Szakmai záróbeszámoló a T046929nyilvántartási számú „Differenciál- és differenciaegyenletek kvalitatív és kvantitatív elmélete alkalmazásokkal” című OTKA pályázatról

Kutatásaink differenciálegyenletek, illetve differenciaegyenletek stabilitási vizsgálataihoz, a megoldások aszimptotikus jellemzéséhez, és az integrálegyenlőtlenségek témaköréhez kapcsolódnak. A 2004-2007 kutatási időszakban 31 publikációnk jelent meg. Dolgozatainkra az elmúlt 4 évben 575, ezen belül a kutatási periódusban megjelent 31 publikációnkra pedig 57 hivatkozást regisztráltunk. Eredményeinkről 9 plenáris, 33 meghívott szekció és 16 szekció előadásban számoltunk be nemzetközi konferenciákon. Ezeken kívül összesen 34 meghívott előadást tartottunk különböző hazai és külföldi egyetemek szakmai szemináriumain.

Kutatásaink – a pályázatunkban megadott előzetes terveinknek megfelelően – az alábbi hat fontosabb témakör köré csoportosultak:

I. Megoldások aszimptotikus jellemzése és stabilitása

[1]-ben a klasszikus Mckendrick-Von Foester egyenlet egy perturbációját vizsgáljuk úgy, hogy ekvivalens módon átírjuk egy integrálegyenlet formájába. Ennek az átírásnak köszönhetően a felmerülő technikai nehézségek ügyes leküzdésével új egzisztencia és unicitás tételt bizonyítunk, amely általánosítja többek között Boulanger 1994-ben publikált eredményét.

[2]-ben neurális hálók modellegyenleteiként használt késleltetett argumentumú differenciálegyenlet-rendszerek stabilitására adtunk elegendő feltételeket. Az eredmény bizonyításához elegendő feltételt fogalmaztunk meg lineáris késleltetett argumentumú differenciálegyenlet-rendszerek késleltetés-független stabilitására, amely általánosította J. Hofbauer, J. W.-H. So és S. A. Campbell eredményeit.

A [3] dolgozatban olyan lineáris integro-differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus jellemzésére adtunk pontos határérték formulákat, amelyekben az integrál alatt szereplő magfüggvény nem exponenciális nagyságrendben tart a nullához. Eredményeink arra az esetre vonatkoznak, amikor a magfüggvények subexponenciális típusúak. A kapott formulák alapján vizsgálhatók a megoldások kvalitatív tulajdonságai, például az oszcillációjuk.

A [4] cikkben megválaszoltunk egy, az irodalomban B. Aulbach és N. Van Minh által felvetett kérdést. Megmutattuk, hogy egy Banach térbeli nem-autonóm homogén differenciaegyenlet éppen akkor exponenciálisan stabilis, ha bármely l_p, $1<p<\infty$ térbeli inhomogenitás esetén a megfelelő inhomogén egyenlet megoldásai korlátosak.

Az [5] dolgozatban megmutattuk, hogy egy nemlineáris magasabb rendű differenciaegyenlet nullához tartó nem-oszcilláló megoldásának növekedési rátája általában pozitív gyöke a linearizált egyenlet karakterisztikus egyenletének.

A [7] dolgozatban olyan magasabb rendű differenciaegyenleteket vizsgáltunk, amelyek monoton diszkrét dinamikai rendszert generálnak az ún. diszkrét exponenciális rendezésre nézve. Megmutattuk, hogy ilyen egyenletek esetén az összes megoldás korlátossága, valamint az egyensúlyi helyzetek lokális és globális stabilitási tulajdonságai ugyanolyanok, mint az egyenlethez tartozó elsőrendű differenciaegyenlet esetén.

[8]-ban aszimptotikus becsléseket adtunk olyan magasabb rendű differenciaegyenletek megoldásaira, amelyek monoton diszkrét dinamikai rendszert generálnak az ún. diszkrét

exponenciális rendezésre nézve. Bizonyos esetekben a becslések pontosabb aszimptotikus formulákkal helyettesíthetők. Következményként új diszkrét Halanay-féle egyenlőtlenségeket és elegendő feltételeket nyertünk a zéró megoldás globális exponenciális stabilitására.

Egy korábbi Rjabovtól származó tétel szerint, ha a késleltetések elegendően kicsik, akkor az adott nem-autonóm lineáris késleltetett differenciálegyenlet aszimptotikusan ekvivalens egy ugyanolyan dimenziójú közönséges differenciálegyenlettel. [11]-ben – némely esetben megjavítva, illetve korábbi bizonyításainkat leegyszerűsítve – összefoglaltuk a témához kapcsolódó eredményeinket.

[14]-ben olyan lineáris, autonóm, folytonos argumentumú differenciaegyenleteket vizsgáltunk, amelyeknek egyetlen pozitív sajátértéke van. Megmutattuk, hogy bármely megoldás és a pozitív gyökhöz tartozó sajátfüggvény hányadosa Cesaro-szummábilis, a határérték pedig megadható explicit módon a kezdőfüggvény által.

[17]-ben egy olyan autonóm lineáris funkcionál-differenciálegyenlet perturbációit vizsgáljuk, amely monoton dinamikus rendszert generál az exponenciális rendezésben. Elegendő feltételt adunk a nulla megoldás globális exponenciális stabilitására.

Bizonyos esztergáló berendezések vibrációját megelőzendően fontos gyakorlati feladat a megfelelő késleltetett argumentumú differenciálegyenletet tartalmazó modell paraméterektől függő stabilitási tartományának meghatározása. Ezt numerikus módszerekkel határozzuk meg a [19] cikkben, ahol definiálunk egy szemi-diszkretizációs módszert, igazoljuk annak konvergenciáját, és megmutatjuk, hogy a diszkretizáció megőrzi az aszimptotikus stabilitást.

[21]-ben lineáris autonóm késleltetett argumentumú differenciálegyenlet-rendszerek aszimptotikus stabilitására adtunk elégséges feltételeket. A bizonyítás perturbációs technikán alapul, és bizonyos skaláris lineáris több késleltetést tartalmazó autonóm lineáris differenciálegyenlet fundamentális megoldása abszolút értékének integrálját használja. Ennek becslését több esetben is megadtuk. Az egy késleltetés esetében az egyenlet karakterisztikus gyökei elhelyezkedését is vizsgáljuk.

[22]-ben általános lineáris Volterra-típusú nem-konvolúciós differenciaegyenletek megoldásainak kvalitatív viselkedését vizsgáljuk n-dimenziós esetben. Bizonyos esetekben megadjuk a megoldások egzakt aszimptotikus jellemzését, illetve explicit határérték formulákat határozunk meg. A dolgozat újdonsága, hogy az éles eredményeink a kevésbé vizsgált nem-exponenciális – például szubexponenciális – esetre vonatkoznak.

Az [23] dolgozat véges dimenziós lineáris konvolúciós típusú Volterra integro-differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgálja abban az esetben, amikor a magfüggvény nem exponenciális típusú, mondjuk szubexponenciális. A megoldások aszimptotikus jellemzése alkalmas súlyfüggvényekkel történik, és explicit határérték formulákat adunk a megoldások és a súlyfüggvény hányadosára. Az elméleti eredményeinket alkalmazzuk az ún. kompartment rendszerek tanulmányozására. Érdekes megjegyezni, hogy módszerünk akkor is éles eredményeket ad, amikor az exponenciális technikák nem alkalmazhatóak a karakterisztikus gyökök hiánya miatt.

[24] és [25] dolgozatokban olyan aszimptotikusan autonóm funkcionál-differenciálegyenleteket vizsgálunk, amelyek limeszegyenlete egy lineáris funkcionál-differenciálegyenlet. Összefüggéseket keresünk a perturbált egyenlet és a limeszegyenlet megoldásai között. [24] fő eredménye egy Perron-típusú tétel a megoldások Ljapunov-kitevőiről. A [25] cikkben megmutatjuk, hogy ha a perturbációra szigorúbb megszorításokat teszünk, akkor a perturbált egyenlet véges Ljapunov-kitevőjű megoldásai aszimptotikusan jellemezhetők a limeszegyenlet sajátmegoldásainak segítségével. Perron-típusú tételünk másik alkalmazásaként bebizonyítjuk Győri és Trofimchuk egy sejtését bizonyos nemlineáris skaláris funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak oszcillációjáról a nulla egyensúlyi helyzet környezetében. Eszerint a nemlineáris egyenlet nullához tartó megoldásainak oszcillációja következik a linearizált egyenlet hasonló tulajdonságából.

[26]-ban az előző linearizált oszcillációs tétel nemautonóm egyenletekre való kiterjesztésével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a nemautonóm esetben hasonló állítás csak a linearizált egyenlet együtthatójára tett további megszorítások mellett igaz, például, ha az együtthatófüggvény rekurrens.

[29]-ben egy a viszkoelasztikus anyagok vizsgálatában fontos lineáris skaláris Volterra típusú konvolúciós egyenlet megoldásainak aszimptotikus vizsgálatával foglalkozunk. Elegendő feltételeket adunk a triviális megoldás aszimptotikus stabilitására, továbbá pontosan leírjuj a megoldások csökkenési illetve növekedési rátáját.

2007-ben Pituk Mihály megvédte az Asymptotic Behavior of Functional Differential Equations című akadémiai doktori értekezését [30]. Az értekezésben funkcionál-differenciálegyenletek három különböző osztályára bizonyítunk eredményeket a megoldások aszimptotikus viselkedéséről. Az I. fejezet fő eredménye egy Perron típusú tétel aszimptotikusan autonóm és lineáris funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak Ljapunov-kitevőiről. A II. fejezetben lineáris aszimptotikusan autonóm folytonos idejű differenciaegyenletek monoton megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgálja. A III. fejezetben pedig monoton dinamikus rendszert generáló nemlineáris autonóm funkcionál-differenciálegyenletek egy osztályára bizonyít stabilitási és konvergenciatételeket.

[31]-ben magasabb rendű Poincaré típusú skaláris differenciaegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk. A fő eredmény azt mutatja, hogy ha az együtthatók konvergenciája exponenciálisan gyors, akkor a Poincaré típusú egyenlet megoldásai aszimptotikusan egyenlők a limeszegyenlet sajátmegoldásaival. Az eredmény alkalmazásával leírjuk egy általános nemlineáris autonóm differenciaegyenlet adott hiperbolikus egyensúlyi helyzetéhez tartó megoldásainak aszimptotikus viselkedését a linearizált egyenlet sajátmegoldásainak segítségével.

II. Integrálegyenletek és integrálegyenlőtlenségek mértékterekben

[12]-ben Bihari típusú egyenlőtlenségeket vizsgáltunk mértékterekben abban az esetben, amikor az egyenlőtlenséget kielégítő függvény 0 és 1 közé eső kitevőjű hatványát integráljuk. Az egyenlőtlenség megoldásaira explicit korlátokat adtunk. Az eredményeket az egyenlőtlenséghez kapcsolódó integrálegyenletek megoldhatóságának vizsgálatában alkalmaztuk.

[13]-ban mértéktéren értelmezett függvényeken definiált monoton integráloperátorokat tartalmazó integrálegyenletek megoldhatóságát vizsgáljuk alkalmazásokkal.

III. Differenciálegyenletek megoldásainak paraméterektől való differenciálható függése, paraméterek becslése

[10]-ben neutrális állapotfüggő késleltetésű nemlineáris differenciálegyenletek egy osztályában paraméter becslési módszert definiáltunk, igazoltuk a módszer konvergenciáját, és numerikus példákon teszteltük az eljárást.

[16]-ban közönséges és absztrakt differenciálegyenletek nem folytatható megoldásai határtól határig terjedését vizsgáljuk, számos eddig ismert eredményt megjavítva. Az eredmények egyik alkalmazásaként olyan, az eddig ismert konstrukcióknál egyszerűbb, nyílt intervallumon definiált, végtelen sokszor differenciálható függvényt is megadunk, amelynek

trajektóriája korlátos és zárt.

[18]-ban nemlineáris, állapotfüggő késleltetést tartalmazó neutrális differenciálegyenletek egy osztályában vizsgáljuk a megoldások létezését, egyértelműségét, a paraméterektől való folytonos függését illetve differenciálhatóságát.

[27]-ben állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek megoldásainak paraméterektől való folytonos függését vizsgáljuk abban az általános esetben, amikor a késleltetés nem korlátos, illetve a megoldás nem egyértelmű.

V. Sztochasztikus közönséges differenciálegyenletek numerikus közelítése

Sztochasztikus közönséges differenciálegyenletekre is számos numerikus megoldásai módszer ismert. A [6] dolgozatban ilyen numerikus közelítő módszerek stabilitására vonatkozó fogalmakat vizsgáltunk és hasonlítottunk össze.

Megjegyzés: 2005 első felében Horváth-Bokor Rózsa (PhD) munkaviszonya a Veszprémi Egyetemen megszűnt, és ezzel egyidejűleg megszakadt az OTKA pályázatunkban való közreműködése és a fenti téma kutatása is a pályázat keretén belül.

VI. Állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek stabilitása

[9]-ben állapotfüggő késleltetésű periodikus egyenletek megoldásainak stabilitását vizsgáltuk linearizációs módszerrel. Megmutattuk, hogy egy nemlineáris állapotfüggő késleltetésű egyenlet periodikus megoldása akkor és csak akkor exponenciálisan stabil, ha egy megfelelő időfüggő késleltetésű lineáris egyenlet nulla megoldása exponenciálisan stabil.

[15]-ben marógépek rezgéseinek vizsgálatára olyan matematikai modellt állítottunk fel, amely állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenleteket tartalmaz, valamint vizsgáltuk a rendszer stabilitását linearizációs módszerekkel.

A [20] dolgozat több mint 200, a témakörhöz tartozó cikkre hivatkozva áttekinti az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek történetét, legfontosabb alkalmazási területeit, alapvető elméleti és numerikus kérdéseit, és nyitott problémákat is felvet. Ebben a témakörben még ilyen részletességű áttekintő cikk nem jelent meg.

[28]-ban állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek exponenciális stabilitását vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a nemlineáris egyenlet zéró megoldása akkor és csak akkor exponenciálisan stabilis, ha egy hozzárendelt lineáris egyenlet zéró megoldása is exponenciálisan stabilis. A dolgozatban korábbi eredményünket általánosítottuk lényegesen bővebb egyenletosztályra. Vizsgáljuk az exponenciális konvergencia rendjét is, és megadtunk elegendő feltételeket arra, hogy a nemlineáris és a lineáris egyenlet megoldása azonos rendben tartson 0-hoz.

További szakmai terveink

A fenti kutatásaink folytatását továbbra is tervezzük. A 2008-2012 időszakra beadott és elfogadott OTKA pályázatunkban részleteztük a tervezett munkatervet.

Egyéb tudományos aktivitások

Speciális szekció szervezése (Győri István, Hartung Ferenc és Yang Kuanggal) a Fourth World Congress of Nonlinear Analysts (Orlando, Florida, USA, June 30-July 7, 2004) konferencián "Dynamics of Delay Differential and Difference Equations with Applications" címmel.

Speciális szekció szervezése (Győri István, Hartung Ferenc) a Dynamical Systems and Differential Equations, (Pomona, Calofornia, USA, June 16 - 19, 2004) konferencián „Qualitative and quantitative theory of state-dependent functional differential equations with applications" címmel.

Speciális szekció szervezése (Hartung Ferenc és Elena Braverman) a Fifth International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Edinburg, Texas, USA, December 16-18, 2006) konferencián "Qualitative Theory of Functional Differential Equations with Applications" címmel.

Nemzetközi szakmai folyóirat indítása International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications címmel, Serials Publication, India, 2007. Főszerkesztő: Győri István, Managing Editor: Hartung Ferenc, Pituk Mihály a szerkesztőbizottság tagja.

Egyéb támogatások

TÉT, Magyar-Spanyol kutatási együttműködés, 984 eFt, 2005-2006, témavezető: Pituk Mihály, résztvevők: Győri István, Hartung Ferenc, Krisztin Tibor, Röst Gergely

Számos meghívás konferencia előadás tartására, ahol a meghívó fél fizette a részvételi költségeket illetve azok egy részét.

Hozzájárulok ahhoz, hogy a T046929 nyilvántartási számú kutatás eredményei alapján készült zárójelentésemet, az OTKA Bizottság nyilvánosságra hozza, illetve a tudományos közösség számára ismert, elérhető archívumban archiválja.

Veszprém, 2008.február 27.

Dr. Győri István, témavezető

Melléklet a szakmai beszámolóhoz

Publikációs lista

1. D. Greenhalgh and I. Győri, Existence and uniqueness of solutions of a perturbation of the Mckendrick-Von Foester equation, Functional Differential Equations, 11:1-2 (2004) 69-76.
2. I. Győri and F. Hartung, Stability Results for Cellular Neural Networks with Delays, Proc. 7th Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., Electr. J. Qual. Theor. Diff. Equ, 12 (2004) 1-14.
3. J. A. D. Appleby, I. Győri and D. Reynolds, Subexponential solutions of scalar linear integro-differential equations with delay, Functional Differential Equations, 11:1-2 (2004) 11-18.
4. M. Pituk, A criterion for the exponential stability of linear difference equations, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 779-783.
5. M. Pituk: A note on the groth rates of nonoscillatory solutions of nonlinear difference equations, J. Difference Equ. Appl. 10, 1033-1036, 2004
6. R. Horváth-Bokor, On stability for numerical approximations of stochastic ordinary differential equations, Proc. 7th Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., Electr. J. Qual. Theor. Diff. Equ, 15 (2004) 1-9.
7. U. Krause and M. Pituk, Boundedness and stability for higher order difference equations, J. Difference Equ. Appl., 10 (2004) 343-356.
8. E. Liz and M. Pituk: Asymptotic estimates and exponential stability for higher order monotone difference equations, Advances in Difference Equations, 2005:1, 41-55, 2005
9. F. Hartung: Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays, J. Computational and Applied Mathematics, 174:2, 201-211., 2005
10. F. Hartung and J. Turi: Identification of parameters in neutral functional differential equations with state-dependent delays, Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005, Seville, (Spain). 12-15 December 2005., 2005
11. I. Győri and M. Pituk: Asymptotically ordinary delay differential equations, Functional Differential Equations, 12, 187-208, 2005
12. L. Horváth: Generalizations of special Bihari type integral inequalities, Math. Inequal. Appl. 8, 440-449, 2005
13. L. Horváth: Nonlinear integral equations with increasing operators in measure spaces, Integral Equ. Appl., 17, 413-437, 2005
14. M. Pituk: Cesaro summability in a linear autonomous difference equation, Proceedings of the American Mathematical Society, 133, 3333-3339., 2005
15. T. Insperger, G. Stépán, F. Hartung, J. Turi: State dependent regenerative delay in milling processes, Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences, Long Beach CA, (2005), paper no. DETC2005-85282 (CD-ROM), 2005
16. B. Slezák, On the noncontinuable solutions of retarded functional differential equations. Functional Differential Equations, 13:3-4 (2006) 603-635.
17. E. Liz and M. Pituk, Exponential stability in a scalar functional differential equation, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2006, Article ID 37195, pages 1-10.
18. F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays, J. Math. Anal. Appl., 324:1 (2006) 504-524.
19. F. Hartung, T. Insperger, G. Stépán, J. Turi, Approximate stability charts for milling processes under semi-discretization, Applied Mathematics and Computation, 174:1 (2006) 51-73.

20. F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther, and J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delay: theory and applications, in Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, volume 3, edited by A. Canada, P. Drábek and A. Fonda, Elsevier, North-Holand, 2006, 435-545.
21. I. Győri, F. Hartung, Fundamental solution and asymptotic stability of linear delay equations, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., 13:2 (2006) 261-288.
22. J. A. D. Appleby, I. Győri, D. W. Reynolds, On exact convergence rates for solutions of linear systems of Volterra difference equations. J. Difference Equations and Applications, 12 (2006) 1257-1275.
23. J. A. D. Appleby, I. Győri, D. W. Reynolds, On exact rates of solutions of linear systems of Volterra equations with delay. J. Math. Anal. Appl., 320 (2006) 56-77.
24. M. Pituk, A Perron type theorem for functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 316 (2006), 24-41.
25. M. Pituk, Linearized oscillation in a nonautonomous scalar delay differential equation, Applied Mathematics Letters 19 (2006), 320-325.
26. M. Pituk, Asymptotic behavior and oscillation of functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 322 (2006), 1140-1158.
27. B. Slezák, On the parameter-dependence of the solutions of functional differential equations with unbounded state-dependent delay I. The upper-semicontinuity of the resolvent function, Int. J. Qualitative Theory of Differential Equations and Applications, 1:1 (2007), 88-114.
28. I. Győri, F. Hartung, Exponential Stability of a State-Dependent Delay System, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 18:4 (2007) 773-791.
29. J. A. D. Appleby, I. Győri, D. W. Reynolds, On exact rates of growth and decay of solutions of a linear Volterra equation in linear viscoelasticity, Note di Matematica, 27 (2007) 215-228.
30. M. Pituk, Asymptotic Behavior of Functional Differential Equations, MTA doktori értekezés, 2006.
31. R. P. Agarwal and M. Pituk: Asymptotic expansions for higher-order scalar difference equations, Advances in Difference Equations, Volume 2007, Article ID 67492, 12 pages