese Schüler bedingungslos ins Camp-Team aufzunehmen. Es kommt auch vor, dass Eltern zu uns kommen, weil sie das Gefühl haben, dass ihr Kind sehr talentiert ist, sie möchten in unsere Camps gehen können. In diesem Fall schauen wir uns den Schüler in einer 2-3-stündigen Sitzung an und empfehlen, ob er Mitglied der Campgruppe werden soll oder nicht. (Juhász, 2019)
Nicht alle Schüler kommen am Ende der sechsten, frühen siebten Klasse (12-13. Lj.) in unseren Horizont. Deshalb gibt es diejenigen, die sich später einer Gruppe anschließen. In solchen Fällen müssen sie das Material der vorherigen Camps durcharbeiten, da das professionelle Material jedes Camps weitgehend auf den Themen aufbaut, die in den vorherigen Camps behandelt wurden, und auf den Fragen, die zuvor aufgeworfen wurden.
Die Camps dauern grundsätzlich bis zum Ende der 11. Klasse, es hängt vom Interesse der Schüler ab, ob wir Camps für sie im letzten Jahr der Mittelschule anbieten oder nicht. Bezogen auf die letzten Jahre gibt es sogar Camps in der 12. Klasse für $2/3$ der Gruppen. Jedes Jahr starten zwei Campgruppen. Das eine wird von den 25-35 besten Mathematikschülern des Landes besucht, das andere sind ebenfalls begabte, motivierte Schüler,

die wiederum nicht so hervorragende Wettbewerbsergebnisse erzielen wie die Mitglieder des anderen Camps.

Aufbau des Wochenendcamps

Die Camps beginnen in der Regel freitags um 16:30 Uhr und enden sonntags um 14:30 Uhr. Das fachliche Programm ist sehr intensiv, zwischen 13 und 15 Stunden verbringen die Teilnehmer während des Camps mit Mathematik. Am Freitag gibt es ein 3-stündiges Mathematikprogram, ein wichtiger Teil davon ist das Besprechen der Hausaufgaben. Zwischen den beiden Camps gibt es Hausaufgaben, über die die Schüler nachdenken müssen. Es gibt auch Hausaufgaben, die schriftlich eingereicht werden müssen. Hausaufgaben werden nicht auf einmal besprochen, ein erheblicher Teil davon wird am Freitag besprochen, aber weniger dringende Aufgaben bleiben für Samstagvormittag bzw. -nachmittag. Die Hausaufgabenbesprechung ist ein Plenarprogramm, bei dem alle Campteilnehmer in einem Raum arbeiten. Bereits am Freitag erhalten die Lernenden neue Aufgaben und denken bereits in Gruppenarbeit darüber nach. Wir besprechen fast nie eine der neuen Aufgaben am Freitag.
Am Samstagmorgen besteht das professionelle Programm aus zwei 100- bis 120-minütigen Abschnitten, einschließlich einer 30-minütigen Pause. Ein wesentlicher Teil des Mathematisierens ist Gruppenarbeit, die Teams denken am Freitag weiter über die Aufgaben nach und bekommen am Samstag neue. Der Samstagmorgen wird regelmäßig von einem kürzeren Plenarprogramm mit Blitzfragen geprägt.
Samstags gibt es immer eine längere Pause von 3 Stunden zwischen Vormittags- und Nachmittagsprogramm. Das primäre Ziel dabei ist, dass sich die Teilnehmer von der Ermüdung des intensiven Mathematisierens erholen und am Nachmittag sowohl geistig als auch körperlich frisch sind.
Am Samstagnachmittag findet in der Regel zuerst eine kürzere Aufgabenbesprechung mit anschließendem Teamwettbewerb statt. Bei einem Teamwettbewerb stellen wir normalerweise 5 Aufgaben, und die Teams haben mindestens 2, oft aber 3 Stunden Zeit, um sie zu lösen. Die Dauer wird nicht im Voraus festgelegt, der Zeitpunkt der Fertigstellung hängt davon ab, wie gut die Schüler Fortschritte machen und wann sie so müde sind, dass es nicht viel Sinn macht, weiterzumachen. Da die Camphelfer um die Teams herumlaufen, haben wir ein ziemlich genaues Bild davon, wie intensiv sie noch denken, wie müde sie schon sind, wie begeistert sie noch sind.
Das Gruppenspiel beinhaltet typischerweise Aufgaben, bei denen Teams verglichen werden können. Sie sind so etwas wie diejenigen, die mit weniger Fragen etwas erraten können, die unter bestimmten Bedingungen mehr

Zahlen auswählen können, die in einem Spiel mit zwei Spielern gewinnen können und so weiter. In diesem Teil ist der Beweis im Gegensatz zum Rest des Camps von geringer Bedeutung, es ist keine große Sache, wenn die Teams nicht beweisen können, dass sie das Optimum gefunden haben. Im Rest des Camps spielt der Beweis jedoch eine Schlüsselrolle.

Jedes Teamspiel enthält ein Zwei-Spieler-Strategiespiel, in dem es an den Teams liegt, die Gewinnerstrategie zu finden und sie zu beweisen, indem sie den Campleiter oder die Helfer besiegen. Wir nehmen nicht wirklich ernsthaft den Aspekt Wettbewerb am Mannschaftswettbewerb. Obwohl wir die Ergebnisse der Teams genau aufzeichnen, gibt es normalerweise zwei Kategorien für die Bekanntgabe der Ergebnisse. Die sehr gut abgeschnitten haben und die noch besser sind. Wir belohnen Teams mit Tafelschokolade, und es gibt keinen signifikanten Unterschied in der Menge an Schokolade zwischen den beiden Kategorien. In jüngerer Zeit kommt es vor, dass am Ende des Spiels jeder Schüler genau eine Tafel Schokolade bekommt und wir die Teams überhaupt nicht bewerten.

Am Sonntagmorgen gibt es in der Regel zwei etwa 120-minütige Programme, ebenfalls mit 30-minütiger Pause. Der Tag beginnt mit einer Besprechung der Aufgaben des Teamspiels, und es ist typisch, dass es am Sonntag etwas mehr Plenarprogramm gibt und dementsprechend wird in der Gruppe etwas weniger nachgedacht.

Der inhaltliche Teil des Camps endet in der Regel sonntags um 2 Uhr, damit auch Teilnehmer aus weiter entfernten Landesteilen pünktlich nach Hause kommen.

Daten

Seit 1988 hat es fast 400 Wochenendcamps gegeben. Die meisten davon wurden von *Pósa* geleitet, aber seit 2006 leiten auch seine Schüler Camps. Bis heute hat *Pósa* seinen eigenen Camp, und er besucht regelmäßig andere Camps, um jüngeren Campleitern ernsthafte professionelle Hilfe zu leisten. Es gibt 10 bis 12 Campgruppen gleichzeitig mit 25 bis 35 Teilnehmern in jedem Camp, was bedeutet, dass 300 bis 350 Schüler parallel an den Wochenendcamps teilnehmen.

Problemfäden

Bei der *Pósa-Methode* organisiert der Lehrer die Aufgaben typischerweise in sogenannten Problemfäden (problem threads), durch die er den Lehrstoff aufbaut. Der Problemfaden ähnelt in vielerlei Hinsicht Aufgabenserien (mit einem „roten Faden“), aber es gibt zwei wichtige Merkmale, die Aufgabenserien größtenteils charakterisieren. (Gosztonyi, 2019)

Eines ist, dass die Beziehung zwischen Aufgaben oft nicht darin besteht, dass diese ein Teil eines traditionellen mathematischen Themas sind. Es geht nicht um Fäden, wenn man z.B. Konstruktionsaufgaben für den Höhenschnittpunkt oder Berechnungsaufgaben zum Üben der erlernten Methode für den größten gemeinsamen Teiler sammelt und lösen lässt. Die verbindende Kraft ist vielmehr die Denkweise, die Ähnlichkeit der Herangehensweise an die Probleme. Sowas könnte z.B. sein, dass bei einer der möglichen Methoden der Lösung Farben angewandet wenden oder Bewegung bei der Lösung der Aufgaben hilft. (Artigue et al. 2020)

In diesem Kapitel stellen wir einen Problemfaden ausführlich vor, bei dem der Zusammenhang zwischen den Aufgaben des Fadens durch die Idee gegeben ist, bei der Lösung bzw. dem Beweis von einem Extrem in einem gewissen Sinne auszugehen. Das ist für den Leser an dieser Stelle vermutlich noch recht vage, wird aber am Ende des Kapitels klar sein.
Der andere wichtige Unterschied ist, dass die Problemfäden nicht kurzfristig sind, sie dauern nicht ein oder zwei Wochen oder einen Monat, sondern sie erstrecken sich über Jahre. Einer der prägenden Fäden der Talent-Camps ist die rekursive Vorgehensweise, die in der siebten Klasse beginnt und bis zum Ende der Camps andauert, also mindestens 5 Jahre umfasst. Dies ist jedoch nicht das einzige Beispiel, vielmehr sind die atypischen Fäden viel kürzer. Der in diesem Beitrag vorzustellende Faden spielt z.B. in den Camps mindestens 4 Jahre lang eine Rolle.
Fast überall im schulischen Mathematikunterricht folgen unterschiedliche Themen aufeinander, eine Zeit lang lernen die Kinder nur Zahlentheorie, dann Geometrie, dann kommt eine längere Zeit Algebra.
Ganz zu schweigen von Ländern, in denen Mathematik nicht einmal ein eigenes Gesamtfach ist, sondern in denen Fächer bereits auf große Themen (z. B. Algebra, Geometrie, Analysis usw.) eingeengt sind.
Die Pósa-Camps haben nicht einmal in einem Camp ein einzelnes Thema, die parallel laufenden Fäden ergeben zusammen den Lehrstoff für das Camp. Bei der Planung hebt der Lehrer 2-3 Fäden für sich hervor, die in einem Lager eine prominente Rolle einnehmen, die anderen Fäden sind nur eine Nebenfigur. Im nächsten Camp darf sich die Zusammensetzung drehen, ein Thema, das bisher auf Ersatzflamme war, im Mittelpunkt stehen, und die Themen, die bisher die Hauptdarsteller waren, dürfen Nebendarsteller sein. Aber es kommt vor, dass ein Thema in zwei oder drei aufeinanderfolgenden Camps sehr prominent ist und danach seine zentrale Rolle verliert. Ein Beispiel ist ein Faden, der sich mit Funktionen befasst.
Wichtige Elemente sind in Camps die Aufgaben, die den Schnittpunkt von zwei oder mehreren Fäden bilden, um zu einer Lösung kommen zu können, indem wir wichtige Ideen aus beiden (oder mehreren) Fäden kombinieren.

(Auch diese sind in den hier beschriebenen Aufgaben enthalten.) Oft verbinden diese Aufgaben entfernte Bereiche der Mathematik, was sehr gut zeigt, wie stark das Beziehungsgefüge in der Mathematik ist, wie stark alles mit allem zusammenhängt.

Gruppenarbeit

In den Camps arbeiten die Kinder die meiste Zeit in Gruppen. Die Praxis der Gruppenarbeit unterscheidet sich von üblichen Vorgehensweisen. In den Camps versuchen wir, die Vorteile von Teamarbeit und Einzelarbeit zu verbinden. Nach Erhalt der Aufgaben beginnen die Kinder in Teams von 2-4 Personen an verschiedenen Orten zu arbeiten. (Es ist seltener, aber kommt regelmäßig vor, dass jemand alleine arbeitet.) Die Wichtigkeit eines anderen Veranstaltungsortes, bei dem sich Teams nur auf ihre eigene Arbeit konzentrieren, geht nicht darauf ein, welche Aufgaben die anderen Gruppen gelöst haben und welche nicht. Das ist ein wichtiger Aspekt, denn am Anfang waren alle am selben Ort. Da ein erheblicher Teil der Schüler sehr kompetitiv ist, haben viele viel Energie darauf verwendet, zu wissen, was andere gelöst haben, und andere wissen zu lassen, was sie oder sie gelöst haben. *Pósa* fand das nicht gut, deshalb arbeitet in den aktuellen Camps jedes Team in einem separaten Raum.
Dies ist ein besonders wichtiges Element des Talentmanagements von *Pósa*, da der Wettbewerb zwischen Kindern in diesem Umfeld keine große Rolle spielt. Die Arbeit an der Aufgabe ist nicht dadurch motiviert, dass sie besser sein wollen als jemand anderes und einen Wettbewerb gewinnen wollen, sondern sie wollen die Schwierigkeit der Aufgabe überwinden, sie wollen Spaß daran haben, die Schwierigkeit zu überwinden, und sie können alleine oder in einem kleinen Team herausfinden, welcher Gedankengang zu einer Lösung führt. *Pósa* und die Leiter der *Pósa-Camps* versuchen immer, die Motivationsbasis der Schüler zu steigern, indem gezeigt wird, dass die Mathematik unendlich interessant ist und wir durch das Lösen schwieriger Aufgaben immer mehr von dieser fantastischen Welt sehen. Es gibt immer mehrere Aufgaben gleichzeitig, an die man denken muss, typischerweise 5-8. Wenn sie die Aufgaben bekommen, zieht sich jeder in sein eigenes Zimmer zurück, das wir Lebensraum nennen. Sie bearbeiten die Aufgaben zunächst selbstständig. Wenn jemand eine Aufgabe gelöst hat, offenbart er seine Lösung anderen nicht und gibt anderen die Möglichkeit, die Aufgabe ebenfalls zu lösen. Nach einiger Zeit teilen die Kinder, die eine vorgegebene Aufgabe noch nicht gelöst haben, ihre bisherigen Ideen und denken gemeinsam über die Aufgabe nach. Schüler lernen diese Arbeitsweise nicht sehr leicht. Anfangs denken sie sofort mit, und wenn jemand etwas löst, sagen sie es sofort den anderen, die sich auch

freuen, weil sie bald die Lösung kennen. Sie müssen viele Male gewarnt werden, dass es gut ist, so viel wie möglich über Aufgaben nachzudenken, weil es ihre Fähigkeit viel mehr verbessert, Aufgaben zu lösen, als zu wissen, wie die Lösung von vielen Aufgaben lautet. Außerdem können sie das, was sie selbst herausfinden, später viel flexibler nutzen. Bereits Mitte der achten Klasse halten sie sich an die oben genannten Regeln und fühlen sich wohl in diesem System. In vielen Fällen merken sie nach einiger Zeit, wie toll es sich anfühlt, eine Aufgabe zu lösen, alleine zur Lösung zu kommen. Inzwischen werden die Gruppen fast förmlich, weil die Kinder im selben Raum sitzen, aber nicht viel kooperieren, weil jeder die Aufgabe alleine lösen möchte.

Ausgehend vom Extrem

Die Aufgaben des hier beschriebenen Problemfadens sind dadurch verbunden, dass sie eine Lösung haben, bei der die entscheidende Idee darin besteht, eine Extremsituation aus der Sicht der Aufgabe zu nehmen, von ihr auszugehen und zu prüfen, was wir erreichen können. Die Themen der Aufgaben dieses Problemfadens sind vielfältig, wie man an den Beispielen unten sehen kann. Es ist zeitlich ein ausgesprochen langer Faden, der in der Regel in der zweiten Hälfte der achten Klasse beginnt und bis zum Ende der Camps dauert.

Aufgaben

1. Fünf Brückenechsen

Im Lavafeld gibt es fünf Brückenechsen. Alle starren jeweils auf diejenige, die ihnen am nächsten steht. (Angenommen, die Abstände zwischen zwei Echsen sind unterschiedlich.) Stimmt es, dass es immer eine Echse gibt, die sicher davonlaufen kann, ohne dass die anderen es bemerken?

Nehmen wir den kleinsten Abstand zwischen den Echsen. Es ist klar, dass diese beiden Echsen einander ansehen. Wenn es eine dritte Echse gibt, die eine von ihnen ansieht, sind wir bereits fertig, da es eine Echse unter den verbleibenden drei Echsen geben wird, die keine andere Echse ansieht.

Wir können also davon ausgehen, dass die restlichen drei Echsen einander anschauen.
Betrachten wir den kleinsten Abstand zwischen den drei Echsen, damit haben wir zwei Echsen ausgewählt, die sich gegenseitig anschauen.
Also schauen sich zwei Echsenpaare an, und niemand schaut auf die fünfte Echse, also ist es wahr, dass es eine Echse gibt, die niemand ansieht.

2. *Verwenden wir nicht den Fundamentalsatz der Zahlentheorie*

Beweise ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie, dass 2^{1000} nicht durch 71 teilbar ist.

Die Lösung des Problems mit dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie ist für begabte Schüler kein Problem.
Diese Formulierung der Frage ist sogar ist für begabte Schüler ungewöhnlich. Es ist ein wichtiges Element der Camps, den Schülern beizubringen, gute Fragen zu stellen, aber unserer Erfahrung nach darf man von einem Achtklässler nicht erwarten, dass er diese Frage formuliert.
Im Zusammenhang mit dem Problem skizzieren wir zwei Lösungen, die den Fundamentalsatz der Zahlentheorie nicht verwenden.

Lösung 1: Unendlicher Abstieg

Wenn 2^{1000} durch 71 teilbar ist, kann die folgende Gleichung geschrieben werden

$$2^{1000} = 71 \cdot A$$

Links steht eine gerade Zahl, also sollte auch rechts eine gerade Zahl stehen. Somit kann es in der Form $A = 2B$ geschrieben werden. In die Gleichung eingesetzt:

$$2^{1000} = 71 \cdot 2B$$

Beide Seiten können durch 2 geteilt werden.

$$2^{999} = 71 \cdot A$$

So erhielten wir eine ähnliche Gleichung wie die Ausgangsgleichung, der Exponent von 2 wurde um eins reduziert.
Ebenso können wir fortfahren, bis der Exponent von 2 gleich 0 wird.

$$2^{0} = 71 \cdot N,$$

wobei N eine ganze Zahl ist. Es gibt keine Lösung für diese Gleichung, also stoßen wir auf einen Widerspruch.

Lösung 2: Ausgehend vom Extrem

Diese Lösung beginnt ähnlich wie die vorherige. Wenn 2^{1000} durch 71 teilbar ist, kann es in der folgenden Form geschrieben werden:

$$2^{1000} = 71 \cdot A$$

Nimm die größte positive ganze Zahl n, sodass A durch 2^n teilbar ist. Diese Zahl ist kleiner als 1000, sonst wäre die rechte Seite größer als die linke. Teile beide Seiten durch diese Zweierpotenz. Dann bekommen wir das

$$2^{1000-n} = 71 \cdot B,$$

wobei B eine ungerade Zahl ist, denn wenn es gerade wäre, dann wäre 2^n nicht die größte Zweierpotenz zum Teilen von B. Das ist aber ein Widerspruch, da links eine gerade Zahl steht, da $n < 1000$, und rechts eine ungerade Zahl, da das Produkt von zweien ungeraden Zahlen ungerade ist.
Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie ist für die letzte Schlussfolgerung auch nicht erforderlich, daher wurde dieser im gesamten Beweis nicht verwendet.

Die Methode des unendlichen Abstiegs kann jederzeit durch einen ähnlichen Gedankengang ersetzt werden, bei dem die Grundidee das *Ausgehend vom Extrem* ist. Dies verraten wir den Schülern an dieser Stelle aber noch nicht, wir machen nicht darauf aufmerksam. Wir stellen einfach fest, dass wir 3 verschiedene Beweise gefunden haben, von denen der erste der einfachste ist, aber einen ernsthaften Satz verwendet.
Das Theorem ist natürlich wahr und sehr grundlegend. Aber es ist immer noch verwirrend, dass die Schüler nicht wissen, warum der Fundamentalsatz wahr ist. Es wäre zu schwierig für sie, die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu beweisen. (Die Existenz einer Primfaktorzerlegung wäre kein Problem, aber das sehen wir auch nicht ein.)
Es ist jedoch an sich interessant, welche Aussagen der Zahlentheorie den Fundamentalsatz der Zahlentheorie erfordern und welche nicht. Camps bieten manchmal einen tieferen Überblick über dieses Thema durch eine Vielzahl von Aufgaben.

Im Folgenden schreiben wir über eine zusammenhängende Gruppe von Problemen innerhalb des Problemfadens. Dies werden immer schwierigere diophantische Gleichungen sein. Es geht um verwandte Probleme, aber das bedeutet nicht, dass diese Aufgaben auf einmal aufgegeben werden. Es ist typisch, dass in einem Camp ein Problem auftritt, und es gibt auch Probleme, die es wert sind, als Hausaufgabe aufgegeben zu werden. So zieht sich die Problemgruppe lange hin. Je schwieriger die Probleme werden, desto entwickelter wird das Wissen der Schüler, sie haben immer mehr Erfahrung im Lösen von Problemen. Es ist also alles vorhanden, um das aktuelle Problem erfolgreich zu lösen.

3. Diophantische Gleichungen

3a. Kann die folgende Gleichung über positive ganze Zahlen gelöst werden?

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

Ähnlich wie bei den vorherigen Problemen kann das Problem durch die Methode des *unendlichen Abstiegs* oder durch *Ausgehend vom Extrem* gelöst werden.

Lösung 1: Unendlicher Abstieg
Eine Quadratzahl geteilt durch 3 ergibt 0 oder 1 als Rest, also ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide durch 3 teilbar sind. Wenn eine Quadratzahl durch 3 teilbar ist, ist sie auch durch 9 teilbar. Da die rechte Seite offensichtlich durch 3 teilbar ist, ist auch die linke Seite, also x^2 und y^2 durch 3 teilbar. Deswegen ist sie durch 9 teilbar. Wenn es also eine Lösung für die Gleichung gibt, müssen sowohl die linke als auch die rechte Seite durch 9 teilbar sein, also sind sowohl x, y als auch z durch 3 teilbar, das heißt, sie können in der folgenden Form geschrieben werden: $x = 3 \cdot x_1$, $y = 3 \cdot y_1$, $z = 3 \cdot z_1$, und wir erhalten die folgende Gleichung:

$$9 \cdot x_1^2 + 9 \cdot y_1^2 = 3 \cdot 9 \cdot z_1^2$$

Geteilt durch 9 die beiden Seiten erhalten wir:

$$x_1^2 + y_1^2 = 3 \cdot z_1^2$$

Wenn also die Ausgangsgleichung eine Lösung x, y, z hat, davon erhalten wir durch 3 dividiert eine weitere Lösung, die aus positiven ganzen Zahlen besteht, die kleiner als die ursprüngliche Lösung sind. Wenn wir die vorherige Argumentation fortsetzen, erhalten wir immer mehr Lösungen für die ursprüngliche Gleichung, die somit eine unendliche Folge streng fallender positiver ganzer Zahlen bilden, was ein Widerspruch ist. Die ursprüngliche Gleichung hat also keine Lösung unter positiven ganzen Zahlen.
Bemerkung: Es ist eine wichtige Bedingung, Lösungen auf der Menge positiver ganzer Zahlen zu suchen, da dies die triviale Lösung $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ausschließt.

Lösung 2: Ausgehend vom Extrem
Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung, die aus positiven ganzen Zahlen besteht, nehmen wir eine, bei der z so klein wie möglich ist. Basierend auf der vorherigen Argumentationslinie kann aus einer solchen Lösung eine andere Lösung abgeleitet werden, indem die Werte durch 3 geteilt werden. Dann haben wir eine andere Lösung, bei der der Wert von z noch kleiner ist, was ein Widerspruch ist, da der Wert von z so klein wie möglich war.

Danach können wir die sehr ähnliche folgende Frage stellen.

3b. Kann die folgende Gleichung über positive ganze Zahlen gelöst werden?

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

Man betrachte ähnlich wie bei der vorherigen Aufgabe die möglichen Reste der Quadratzahlen, diesmal geteilt durch 7. Der 7-Rest einer Quadratzahl kann 0, 1, 2 oder 4 sein. Die Summe zweier solcher Reste ist nur dann 0, wenn beide Reste 0 sind. Das heißt, die Summe zweier Quadratzahlen kann nur durch 7 teilbar sein, wenn beide Zahlen durch 7 teilbar sind. Von nun an können wir beide Gedankengänge der vorherigen Lösungen anwenden.

Diese Aufgabe hat eine doppelte Funktion, einerseits können die Methoden zur Lösung der vorherigen Aufgabe überdacht werden, andererseits bereitet sie die nächste Aufgabe vor. Beide Eigenschaften eignen sich sehr gut für Hausaufgaben zwischen zwei Camps.

3b. Kann die folgende Gleichung über positive ganze Zahlen gelöst werden?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7u^2$$

Es ist eine naheliegende Idee, basierend auf der Lösung des vorherigen Problems, den 7-Rest der Quadratzahlen wieder zu verwenden. Diesmal gibt es jedoch keine ähnliche Argumentation, da die Summe von drei Quadratzahlen nicht nur dann durch 7 teilbar sein kann, wenn alle drei Zahlen durch 7 teilbar sind, sondern auch, wenn sie geteilt durch 7 die Reste 1, 2 und 4 ergeben. Die 7-Reste helfen also diesmal nicht weiter, der Löser muss in eine neue Richtung denken. Die Rolle der vorherigen Aufgabe ist wesentlich, um diese Problemlösungssituation zu schaffen. Was können wir in dieser Situation tun? Verwerfen wir die bisherigen Lösungsgedanken, oder versuchen wir mit Hilfe anderer Reste umzudenken?
Glücklicherweise lässt sich die Aufgabe mit Resten wieder lösen, nur auf komplexere Art und Weise.
Entsprechend der Parität von u teilen wir die Lösung in zwei Fälle.
Wenn u ungerade ist, dann ist der 8-Rest von u gleich 1. Denn das Quadrat einer ungeraden Zahl geteilt durch 8 gibt immer den Rest 1, das lernen die Camp-Schüler in den ersten beiden Camps. Der 8-Rest des Ausdrucks auf der rechten Seite ist also 7. Der 8-Rest der Summe von drei Quadraten kann jedoch nicht 7 sein, da der 8-Rest einer Quadratzahl 0, 1 oder 4 sein kann.
Wenn u gerade ist, ist die rechte Seite durch 4 teilbar. Der Rest der Quadratzahlen kann 0 oder 1 sein, also kann es links nur drei Zahlen geben, die

durch 4 teilbar sind. Also sind x, y, z und u alle gerade. Wenn es also eine Lösung für die Gleichung gibt, kann eine andere Lösung erhalten werden, indem jeder Wert durch 2 geteilt wird. Von nun an können wir die Prinzipien *Unendlicher Abstieg* oder *Ausgehend vom Extrem* wieder anwenden, ähnlich wie bei den vorherigen Lösungen.

Wie wir oben gesehen haben, erfordert die Lösung der oben genannten Probleme eine solide Kenntnis der Berechnung von Resten. Bevor wir dieses Problem mit Schülern beginnen, kommt in einem der ersten Camps das Zählen mit Resten, und dann wird diese Methode in einer Vielzahl von Problemen vorgestellt (z. B. Unmöglichkeitsbeweise, Codierungs- und Färbungsprobleme).

Die Aufgabe ist auch ein gutes Beispiel dafür, dass Problemfäden in Camps meist mit schwierigen oder ungelösten Problemen verbunden sind (für einen weiteren Problemfaden, der in einem ungelösten Problem endet, siehe in Bóra, 2020). Dieser Problemfaden hängt mit dem Drei-Quadrat-Satz von Legendre zusammen. Der Satz selbst besagt, dass eine positive ganze Zahl n genau dann nicht als Summe dreier Quadratzahlen geschrieben werden kann, wenn $n = 4a(8b + 7)$, wobei a und b natürliche Zahlen sind. Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich schwierig, in den Camps kommt kein Beweis vor, aber der Satz selbst wird normalerweise erwähnt.

3c. Kann die folgende Gleichung über positive ganze Zahlen gelöst werden?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

Wir untersuchen die Parität der Zahlen. Da ihre Summe eine gerade Zahl ist, gibt es eine gerade Zahl bei x, y und z. Daraus folgt, dass auch die rechte Seite durch 4 teilbar ist. Wie wir oben gesehen haben, ist die Summe der Quadrate von drei Zahlen nur dann durch 4 teilbar, wenn alle Zahlen gerade sind. Basierend auf $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ und $z = 2z_1$ können wir also die folgende neue Gleichung aufschreiben:

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4y_1^2 = 2 \cdot 2x_1 \cdot 2y_1 \cdot 2z_1$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch 4, ergibt sich folgendes:

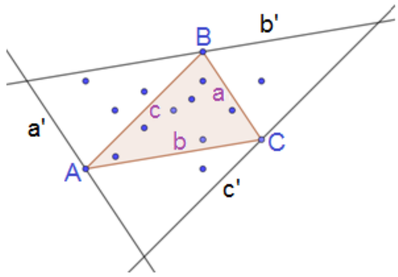
$$x_1^2 + y_1^2 + y_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Ebenso zeigen die Lösungen der neuen Gleichung, dass sie gerade sein muss. Wenn wir die Argumentation wiederholen, erhalten wir immer neuere Gleichungen, deren Lösung immer kleinere positive ganze Zahlen werden, d.h. der unendliche Abstieg zeigt, dass es keine Lösung gibt. Natürlich können wir die Aufgabe auch lösen, indem wir vom *Extrem* ausgehen.

4. Der Flächeninhalt jedes Dreiecks beträgt höchstens 1.

Gegeben sind n Punkte in der Ebene. Wir wissen, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das durch 3 Punkte bestimmt wird, höchstens 1 ist. Beweise, dass alle Punkte durch ein Dreieck vom Flächeninhalt höchstens 4 überdeckt werden können.

Die gegebenen Punkte definieren eine endliche Anzahl von Dreiecken, also können wir das größte davon nehmen. (Wenn es mehr sind, eines der größten.) Dies sei das Dreieck ABC. Wir ziehen durch die Eckpunkte des Dreiecks parallele Geraden mit den gegenüberliegenden Seiten, seien diese a', b', c'. Wir beachten, dass von den durch a definierten Halbebenen nur die Halbebene weitere Punkte enthalten kann, in der auch A enthalten ist. Wäre namlich P in der anderen Halbebene, wäre der Flächeninhalt des Dreiecks BCP größer als der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, da eine ihrer Seiten zusammenfällt, aber die entsprechende Höhe des Dreiecks BCP definitiv größer ist. Dasselbe gilt für die anderen beiden Geraden und für die Halbebenen, die sie definieren. Das heißt, das durch die drei parallelen Geraden definierte Dreieck deckt alle Punkte ab. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt jedoch höchstens 4. Dies liegt daran, dass die Mittellinien dieses Dreiecks die Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind, sodass das große Dreieck durch das Dreieck ABC in vier kongruente Dreiecke geteilt wird. Der Flächeninhalt des großen Dreiecks ist also genau viermal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Da der Flächeninhalt von ABC höchstens 1 ist, ist der Flächeninhalt des großen Dreiecks höchstens 4. Damit ist die Behauptung bewiesen.



Eine mögliche Verbindungsfrage, um sich ein Bild davon zu machen, wer diese Lösung regelmäßig verstanden hat, lautet:

Bei gegebenen n Punkten im Raum ist das Volumen jedes durch 4 definierten Tetraeders höchstens 1. Was können wir sagen, wie groß ist das Volumen des Tetraeders, wodurch alle Punkte abgedeckt werden können?

5. Die Summe dreier natürlicher Zahlen ist 100.

Die Summe dreier natürlicher Zahlen ist 100. Wann wird ihr Produkt maximal?

Viele Schüler vermuten, dass das Produkt bei 33, 33, 34 maximal sein wird. Wie kann man sehen, dass dies das Maximum ist? Während der Diskussion (oder als Hilfsmittel) beginnen wir mit einem bestimmten Tripel:

30, 31, 39. Wir fragen die Schüler, warum das Produkt nicht maximal sein kann? Wenn wir 31 und 39 zu einander „bewegen“, bleibt die Summe konstant, aber das Produkt wächst. Wie ließe sich diese Beobachtung verallgemeinern?
Wenn es zwei Terme mit einer Differenz von mindestens 2 gibt, kann diese Zerlegung nicht die maximale sein. Diese Aussage kann sogar in der folgenden Form als Präludium gegeben werden. Wenn die Summe zweier positiver ganzer Zahlen 100 ist, wann ist das Produkt maximal? Schreiben Sie die beiden Zahlen in der Form $50 - x,\ 50 + x$. Dann ist das Produkt der beiden Zahlen $50^2 - x^2$, dieses Produkt ist umso größer, je kleiner x ist. Also unterscheiden sich zwei Mitglieder um höchstens 1 voneinander. Eine Zerlegung aus drei Zahlen, bei denen das Produkt maximal ist, läßt sich in einer der folgenden Formen aufschreiben: $x + x + x,\ x + x + (x + 1),$ $x + (x + 1) + (x + 1)$. Für 100 ist also 33, 33, 34 das maximale Produkt.

Wie ist die Situation mit positiven reellen Zahlen? Die Summe dreier positiver reeller Zahlen ist 100. Wann wird ihr Produkt maximal?

Ausgehend von der vorherigen Lösung können wir eine lehrreiche falsche Lösung bekommen. Wir beginnen mit der Extremposition, d. h. wir nehmen die Zerlegung, bei der das Produkt der Zahlen maximal ist. Wenn es in dieser Zerlegung zwei verschiedene Zahlen gäbe, würde das Ersetzen durch ihr arithmetisches Mittel ein größeres Produkt ergeben. Was ist falsch an dem Gedanken? 100 kann auf unendliche Weise in die Summe von drei Zahlen zerlegt werden, aber es ist nicht sicher, welche Zerlegung das größte von vielen möglichen Produkten gibt. Wie könnte der Gedankengang korrigiert werden?

Beginnen wir mit einer beliebigen Zerlegung. Wenn die drei Zahlen nicht gleich sind, gibt es eine, die unter dem Mittelwert (100/3) liegt, und eine, die über dem Mittelwert liegt. Wir beginnen, diese beiden Zahlen zueinander laufen zu lassen (die kleinere wird um das gleiche vergrößert, wie der größere verringert wird). Wenn eine der Zahlen den Mittelwert (100/3) erreicht, diese Zahl ändern wir nicht mehr. Die Summe der zwei verbleibenden Zahlen ist 200/3, das Doppelte des Mittelwerts. Wir bringen auch die verbleibenden zwei Zahlen einander näher, die beide den Mittelwert erreichen. Ausgehend von drei Zahlen hat sich das Produkt der drei Zahlen während des Prozesses nicht verringert (aber definitiv erhöht). Wenn also jede der drei Zahlen gleich dem Mittelwert ist, ist das Produkt das Maximum.

Diese Argumentation kann auf jede positive reelle Zahl anstelle von 100 angewendet werden. Außerdem kann die Aussage anstelle von 3 Zahlen für n Zahlen angesehen werden. Wir wählen ein Zahlenpaar aus, bei dem ein

Mitglied größer und das andere Mitglied kleiner als der Mittelwert ist. So ein Paar existiert sicher, solange die Zahlen nicht alle gleich sind. Wir bewegen die Mitglieder des Paars einander näher, bis eine der Zahlen den Mittelwert erreicht. Diese Zahl wird nicht mehr verschoben. Dieser Prozess endet nach einer endlichen Anzahl der Schritte, und das Produkt wächst weiter.

Dieses Problem ermöglicht es, die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von dem traditionellen, typischerweise algebraischen Beweisen abweichend aufzubauen. In dieser Struktur dominiert der Bewegungsansatz. Bewegung als Lösungsmethode ist auch im Material der Camps ein wichtiger Problemfaden.

Wenn wir zum ursprünglichen Problem zurückkehren, erhalten wir weitere interessante Probleme mit kleinen Modifikationen der Bedingungen.

6. Summe positiver ganzer Zahlen 80

Die Summe einiger positiver ganzer Zahlen ist 80. Wann ist ihr Produkt maximal?

Wir gehen aus der Extremsituation, also einer Zerlegung von 80, bei der das Produkt der Zahlen maximal ist. Solcher Fall existiert, da es eine endliche Anzahl von Möglichkeiten gibt, 80 in die Summe positiver ganzer Zahlen zu zerlegen.
Zunächst machen wir einige Bemerkungen zu den Zahlen in der Zerlegung. Die Mitglieder der Zerlegung werden nicht größer als 4 sein. Angenommen, es gibt $n > 4$ in der Zerlegung, dann könnten wir diese Zahl durch 2 und $(n - 2)$ Ersetzen und damit das Produkt erhöhen: $n < 2 \cdot (n - 2)$. Das ist ein Widerspruch, da wir vom maximalen Produkt ausgegangen sind.
Klar ist auch, dass 1 nicht in die maximale Zerlegung einfließen wird. Wir können davon ausgehen, dass nur Zweier und Dreier in die Zerlegung eingehen, da wir einen Vierer durch zwei Zweier ersetzen können, was weder die Summe noch das Produkt ändert. Bei einer Zerlegung mit Zweier und Dreier können wir feststellen, dass es maximal zwei Zweier in der Zerlegung geben dürfen, da das Erzetzen von drei Zweiern durch zwei Dreier die Summe nicht ändert, aber das Produkt wird größer. Damit ist bereits klar, dass beim maximalen Produkt die Zerlegung aus einem Stück Zweier und sechsundzwanzig Stück Dreier besteht: $2 \cdot 3^{26}$.

Eine natürliche Frage ist, wie ist die Situation mit positiven reellen Zahlen? Dieses Problem ist mit Kenntnissen der Mittelschüler nicht bewältigbar. Es gehört in der Regel nicht zum Lehrstoff des Camps.

7. 100×100-Tabelle
Gegeben sei eine 100×100-Tabelle mit einer reellen Zahl in jeder Zelle. Jede Zeile und Spalte in der Tabelle kann mit -1 multipliziert werden. Ist es mit solchen Schritten immer möglich, alle Zeilensummen und alle Spaltensummen nicht negativ zu machen?

Wenn wir wissen, dass die Lösungsidee darin besteht, vom Extrem auszugehen, dann ist die Lösung nicht so schwierig. Die eigentliche Schwierigkeit bei der Aufgabe besteht darin, dass die Schüler dies bemerken, überhaupt über diese Möglichkeit nachdenken. Aus diesem Grund geben wir die Aufgabe so auf, dass es nicht klar ist, das heißt, sie werden nicht unmittelbar nach einem Problem gegeben, bei dem die selbe Lösungsidee verwendet wurde. Außerdem sagen wir nicht, dass sich aus diesem Faden jetzt ein Problem ergibt. Wir wollen ihren Ideenreichtum erweitern und ihnen helfen, eine Aufgabe in allen Situationen auf vielfältige Weise „angreifen“ zu können. Schauen wir uns die Lösung an.

Man stelle sich eine Situation vor, in der die Summe aller Zahlen in der Tabelle maximal ist. Dieser Fall existiert, da es eine endliche Anzahl von Situationen gibt. (Es lohnt sich, während der Diskussion mit den Schülern separat zu fragen, ob die Tabelle endlich viele bzw. wie viele verschiedene Zustände sie haben kann.)

Wir behaupten, dass diese Situation die gewünschte Erwartung erfüllt, alle Zeilen- und Spaltensummen sind nicht negativ. Wenn es in dieser Situation eine negative Zeilen-, bzw Spaltensumme gäbe, würde eine Multiplikation dieser Zeile oder Spalte mit -1 die Summe aller Zahlen erhöhen, was zu einem Widerspruch führen würde.

8. Drachenfahrten
In einem Märchenland transportieren Drachen Passagiere zwischen zwei beliebigen Städten in beide Richtungen. Eines Tages jedoch rebellieren die Drachen, weil sie von den Bewohnern des Märchenlandes nicht genug geschätzt werden. In ihrer Wut streichen sie viele Flüge, bieten aber genug Service, was bedeutet, dass der Verkehr zwischen zwei beliebigen Städten in genau einer Richtung weiterfließt. Der Aufstand verändert die einstige Idylle. In der neuen Situation nennen wir jede Stadt „gute Stadt“, die aus jeder Stadt mit maximal einem Umsteigen erreichbar ist. Man zeige, dass es immer mindestens eine gute Stadt gibt.

Wir beginnen mit der Extremsituation. Wenn der Schüler vermutet, dass diese Idee helfen könnte, ist nicht ganz klar, aus welcher Sicht wir eine extreme Situation wählen müssen.

Wir nennen die Stadt S, in die die meisten Flüge führen. Es ist zu zeigen, dass S eine gute Stadt ist.

Wenn jemand die Aufgabe nicht alleine lösen kann, lohnt sich diese Hilfe auf jeden Fall, denn auch damit ist die Lösung eine beachtliche Leistung und ein angenehmes Erlebnis.

Angenommen, es gibt eine Stadt T, von der es nicht möglich ist, mit mehr als einem Umsteigen nach S zu gelangen. In diesem Fall führt der Flug von S nach T. Außerdem hat jede Stadt, von der es einen Flug nach S gibt, auch einen Flug nach T. Das stimmt, weil wir sonst durch eine solche Stadt einen Transfer von T nach S bekommen könnten. An dieser Stelle gibt es aber mindestens einen Flug mehr nach T als nach S, was ein Widerspruch ist, da S in dieser Hinsicht maximal war. S ist also eine gute Stadt.

Diese Aufgabe ist übrigens die erste Aufgabe des Drachenfahrten-Problemfadens, in der verschiedene Fragen rund um einen gerichteten vollständigen Graphen auftauchen. Diese Aufgaben werden hier nicht behandelt. Es ist aber auch ein häufiges Phänomen beim Aufbau des Lehrstoffs des Pósa-Camps, dass sich die Fäden kreuzen, daher ist die Koordination der Fäden eine wichtige und schwierige Aufgabe für den Campleiter.

Die folgende Aufgabe ist wieder ein Beispiel für die geometrische Anwendung der Methode *Ausgehend vom Extrem*. Dieses Problem ist jedoch viel schwieriger als das vorherige Dreiecksproblem.

Natürlich wissen die Studierenden im Vorfeld nicht, dass diese Aufgabe auch mit dem Problemfaden

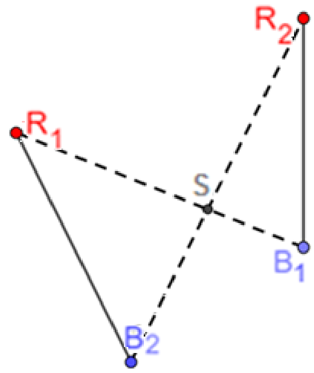
Extremposition zusammenhängt, sodass sie am eigenen Leib erfahren können, dass ein Prinzip in ganz unterschiedlichen Situationen des problemlösenden Denkens helfen kann.

9. 100 blaue, 100 rote Punkte

Gegeben seien in der Ebene 100 *rote und* 100 *blaue Punkten, so dass keine drei auf einer Geraden liegen. Können sie mit* 100 *Strecken verbunden werden, sodass jede Strecke einen blauen und einen roten Endpunkt hat und die Strecken sich nicht schneiden?*

Wir betrachten die Rot-Blau-Paare, bei denen ***die Summe der Längen der Strecken minimal*** ist. Dies liegt daran, dass es eine endliche Anzahl von Paarungen gibt.

Angenommen, es gibt zwei Strecken R_1B_1 und R_2B_2, die sich an einem S-Punkt schneiden.



Dann ersetzen wir in der Paarung die Strecken R_1B_1 und R_2B_2 durch R_1B_2 und R_2B_1, wir erhalten immer noch eine rot-blaue Paarung, aber in dieser Paarung wird die Gesamtlänge der Strecken aufgrund der Dreiecksungleichheit kleiner sein:

$$R_1B_2 + R_2B_1 < R_1S + SB_2 + R_2S + SB_1 =$$
$$= R_1B_1 + R_2B_2$$

So sind wir in einen Widerspruch geraten.

Diese Aufgabe geben wir in der Regel nicht vor der 11. Klasse auf. Obwohl die Lösung kurz und leicht zu verstehen ist, kommt den Schülern nicht leicht in den Sinn, auch wenn durch die vorherigen Aufgaben für das Gehirn der Schüler „vorbereitet“ sind, um dies zu realisieren.
Nach der Lösung lohnt es sich jedoch zu fragen, wie sie die Aufgabe verallgemeinern würden.
Es ist möglich, die Aussage auf eine höhere Dimension zu verallgemeinern. Gegeben seien in einem d-dimensionalen Raum $d \cdot 100$ Punkten in allgemeinen Positions. Die Punkte werden mit d Farben gefärbt, so dass es genau 100 von jeder Farbe gibt. Es ist zu zeigen, dass aus diesen 100 d-Tupel gebildet werden können, indem verschiedenfarbige Ecken paarweise in ein d-Tupel liegen, und die konvexen Hüllen der d-Tupel sind paarweise disjunkt.

10. Feindselige Musiker

100 feindselige Musiker fahren auf Tournee mit zwei Bussen. Jeder Musikant hat höchtens 3 Gegner in der Band.

Stimmt es, dass man sie in zwei Busse aufteilen kann, sodass jeder höchstens einen Gegner im Bus dabei hat?

Wir ordnen die Musiker den Ecken eines Graphen zu. Zwischen zwei Eckpunkten soll eine Kante stehen, wenn die beiden Musiker Gegner sind. Nach der Aufgabenstellung ist der Grad eines Knotens höchstens 3. Für Graphen umformuliert ist zu beweisen, dass in einem gegebenen Graph mit 100 Knoten, wenn der Grad jedes Knotens höchstens 3 ist, die Ecken in zwei Teile geteilt werden können, so dass der Grad der Ecken innerhalb jedes Teils höchstens 1 ist.

Um das Problem zu lösen, lohnt es sich, wieder von einer Extremsituation auszugehen. Wir nehmen die Aufteilung, die in die zwischen den beiden Teilen meistmögliche Kante führt. (So eine Teilung existiert, da es eine endliche Anzahl von Teilungen gibt.) Wir zeigen, dass diese eine entsprechende Teilung ist. Den Beweis führen wir auf indirekte Weise. Angenommen, es gibt einen Punkt, dessen zwei Nachbarn im selben Teil liegen. Wenn wir diesen Knoten dann auf den anderen Teil übertragen, erhöht sich die Anzahl der Kanten zwischen den beiden Teilen. Das ist ein Widerspruch, da wir von einer Teilung ausgegangen sind, bei der es zwischen den beiden Teilen eine maximale Anzahl von Kanten gibt.

Nachdem wir das Problem gelöst haben, können wir die Schüler erneut fragen, was sie die Lösung kennend fragen würden. Es ist jedem klar, dass 100 keine Bedeutung hat, für n Musiker geht die Lösung genau so. Eine mögliche Frage ist, was passiert, wenn jeder mehr als 3 Gegner haben darf. Damit beschäftigen wir uns im Camp nicht.

Es gibt jedoch zwei Themen, die manchmal in das Camp-Programm aufgenommen werden, wenn die Schüler das Thema ansprechen und abstimmen, dass sie gerne darüber nachdenken.

Irgendwann in der Diskussion der Probleme bewegen wir uns aus dem Umfeld von Musikern, Gegnern, Bussen zu den Graphen. Das heißt, wir haben einen Graphen mit 100 Punkten, in dem der Grad jedes Punktes höchstens 3 ist. Wir müssen einsehen, dass die Ecken in zwei Teile geteilt werden können, so dass der Grad jeder Ecke innerhalb eines Teils höchstens 1 ist. Es hängt davon ab, wann dieser Übergang stattfindet, wann die Schüler selbst spüren, dass diese Umformulierung für sie angenehm ist. Da sie alt genug sind, ist ihnen das Konzept eines Graphen gut bekannt und sie können damit gut umgehen, daher ist es charakteristisch, dass sie früh anfangen, diese Terminologie zu verwenden.

Eine der beiden häufig gestellten Fragen ist, wie groß sollen die Busse sein, um die Aufgabe bewältigen zu können. Es ist klar, dass es kein Problem gibt, wenn in beiden Bussen 100 Personen Platz haben.

10b. Busse mit begrenzter Größe
Reicht es aus, wenn es zwei Busse für 80 Personen gibt? Vielleicht lässt sich die Aufgabe auch für kleinere Busse immer lösen?

In diesem Fall lohnt es sich auf jeden Fall, auf die Graph-Terminologie umzusteigen. Angenommen, wir haben eine gute Aufteilung, in der niemand mit zwei Gegnern zusammensitzt, das heißt, wir haben einen Graph mit 100 Punkten, in dem der Grad jedes Punktes höchstens 3 ist und die Eckpunkte in zwei Teile geteilt sind, sodass es keinen Eckpunkt gibt, dessen zwei Nachbarn ebenfalls in dem selben Teil liegen. Sei die Anzahl der

Knoten im ersten Teil x, dann gibt es natürlich $100 - x$ Knoten im zweiten Teil. Der nicht kleinere Teil sei der erste Teil, d. h. x ist mindestens 50.

Die entscheidende Idee ist, sich anzusehen, wie viele Kanten es zwischen den beiden Teilen gibt. Die Anzahl der Kanten zwischen den beiden Teilen sei e.

Da kein Eckpunkt im ersten Teil zwei Nachbarn hat, gehen mindestens zwei Kanten von jedem Knoten in den zweiten Teil über. Das heißt, $2x \leq e$. Andererseits gehen nicht mehr als 3 Kanten von jedem Eckpunkt zum ersten Teil vom zweiten Teil, also $e \leq 3(100 - x)$. Wenn wir die beiden Ungleichungen vergleichen, erhalten wir $2x \leq 3(100 - x)$, woraus wir $x \leq 60$ erhalten. Wir haben bekommen, dass der Graph in der nicht kleineren Gruppe nicht mehr als 60 Knoten hat.

Das bedeutet, dass in dem Bus, in dem mindestens 50 Musiker reisen, maximal 60 Musiker sitzen, also in beiden Bussen maximal 60 Musiker sein werden. Das heißt, dass die Aufgabe in allen Fällen lösbar ist mit einer Buskapazität bis zu 60 Personen.

Die andere sehr schöne Frage ist, was soll man sagen, wenn es um unendlich viele Musiker geht. Hier braucht man natürlich unendlich große Busse.

10c. Feindselige Musiker (unendlich)

Stimmt es, wenn unendlich viele Musiker unter den oben genannten Bedingungen mit zwei unendlichen großen Bussen reisen, kann man sie immer so aufteilen, sodass jeder mit höchstens einem Gegner reist?

Diese Aufgabe ist sehr schwierig, nur wenige in unseren Camps lösen sie, es ist eine ernsthafte Herausforderung sogar für die Teilnehmer der Mathematik-Olympiade. Diese Aufgabe verbindet mehrere wichtige Camp-Problemfäden, denn die in der Basisaufgabe verwendete Idee des *Ausgehend vom Extrem* muss noch mit dem kombiniert werden, was im Unendlichkeitsfaden und im rekursiven Ansatzfaden gelernt wurde. Das ist wiederum ein sehr schöner Moment, denn man muss 3 nicht sehr schwierige Ideen miteinander kombinieren, was zusammen eine sehr schwierige Aufgabe ergibt.

Eine mögliche Lösung ist:

Wir nummerieren die Musiker mit natürlichen Zahlen und machen für jedes n eine gute Teilung basierend auf der Lösung der endlichen Version.

Dieser erste Schritt wird in der Regel als Hilfestellung gegeben, wenn die Kinder bereits genügend Zeit mit der Lösung verbracht haben. Das mag auf den ersten Blick wenig hilfreich erscheinen, ist es aber nicht. Das wird die Aufgabe natürlich auch nicht leicht machen, aber von hier aus wird ein erheblicher Teil der am Camp teilnehmenden talentierten Schüler in der Lage sein, die Aufgabe zu lösen.

Als ersten Schritt schauen wir uns in der unendlichen Anzahl von Verteilungen an, wann Musiker 1 in den Bus A kommt und wann in den Bus B. Da wir ihn unendlich oft in die Busse setzen, wird mindestens einer der Busse unendlich oft vorkommen. Wir nehmen an, dass dieser Bus A war. Dann setzen wir den Musiker 1 in den Bus A, und von jetzt an schauen wir uns nur die zu n gehörenden Unterteilungen an, wo Musiker 1 zu A gelangt ist.

Jetzt schauen wir uns in dieser unendlichen Anzahl von Unterteilungen an, wohin der Musiker 2 plaziert wird. Jetzt ist auch wahr, dass mindestens einer der Busse unendlich oft gewählt wird, es sei dieser der Bus B. Dann setzen wir den Musiker 2 in B, und von nun an betrachten wir nur noch die unendlich vielen Unterteilungen, wo 1 in A, 2 in B ist. Wir setzen diese Methode auf unbestimmte Zeit fort. Also haben wir alle Musiker in einen der Busse gesetzt. Die Behauptung ist, dass diese Aufteilung gut sein wird. Dies zu beweisen, ist nicht mehr so schwierig, aber da es mit der Methode, vom Extrem auszugehen, nicht eng verwandt ist, bleibt es dem Leser überlassen, den Beweis zu führen.

Zusammenfassung

Dieser Problemfaden ist in vielerlei Hinsicht typisch, die folgenden Merkmale gelten für viele Aufgabenfäden:

- Die Grundidee ist zunächst so naheliegend, dass die Lösungsmethode nicht der Rede wert erscheint (Brückenechsen).
- Am Ende des Fadens sind die Aufgaben bereits extrem schwierig. Entweder, weil es den Studierenden besonders schwerfällt, sich daran zu erinnern, die Grundidee des Aufgabenfadens anzuwenden, oder weil es explizit schwerfällt, zu merken, wie der Ansatz geschickt angewendet werden kann.
- Der Faden dauert Jahre und baut diesen Ansatz langsam und gründlich in den Köpfen der Schüler auf. Das macht die Herangehensweise für sie selbstverständlich, die Idee des Fadens fällt ihnen auch in unerwarteten Situationen eher ein und ist viel effektiver und flexibler als die Anwendung der Methode in einer intensiven Trainingseinheit.

- Die Aufgaben im Faden stammen aus verschiedenen traditionellen Bereichen der Mathematik. Es gibt elementare Geometrie, Zahlentheorie, Graphentheorie, die Beziehung zwischen Mittelwerten. Was gut betont wird, ist, dass es nicht so sehr auf das Thema ankommt, sondern auf die Denkweise, die Herangehensweise, mit der wir versuchen, die Aufgabe in den Griff zu bekommen.
- Die Schwierigkeit der Aufgaben ist sehr unterschiedlich und erfordert manchmal fast dieselbe Idee wie zuvor, was aus der Aufgabe deutlich wird. Manchmal ist es sehr unklar, ob eine Idee im Zentrum eines Fadens weiterhilft, aber wenn dem Schüler diese in den Sinn kommt, ist der Erfolg fast garantiert. Außerdem gibt es Aufgaben, die recht schwierig sind, auch wenn der Schüler bereits das Gefühl hat, dass diese Lösungsmethode helfen kann. Es ist jedoch nicht genau klar, wie und wie man zur Lösung kommt.

Es ist nicht mehr so typisch, dass diese Strategie sehr abstrakt formuliert wird, weshalb sie vielerlei konkrete Formen annehmen kann. Mehrere Problemfäden sind stark an ein traditionelles Thema gebunden. Andere hingegen tauchen in vielen und in vielen ähnlichen Themen auf. Aber auch bei letzteren ist die Strategie weniger abstrakt, und wenn man den Ansatz kennt und anzuwenden weiß, ist die Lösung meist einfach. Hier ist aber auch die Anwendung des Ansatzes sehr vielfältig, was die Lösung der Probleme noch schwieriger macht, aber vielleicht noch schöner die unerschöpfliche Schönheit der Mathematik zeigt.

Literatur

Bóra, E. (2020). A computational thinking problem-thread for grade 7 students and above from the Pósa method. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), 101-110.

Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., & Maass, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science,* 18(3), 77-81.

Fried, K. (2010). Case of Hungary. In *Russian mathematics education: History and world significance* (pp. 343-344).

Gosztonyi, K. (2020). Tamás Varga's reform movement and the Hungarian Guided Discovery approach. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), 11-28.

Gosztonyi, K. (2019). Conceiving teaching trajectories in the form of series of problems: a step for the theoretical reconstruction of the Hungarian Guided Discovery approach. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 17). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Győri, J. G., & Juhász, P. (2017). An extra-curricular gifted support programme in Hungary for exceptional students in mathematics. In *Teaching gifted learners in stem subjects* (pp. 89-106). Routledge.

Juhász, P. (2019). Talent Nurturing in Hungary: The Pósa Weekend Camps. *Notices of the American Mathematical Society*, 66(6), 898-900.