

A COOK-FÉLE MEMBRÁN FELADAT MEGOLDÁSA p -VERZIÓS VÉGESELEM-MODELLEKKEL

Szócs Tamás

BSc hallgató, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: szocstomcsi@gmail.com

Bertóti Edgár

egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: mechber@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Ez a cikk egy szakirodalomból jól ismert sík-rugalmasságtani peremérték-feladat, a Cook-féle membrán probléma numerikus megoldásán keresztül veti össze az elsőrendű feszültségfüggvényeken és forgásokon alapuló, p -verziós dual-mixed végeelem-modellt és a klasszikus, elmozdulásmezőn alapuló p -verziós végeelem-modellt.

Kulcsszavak: p -verziós végeelemek, dual-mixed modell, Cook-féle membrán feladat

Abstract

This paper compares the performance of the classical, displacement-based p -version finite element model and a dual-mixed finite element model, based on the approximation of first-order stress functions and rotations, through the numerical solution of Cook's membrane problem, a well-known plane elasticity benchmark problem.

Keywords: p -version finite elements, dual-mixed model, Cook's membrane problem

1. Bevezetés

A rugalmasságtani problémák megoldására kifejlesztett klasszikus, elmozdulásmezőn alapuló, h -verziós – alacsonyrendű approximációval és elemsűrítéssel dolgozó – végeelem-modellek numerikus konvergencia problémái többféleképpen is elkerülhetők. Az egyik lehetőség – az elmozdulásmező alapváltozóként való megtartásával – a p -verziós, magasabb rendű approximációval dolgozó elemek alkalmazása [1]. Egy másik lehetőség olyan, egy- vagy többmezős variációs elven alapuló, ún. *mixed* végeelem-modellek alkalmazása, amelyeknél a feszültségi változók közvetlen approximációja is biztosítva van [2]. Utóbbi modellek és elemek mind h -, mind p -verziós változatukban hatékonyaknak bizonyultak, hátrányuk az, hogy egyrészt bonyolultabb felépítésűek, másrészt az approximációs tereknek egy stabilitási kritériumot is ki kell elégíteniük [2][3].

A feszültségmező közelítésén alapuló végeelem-modellek a feszültségi tenzor szimmetriájának biztosítási módjától függően többféleképpen is felépíthetők. Egyensúlyi, a priori szimmetrikus feszültségmezőn alapuló h -verziós végeelem-modelleket kizárólag síkbeli feladatok numerikus megoldására fejlesztettek ki, lásd pl. [4][5][6]. Ezek az elemek azonban nem kaptak jelentős szerepet az alkalmazásokban, aminek elsődleges oka az egyensúlyt biztosító másodrendű feszültségfüggvényekre vonatkozó C^1 -

folytonossági approximációs követelményben és az ebből fakadó bonyolult, nehezen kezelhető elemekben, valamint a feszültségi peremfeltételek figyelembevételénél megjelenő numerikus nehézségekben keresendők.

Az említett problémák a feszültségi tenzor szimmetriájának variációs úton történő biztosításával elkerülhetők. Ebben az esetben a translációs egyensúly kielégítése csak elsőrendű feszültségfüggvényeket kíván, amelyek C^0 -folytonos approximációja egyben az elemek közötti normál irányú feszültségvektorok folytonosságát is biztosítani fogja, a feszültségi tenzor szimmetriáját kifejező forgási egyensúlyi egyenlet a forgásmező Lagrange-féle multiplikátorként való alkalmazásával biztosítható. A modellezés alapját a Fraeijs de Veubeke-féle kétféle variációs elv jelenti [7]. Ilyen típusú h -verziós, ún. dual-mixed végelem-modelleket fejlesztett ki, többek között, lineáris sík-rugalmasságtani feladatokra [8][9][5], nemlineáris síkbeli feladatokra [10][11][12] és rugalmas-képlékeny feladatokra [13][14]. Sík-rugalmasságtani problémák és lemezfeladatok megoldására alkalmas p - és hp -verziós végelem-modellek mutat be [15] és [16].

Ez a cikk a [15, 16] munkákban ismertetett, feszültségfüggvényeken és forgásokon alapuló, p -verziós dual-mixed végelem-modellveti össze az elmozdulásmezőn alapuló p -verziós végelem-modellel egy szakirodalomból jól ismert sík-rugalmasságtani peremérték-feladat, a Cook-féle membrán probléma numerikus megoldásán keresztül. A 2. fejezet ismerteti a Fraeijs de Veubeke-féle variációs elvet, majd származtatja annak sík-rugalmasságtani feladatokra érvényes alakját. A 3. fejezet a számítások során alkalmazott p -verziós végelem-modellt mutatja be, ismertetve a feszültségfüggvények és a forgásmező közelítésére alkalmazott optimális és stabil approximációs teret. Végül a 4. fejezetben a szakirodalomban gyakran tesztelt Cook-féle membrán feladat numerikus megoldásán keresztül összevetésre kerül a feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló p -verziós végelem-modell a klasszikus, elmozdulásmezőn alapuló p -verziós modellel.

2. Variációs elv feszültségmezővel és forgásmezővel

A feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló végelem-módszer elméleti háttérét a Fraeijs de Veubeke-féle variációs elv [7] jelenti, amelynek funkcionálja a lineáris rugalmasságtan keretei között az

$$\mathcal{F} \sigma, \phi = \int_V W_c(\sigma) + \sigma : \phi \, dV - \int_{S_u} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1)$$

alakban írható, ahol V a test térfogati tartománya, σ a feszültségi tenzor, ϕ a szögelfordulás-tenzor, $\tilde{\mathbf{u}}$ az előírt elmozdulásmező a test \mathbf{n} normálisú S_u peremfelület-részén, továbbá

$$W_c(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{C}^{-1} : \sigma \quad (2)$$

a test térfogategységében ébredő kiegészítő alakváltozási energia, amelyben \mathbb{C}^{-1} az anyagállandók negyedrendű rugalmassági tenzora. Az (1) funkcionálhoz tartozó kiegészítő feltételek a

$$\sigma \cdot \nabla + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad x \in V \quad (3)$$

transzlációs egyensúlyi egyenlet, ahol ρ a test sűrűsége, \mathbf{b} pedig a térfogati erőrendszer sűrűségvektora, továbbá a

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad x \in S_p \quad (4)$$

feszültségi peremfeltétel, ahol $\tilde{\mathbf{p}}$ az S_p peremfelület-részén előírt terhelés intenzitása, valamint a ϕ szögelfordulás-tenzor

$$\phi + \phi^T = \mathbf{0} \quad (5)$$

egyenlettel kifejezett aszimmetriája, ahol a jobb felső indexben álló T a transzponálásra utal. Az $S = S_u \cup S_p$ ($S_u \cap S_p = \emptyset$) peremfelülettel lezárt V tartomány egy tetszőleges pontjának helyvektorát egy alkalmasan megválasztott vonatkoztatási rendszerben \mathbf{x} jelöli.

Sík-rugalmasságtani feladatok. Sík-rugalmasságtani peremérték-feladatok esetén – xyz Descartes-i derékszögű koordináta-rendszert alkalmazva – feltételezzük, hogy a test V tartományának kiválasztott és vizsgált, Ω -val jelölt síkmetszete az xy síkban helyezkedik el. Az Ω tartomány peremgörbét Γ jelöli. Lineárisan rugalmas, izotrop anyagmodell feltételezésével az (1) funkcionál az

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \sigma, \phi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{1+\nu_1} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu_1 \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2} (\tau_{xy} + \tau_{yx})^2 \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \varphi (\tau_{yx} - \tau_{xy}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_u} [\tilde{u}_x (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + \tilde{u}_y (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y)] ds \end{aligned} \quad (6)$$

alakban írható, amelyben $\varphi \equiv \varphi_z$ a ϕ forgástenzor egyetlen koordinátája, μ a nyírási rugalmassági modulus, továbbá ν_1 az általánosított Poisson-tényező, amely sík-feszültségi feladatoknál a $\nu_1 = \nu$, sík-alakváltozási feladatoknál pedig a $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$ módon számítható az anyag ν Poisson-tényezőjéből. A $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ ($\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$) peremgörbén mért ívkoordinátát s jelöli, $\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y$ pedig a peremgörbe tartományból kifelé mutató normálisa az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ bázisban felírva. Az (1), illetve a (6) funkcionálhoz tartozó kiegészítő feltételek közül a (3) egyensúlyi egyenlet a

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + \rho b_x &= 0, \\ \sigma_{yx,y} + \sigma_{y,y} + \rho b_y &= 0, \end{aligned} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (7)$$

alakban érvényes, ahol az indexben álló vessző utáni betű parciális deriválást jelöl az x vagy az y koordináta szerint, a (4) feszültségi peremfeltétel az

$$\begin{aligned} n_x \sigma_x + n_y \sigma_{xy} &= \tilde{p}_x, \\ n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_y &= \tilde{p}_y, \end{aligned} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_p \quad (8)$$

alakot veszi fel, az (5) aszimmetria-feltétel pedig már figyelembe lett véve a (6) funkcionálban azáltal, hogy síkbeli feladatok esetén a ϕ tenzornak egyetlen $\varphi \equiv \varphi_z$ koordinátája különbözik zérustól, amely nem más, mint az xy síkra merőleges $\varphi \equiv \varphi_z \mathbf{e}_z$ forgásvektor koordinátája.

A (7) szerinti translációs egyensúlyi egyenleteket kielégítő, önegyensúlyi feszültségmező egy tetszőleges, differenciálható

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_x \mathbf{e}_x + \psi_y \mathbf{e}_y \quad (9)$$

elsőrendű feszültségfüggvény-vektor bevezetésével származtatható a

$$\sigma_x = \psi_{x,y} + B, \quad (10)$$

$$\sigma_y = -\psi_{y,x} + B, \quad (11)$$

$$\tau_{x,y} = -\psi_{x,x}, \quad (12)$$

$$\tau_{y,x} = \psi_{y,y}, \quad (13)$$

összefüggéseknek megfelelően, ahol B a térfogati erőrendszer skalár-potenciálja:

$$\rho b_x = -B_{,x}, \quad \rho b_y = -B_{,y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (14)$$

A (8) feszültségi peremfeltétel elsőrendű feszültségfüggvényekkel kifejezett alakja

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} - B\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad x, y \in \Gamma_p. \quad (15)$$

A (6) funkcionálban megjelenő nyírófeszültség-különbség a $\boldsymbol{\psi}$ feszültségfüggvénnyel a

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \quad (16)$$

alakban írható, amiből az is következik, hogy szimmetrikus feszültségek esetében $\boldsymbol{\psi}$ divergenciája zérus kell legyen.

Behelyettesítve a (10)-(13) feszültségeket a (6) funkcionálba, majd képezve annak irány menti deriváltjait a $\boldsymbol{\psi}$ és φ helyeken a tetszőleges $\delta\boldsymbol{\psi}$ és $\delta\varphi$ irányokban, a

$$\begin{aligned} D_{\delta\boldsymbol{\psi}} \mathcal{F} \boldsymbol{\psi}, \varphi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu(1+\nu_1)} [\psi_{x,y} \delta\psi_{x,y} + \psi_{y,x} \delta\psi_{y,x} + \nu_1(\psi_{x,y} \delta\psi_{y,x} + \psi_{y,x} \delta\psi_{x,y}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\psi_{y,y} - \psi_{x,x})(\delta\psi_{y,y} - \delta\psi_{x,x})] d\Omega + \int_{\Omega} \varphi(\delta\psi_{x,x} + \delta\psi_{y,y}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_u} \left[\tilde{u}_x \frac{d(\delta\psi_x)}{ds} + \tilde{u}_y \frac{d(\delta\psi_y)}{ds} \right] ds \end{aligned} \quad (17)$$

$$D_{\delta\varphi} \mathcal{F} \boldsymbol{\psi}, \varphi = \int_{\Omega} \delta\varphi(\psi_{x,x} + \psi_{y,y}) d\Omega \quad (18)$$

kifejezéseket kapjuk. A sík-rugalmasságtani peremérték-feladat ekkor a következő módon fogalmazható meg: keresett $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{V}$ és $\varphi \in \mathbb{W}$ a

$$\mathbb{V} := \left\{ \boldsymbol{\psi} \mid \psi_x, \psi_y \in \mathbb{H}^1(\Omega), \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} = \tilde{\mathbf{p}} - B\mathbf{n} \quad x, y \in \Gamma_p \right\}, \quad (19)$$

$$\mathbb{W} := \mathbb{L}^2(\Omega) \quad (20)$$

függvénytérben – ahol $\mathbb{H}^1(\Omega)$ az első deriváltjaival együtt négyzetesen integrálható függvényekből, $\mathbb{L}^2(\Omega)$ pedig négyzetesen integrálható függvényekből álló teret jelöl az Ω tartományon – olyan módon, hogy a

$$D_{\delta\boldsymbol{\psi}} \mathcal{F} \boldsymbol{\psi}, \varphi = 0, \quad (21)$$

$$D_{\delta\varphi} \mathcal{F} \boldsymbol{\psi}, \varphi = 0 \quad (22)$$

egyenlőségek minden $\delta\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{V}_0$ és $\delta\varphi \in \mathbb{W}$ esetén fennálljanak, ahol \mathbb{V}_0 a \mathbb{V} tér részhalmaza $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ homogén feszültségi peremfeltételekkel a Γ_p peremgörbén.

A feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló végeselem-modellek egyik nagy előnye az elmozdulásmezőn alapuló modellekkel és elemekkel szemben az, hogy az (1), illetve a (6) funkcionálban nem jelenik meg az $1/(1-2\nu)$ tag. Ez azt jelenti, hogy összenyomhatatlan ($\nu \rightarrow 0,5$) anyagok esetén a *dual-mixed* elemek alkalmazásával elkerülhető a szakirodalomban *incompressibility-locking* néven ismert numerikus konvergencia probléma.

3. A p -verziós dual-mixed végeselem-modell

A többmezős variációs elveken alapuló végeselem-modellek felépítésének egyik kulcslépése a numerikusan stabil approximációs terek megválasztása. A (6) funkcionálon alapuló, feszültségfüggvény-mezőre és forgásmezőre épülő elem-modellek approximációs tereinek megválasztása a [17]-ben kimutatott azon analógia alapján történhet, miszerint a (6)-ra épülő variációs formalizmus analógiát mutat a folyadékok Stokes-féle áramlásának sebességmezőn és nyomáson alapuló variációs megfogalmazásával. Ez az analógia lehetővé teszi a [18] által kidolgozott stabil approximációs terek alkalmazását. A következőkben a négyszögelemekre [18]-ban kidolgozott hat stabil függvényter közül egy numerikus szempontból optimális teret mutatunk be.

A ψ feszültségfüggvény-vektor és a φ szögelfordulás, mint független mezők közelítése során feltételezzük, hogy a konvex négyszögekre bontott Ω tartomány x, y koordinátákkal parametrizált négyszögelemei és a mesterelem ξ, η koordinátákkal parametrizált négyzete között egy-egy sima, a geometriai viszonyok által meghatározott és ismertnek tekintett leképező függvény létesít kapcsolatot. Az

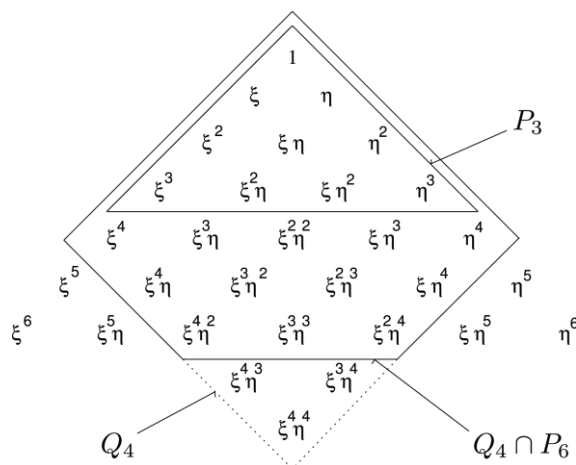
$$\hat{e} = (\xi, \eta): -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1 \tag{23}$$

módon jelölt mesterelemen a feszültségfüggvényeket és a forgásmezőt polinomterekkel közelítjük, amelyek fokszámára a továbbiakban a p paraméter utal ($p > 0$ egész szám).

Jelölje $P_p(\xi, \eta)$ azokat a polinomokat, amelyek maximális fokszáma p , és jelölje $Q_p(\xi, \eta)$ azokat a polinomokat, amelyek fokszáma mindkét változóra nézve p . Jelölje továbbá a ψ_x és a ψ_y feszültségfüggvények approximációs terét $\mathbb{V}_p(\xi, \eta)$, a φ szögelfordulás approximációs terét pedig $\mathbb{W}_p(\xi, \eta)$. Ekkor a mesterelemen $p \geq 2$ esetén a következő stabil approximációs tereket értelmezzük a feszültségfüggvényekre és a szögelfordulásra [18]:

$$\text{DMX: } \mathbb{V}_p(\xi, \eta) = Q_p \cap P_{p+2}, \quad \mathbb{W}_p(\xi, \eta) = P_{p-1}. \tag{24}$$

A DMX jelölés a *dual-mixed* elemre utal, a továbbiakban ezen a néven hivatkozunk az elemre. A $\mathbb{V}_p(\xi, \eta)$ és a $\mathbb{W}_p(\xi, \eta)$ approximációs tereket $p = 4$ esetén – Pascal-féle háromszöget alkalmazva – az 1. ábra szemlélteti. A DMX elem szabadsági fokok szempontjából egy optimális approximációs térrel rendelkezik a ψ feszültségfüggvényre és a φ forgásmezőre nézve [18].

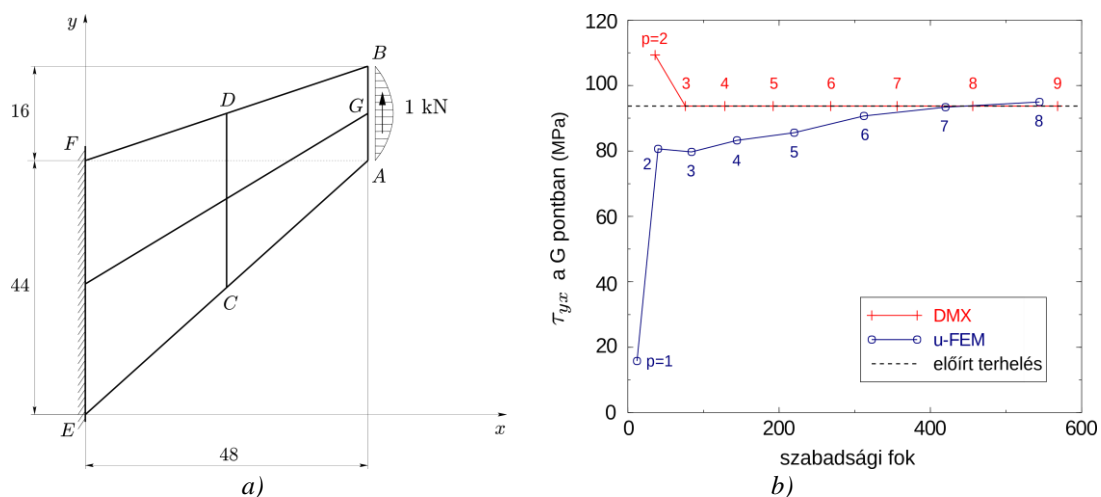


1. ábra. A DMX elem (24) szerinti approximációs tere $p = 4$ esetén

4. A Cook-féle probléma

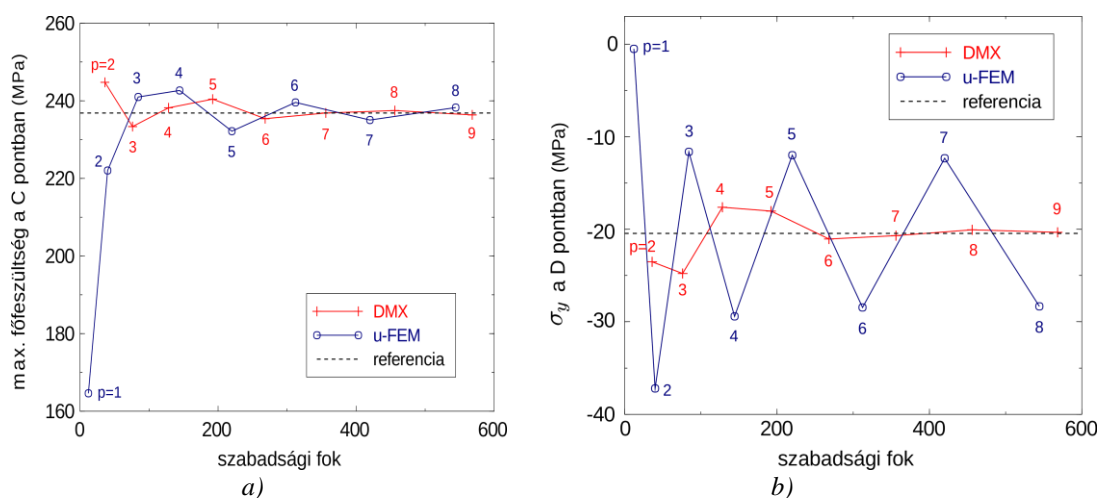
Ebben a részben az előző fejezetben ismertetett p -verziós végelem-modellel, illetve az arra épülő végelem-programmal számított numerikus eredményeket mutatunk be a Cook [19] által javasolt, jellegzetesen hajlítás-domináns sík-rugalmasságtani feladat estében. A probléma egzakt megoldása a lineáris rugalmasságtan keretei között sem ismert, mégis gyakori tesztfeladata a különböző végelem-típusoknak, lásd pl. [20][21][23][24]. Meg kell azonban jegyezni, hogy a feszültségmezőre vonatkozó eredmények és összevetések ezen az egyszerű feladat esetében is csak elvétve találhatók a szakirodalomban.

A Cook-féle probléma vázlatja a 2.a) ábrán látható. A trapéz alakú, EF oldala mentén mereven befozott, z irányban egységnyi vastagságú panelt az AB oldala mentén másodfokú függvény szerint megoszló, y irányú nyíróerő terhel, amelynek nagysága 1 kN. A parabola eloszlású terhelésből következően a maximális nyírófeszültség az AB oldalél G pontjában ébred, értéke $\tau_{yx}(G) = 93,75$ MPa. A numerikus megoldást sík-feszültségi állapot feltételezésével, a rugalmassági modulus $E = 1$ MPa és a Poisson-tényező $\nu = 1/3$ értékei esetén vizsgáljuk, alkalmazva a szakirodalomban közölt paramétereket. Megjegyzést érdemel, hogy az AB oldalél mentén ható koncentrált erőt a szakirodalomban többnyire konstans eloszlású megoszló terheléssel modellezik, ami az A és B sarokpontokban sérti a nyírófeszültségre vonatkozó szimmetria feltételt. Az így előállított és közölt, elmozdulásmezőre vonatkozó megoldások kis mértékben különböznek a parabola eloszlásúként modellezett nyíróerővel kapott eredményektől.



2. ábra. a) Cook-féle probléma – geometria és terhelés; b) τ_{yx} nyírófeszültség konvergenciája a G pontban

A vizsgálatok során a klasszikus, elmozdulásmezőre épülő p -verziós végelem-modell és a DMX jelű, feszültségfüggvény-mezőre és forgásmezőre épülő végelem-modell numerikus eredményeit hasonlítjuk össze a 2.a) ábrán látható, 4 elemet tartalmazó, durva felosztás esetén. Az E és F pontoknál megjelenő szingularitások miatt ez a végeselemes felosztás nem tekinthető megfelelőnek, a vizsgálatok célja viszont éppen az ilyen durva felosztásra vonatkozó eredmények összevetése, illetve a feszültségfüggvény-mezőre és forgásmezőre épülő p -verziós elemek hatékonyságának bemutatása. Egzakt megoldás hiányában az eredményeket egy olyan, a DMX elem alkalmazásával kapott, 256 elemből álló felosztással, $p=8$ esetén számolt referencia megoldáshoz viszonyítjuk, amelynek energia normában becsült hibája 0,01%-nál kisebb. Az elmozdulásmezőn alapuló p -verziós elemekkel számolt megoldásra a továbbiakban az u-FEM jelölés utal.



3. ábra. a) Maximális főfeszültség konvergenciája a C pontban; b) σ_y feszültség konvergenciája a D pontban

A 2.b) ábra azt szemlélteti, hogy a végeselemes megoldások milyen pontosan adják vissza a τ_{yx} nyírófeszültségre előírt peremfeltételt a G pontban. Látható, hogy a DMX elem $p > 3$ esetén a pontos, $\tau_{yx} = 93,75$ MPa értéket adja vissza, az u-FEM csak magasabb p értékek esetében közelíti azt. A 3.a) ábra a C pontbeli maximális főfeszültség konvergenciáját szemlélteti. A referencia megoldás értéke $\sigma_1^{\text{ref}}(C) = 236,9$ MPa. A szakirodalomban ismert legjobb megoldás – konstans eloszlású terhelésnél – $\sigma_1(D) = 236,0$ MPa. Látható, hogy a konvergencia görbék magasabb p esetén hasonlóak, alacsony p esetén viszont a DMX elem jobb megoldást ad, mint az u-FEM. A 3.b) ábra a D pontbeli σ_y normálfeszültség konvergenciáját mutatja. A referencia megoldás értéke $\sigma_y^{\text{ref}}(D) = 20,36$ MPa. A szakirodalomban ismert legjobb megoldás – konstans eloszlású terhelésnél – $\sigma_y(D) = 20,10$ MPa. Megállapítható, hogy a DMX elem konvergenciája éppen olyan jó, mint a főfeszültségek esetében, az u-FEM szerinti megoldás viszont nem mutat konvergenciát, p növekedésével az elmozdulásmodellel számolt feszültségek a referencia megoldás körül – meglehetősen nagy amplitúdóval – oszcillálnak.

5. Összegzés

A feszültségi változók közvetlen approximációján alapuló végeselem-modelleket elsősorban olyan szilárdságtani problémáknál célszerű alkalmazni, amikor a hagyományos, elmozdulásmezőn alapuló végeselemeknél numerikus konvergencia problémák jelentkeznek. Közös ismertetőjele az ilyen feladattípusoknak, hogy a numerikus megoldás konvergenciája valamilyen jellemző paraméter értékétől függ, amelynek – fizikai jelentőséggel bíró – határértékénél a megoldás konvergenciája nem biztosítható. A legismertebb problémák közé tartoznak az összenyomhatatlan anyagok, valamint a vékony falú szerkezetek (lemezek és héjak) peremérték-feladatai. A sík-rugalmaságtani feladatokra és lemezekre [15, 16]-ban kifejlesztett, elsőrendű feszültségfüggvényeken és forgásokon alapuló végeselem-modellel viselkedését ez a cikk egy olyan egyszerű – a szakirodalomban gyakran vizsgált – hajlítás-domináns tesztfeladat megoldásán keresztül mutatja be, amelyben semmilyen kritikus paraméter nem jelenik meg. A p -verziós megoldásokat az elmozdulásmezőn alapuló, ugyancsak p -verziós – tehát kiváló approximációs tulajdonságokkal rendelkező – végeselem-modellekkel vetettük össze néhány jellemző pontbeli feszültség konvergenciáján keresztül. Megállapítható, hogy a vizsgált feladat esetében mindkét elem-modellel

kiváló eredményeket produkál, azonban a *dual-mixed* elem a feszültségi értékek gyorsabb konvergenciáját eredményezi, amely legszembetűnőbben a feszültségi peremfeltétel teljesülésénél jelentkezik.

Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatалodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Irodalom

- [1] Szabó, B., Babuška, I.: *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [2] Boffi, D., Brezzi, F., Fortin, M.: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods and Applications*, Springer-Verlag, New York, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5>
- [3] Roberts, J. E., Thomas J.-M.: *Mixed and hybrid methods*. In Handbook of Numerical Analysis, Vol. II. (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 523-639, 1991. [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80041-9](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80041-9)
- [4] Gallagher, R. H., Dhalla, A. K.: *Direct flexibility finite element elastoplastic analysis*, Proceedings of the First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Part M, 6/9, pp. 444-462, Berlin, 1971.
- [5] Fraeijs de Veubeke, B. M., Millard, A.: *Discretization of stress fields in the finite element method*, Journal of the Franklin Institute, 302 (1976) pp. 389-412. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(76\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(76)90032-6)
- [6] Gallagher, R. H.: *Finite element structural analysis and complementary energy*, Finite Element in Analysis and Design, 13 (1993) pp. 115-126. [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(93\)90051-Q](https://doi.org/10.1016/0168-874X(93)90051-Q)
- [7] Fraeijs de Veubeke, B.M.: *A new variational principle for finite elastic displacements*, International Journal for Engineering Sciences, 10 (1972) pp. 745-763. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90079-1)
- [8] Fraeijs de Veubeke, B. M.: *Diffusive equilibrium models. Lecture notes for the International Research Seminar on 'The theory and application of finite element methods'*, University of Calgary, Alberta, Canada, 1973. In: B. M. Fraeijs de Veubeke memorial volume of selected papers, (Geradin, M. ed.), Sijthoff & Noordhoff, pp. 569-628, 1980. https://doi.org/10.1007/978-94-009-9147-7_14
- [9] Fraeijs de Veubeke, B. M.: *Stress function approach*, Proc. World Cong. on Finite Element Methods in Structural Mechanics, J.1-J.51, Bournemouth, U.K., 1975.
- [10] Atluri, S. N., Murakawa, H.: *On hybrid finite element models in nonlinear solid mechanics*, In Finite Elements in Nonlinear Mechanics (Edited by Bergan, P.G. et al.), Vol. 1. pp. 3-41. Tapir Press, Trondheim, Norway, 1977.
- [11] Murakawa, H., Atluri, S. N.: *Finite elasticity solutions using hybrid finite elements based on a complementary energy principle*, Journal of Applied Mechanics, 45 (1978) pp. 539-547. <https://doi.org/10.1115/1.3424358>
- [12] Murakawa, H., Atluri, S. N.: *Finite elasticity solutions using hybrid finite elements based on a complementary energy principle, Part 2: Incompressible materials*, Journal of Applied Mechanics, 46 (1979) pp. 71-77. <https://doi.org/10.1115/1.3424531>

- [13] Atluri, S. N.: *On some new general and complementary energy theorems for the rate problems of finite strain, classical elasto-plasticity*, Journal of Structural Mechanics, 8 (1980) pp. 61-92. <https://doi.org/10.1080/03601218008907353>
- [14] Reed, K. W., Atluri, S. N.: *Hybrid stress finite elements for large deformations of inelastic solids*, Computers & Structures, 19 (1984) pp. 175-182. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90216-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90216-5)
- [15] Bertóti, E.: *Dual-mixed hp finite element methods using first-order stress functions and rotations*, Computational Mechanics, 26 (2000) pp. 39-51. <https://doi.org/10.1007/s004660000148>
- [16] Bertóti, E.: *Dual-mixed p and hp finite element methods for elastic membrane problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53 (2002) pp. 3-29. <https://doi.org/10.1002/nme.389>
- [17] Farhloul, M., Fortin, M.: *Dual hybrid methods for the elasticity and the Stokes problems: a unified approach*, Numerische Mathematik, 76 (1997) pp. 419-440. <https://doi.org/10.1007/s002110050270>
- [18] Suri, M., Stenberg, R.: *Mixed hp finite element methods for problems in elasticity and Stokes flow*, Numerische Mathematik, 72 (1996) pp. 367-389. <https://doi.org/10.1007/s002110050174>
- [19] Cook, R. D.: *Improved two dimensional finite elements*, ASCE Journal of Structural Engineering, ST6 (1974) pp. 1851-1863.
- [20] Cazzani, A., Atluri, S. N.: *Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes*, Computational Mechanics, 11 (1993) pp. 229-251. <https://doi.org/10.1007/BF00371864>
- [21] Schröder, J., Klaas, O., Stein, E., Mische, C.: *A physically nonlinear dual mixed finite element formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 144 (1997) pp. 77-92. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01169-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01169-3)
- [22] Ko, Y., Lee, P.-S., Bathe, K.-J.: *The MITC4+ shell element and its performance*, Computers & Structures, 169 (2016) pp. 57-68. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.03.002>
- [23] Fortas, L., Belounar, L., Merzouki, T.: *Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures*, International Journal of Advanced Structural Engineering, 11 (2019) pp. 9-18. <https://doi.org/10.1007/s40091-019-00251-9>