

# A kvantumfizika elemei

## III. Az elektromágneses tér

### A fény kvantumos szerkezete

Előző két cikkünkben áttekintettük a kvantummechanika alapfogalmait. A kvantummechanika lépett a klasszikus mechanika helyébe, ennek alapján tárgyalható az atomi részecskék, tömegpontok mozgása. Tudjuk azonban, hogy a természeti jelenségek lefolyásában a mechanikai részecskék mellett egyenrangúan fontos szerep jut az elektromágneses térnek is. Már a hőmérsékleti sugárzás tárgyalásánál láttuk, hogy a klasszikus elektrodinamika nem írja le mindig kielégítő módon az elektromágneses jelenségeket. A kvantumfizika születése egybeesik az elektromágneses tér kvantumos sajátosságainak felfedezésével. Sorozatunk harmadik, befejező részében az elektromágneses tér kvantumelméletének, a kvantumelektrodinamikának alapfogolatait szeretnénk bemutatni.

A Planck-törvény és a fényelektromos jelenség bebizonyították, hogy az elektromágneses sugárzás kvantált: a térenergia csak meghatározott diszkrét értékek felvételére képes. Ezt még számos más megfigyelés is bizonyítja. Kimutatták, hogy a fényelektromos jelenségnél az elektronok kilépése a megvilágítás kezdete után  $10^{-8}$  sec-on belül megkezdődik, noha gyenge fény használata esetén egy atomnak napokig kellene várnia, hogy a hullámoptika szerint az elektromágneses hullámból az elektron kilépéséhez szükséges energiaadagot összegyűjtse.

Egy másik kísérlet a gyenge fénysugár intenzitásának a kvantumos jelleg következtében fellépő ingadozásait mutatta ki. Vavilov megfigyelései igazolták, hogy az egyes energiakvantumok szemünkbe érkezése egymástól függetlenül, Poisson-eloszlás szerint történik, a kvantumok számának ingadozása az átlagos szám négyzetgyökével arányos.

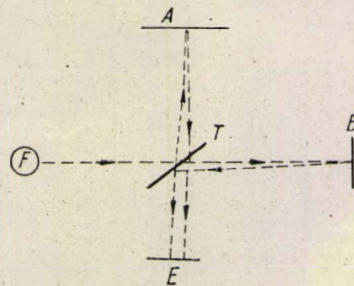
A  $h\nu$  energiakvantumokat Einstein nyomán megszemélyesíthetjük. Úgy lehet tekinteni, hogy a sugárzás valamilyen gázhoz hasonlóan részecskékből, fotonokból áll. Egy foton energiája  $h\nu$ , impulzusa  $h\nu/c$ , mozgássebessége  $c$ . Ezek összessége, a fotongáz alkotja az elektromágneses sugárzási teret.

A kvantumos jelleg felismerése mellett sem szabad megfeledkeznünk a fény hullámtermészetéről. Két részecskenyaláb találkozására mindig növeli a nyaláb intenzitását. Azt viszont évszázadok óta tudjuk, hogy koherens fénysugarak találkozására intenzitás-lecsökkenést, esetleg teljes kioltást eredményezhet. A fényinterferencia és fényelhajlás éppoly biztosan mutatta a fény hullámjellegét, mint az előbb felsorolt kísérletek a részecskejellegét. Nem arról kellett vitatkozni, hogy a fény hullám vagy részecske. A fénysugár biztosan mutatja mind az interferenciaképességet,

mind a kvantumos szerkezetet. Csak az lehetett a kérdés, miként egyeztethető össze ez a két tulajdonság.

A foton-hipotézis felállításakor Einstein tisztán látta a problémát. Ő a következő képet alkotta a fotonról (1905): Az egyes atomok  $h\nu$  energiájú hullámcsomókat sugároznak ki magukból. A térben kis helyre lokalizált energiacsomagon belül teljesen érvényesül a fény hullámjellege, egyezésként a Maxwell-féle elektrodinamikával. A foton tehát egy keskeny, kis keresztmetszetű, véges hosszúságú hullámvonulat (tűsugárzás). Ha egy ilyen vonulat esik egy atomra, átadja ennek teljes  $h\nu$  energiáját és létrejön a fényelektromos jelenség. Ha viszont a hullámvonulatot egy félig áteresztő tükörrel kettéválasztjuk, majd különböző utak befutása után újra egyesítjük, a vonulat két koherens része interferál egymással. Régi megfigyelés, hogy interferencia csak addig van, amíg az útkülönbség egy adott érték fölé nem nő. Ez megadja a hullámvonulatok hosszát, az  $l$  m körül van.

A tűsugárzás-elmélet szemléletes volta miatt hamar elterjedt. Hogy mégsem ad tökéletes leírást, azt legmeggyőzőbben Selényi Pál mutatta meg (1911), amikor kísérletileg igazolta a fényforrásból nagy szög (közel  $180^\circ$ ) alatt kilépő fényhullámok interferenciaképességét. A kísérletből arra kell következtetni, hogy az egy atom által kibocsátott elemi fényhullámok nem kis térszögbe irányítottan, hanem gömbhullámszerűen terjednek tovább. (Különböző atomokból kilépő hullámok általában nem interferenciaképesek.) Nem egyeztethető össze a tűsugárzás-elmélettel a klasszikus optikának az a tapasztalati alátámasztott eredménye sem, hogy az optikai rács felbontóképességét a rések száma határozza meg. Eszerint az interferencia-kép alakja függ a rács egész szélességétől, amely decimétert is elérhet. Egy sugár-tű viszont legfeljebb egy-két résről vehetne tudomást (1. ábra).



1. ábra

A fény kettős természetéből származó dilemmát szépen mutatja a két kísérlet egybevetése. Michelson a  $F$  fényforrásból kilépő fénysugarat a  $T$  félig áteresztő tükörrel kettéválasztotta. A két sugarat az  $A$  és  $B$  tükörrel reflektáltatva,  $T$  fel-



használásával újra egyesítette. Az  $E$  ernyőn a  $TAT$  és  $TBT$  utak különbözőségétől függően interferencia volt megfigyelhető. A kísérlet igen kis fényintenzitások esetén is (Náray) arra az eredményre vezetett, hogy az  $E$ -nél kialakuló interferenciakép mind az  $A$ , mind a  $B$  tükör helyzetétől függ. Ilyenkor egyidejűleg legfeljebb  $h\nu$  energia tartózkodik a berendezésben. Azt kell tehát mondanunk, hogy a „foton” az  $A$  és  $B$  tükörrel egyaránt „észlette”.

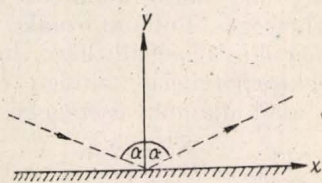
A másik kísérletet Ádám, Jánossy és Varga végezték el. Az  $A$  és  $B$  tükrök helyére foton-számlálót tettek. Azt tapasztalták, hogy a foton vagy az  $A$ , vagy a  $B$  helyen abszorbeálódik. Koincidenciák (véletlen összeesésektől eltekintve) nincsenek. Eszerint a  $h\nu$  energia vagy a  $TA$  ágban, vagy a  $TB$  ágban fut.

A fény kettős természetének magyarázatát keresve kézenfekvő a kvantummechanikában elektron esetére megismert értelmezés alkalmazását megkísérlni. Born nyomán elképzelhetjük, hogy szoros értelemben vett fizikai realitása a fényrészecskének, fotónak van, ez az energia, impulzus hordozója. A foton pontos mozgása azonban nem követhető nyomon, csak valószínűségi leírás adható. A fényhullám kitérésének négyzete arányos annak valószínűségével, hogy a részecskét a kérdéses helyen megtaláljuk. Az interferenciánál a maximumok a valószínű becsapódási helyeket jelentik, a fényhullámok nem az energia hordozói, hanem a fényrészecske kísérői, vezetői, csak az energiakvantum helyének valószínűségeloszlását szabják meg.

Az ilyen fényrészecskének a feltételezése azonban szintén nehézségekkel jár. A problémák közül egyet említsünk meg. Ha fényhullám esik tükröző felületre, a beeső és visszavert hullám szuperpozíciójából álló hullámok alakulnak ki. Az elektromos térerősség alakja:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= a \cos 2\pi \left( \nu t - \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\lambda} \right) + \\ &+ a \cos 2\pi \left( \nu t - \frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\lambda} \right) = \\ &= 2a \cos 2\pi \left( \frac{y \sin \alpha}{\lambda} \right) \cos 2\pi \left( \frac{\nu t + x \sin \alpha}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Ez olyan eredő hullámnak felel meg, amelynek amplitúdója a felületre merőleges irányban periódikusan változik. A zérus amplitúdójú helyek távolsága  $\lambda/2 \cos \alpha$ . A jelenséget Wiener ki is mutatta: a tükörhöz képest szög alatt elhelyezett átlátszó fényérzékeny lemezen előhívás után nem egyenletes feketedés, hanem sötét és világos



2. ábra

csíkok váltakozása volt megfigyelhető. Ez az eredmény nehezen volna magyarázható fényrészecskéket feltételezésével. A fényforrásból érkező és a tükrön visszapattanó részecskének okvetlenül át kellene haladniuk a zérus intenzitású helyeken, így abszorbeálódhatnának az oda elhelyezett AgBr-molekulákon. Ez pedig nem következik be.

*A kvantummechanika és a sugárzási jelenségek kapcsolata*

Mielőtt rátérnénk a fenti problémák megoldásának megbeszélésére, pár szóval foglalkoznunk kell a kvantummechanika és a sugárzási jelenségek kapcsolatával.

A kvantummechanika alapegyenleteiből levezetett határozatlansági összefüggés szerint egy elektron helye és impulzusa egyidejűleg nem határozható meg teljes pontossággal. Márpedig a klasszikus elektrodinamika szerint nem volna akadály a rövid hullámhosszú és egyszersmind kis energiájú-impulzusú fénysugár használatának, ezáltal az elektron impulzusát meg nem zavaró pontos helymérés elvégzésének. A kvantummechanika és a klasszikus elektrodinamika egyidejű alkalmazása tehát ellentmondásra vezet.

A másik kérdés, melyről szólnunk kell, a gerjesztett atomállapotok kérdése. A hidrogén-atom elektronjának állapotegyenlete, ha  $\mathcal{U}(t)$  vektorpotenciállal leírt külső elektromágneses tér (fényhullám) jelenlétét is megengedjük, (II. 10) szerint

$$\frac{i\hbar \partial \psi}{2\pi \partial t} = \left( \mathbf{H} + \frac{e}{mc} \mathcal{U}(t) \mathbf{p}(t) \right) \psi. \quad (1)$$

Itt  $\mathbf{H}$  a hidrogénatom energiaoperátora. Ha nincs jelen fényhullám,  $\mathcal{U}(t) = 0$ , így visszajutunk a zavartalan hidrogénatom egyenletéhez. Ennek megoldása például

$$\psi = \varphi_n(xyz) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_n t}, \quad \mathbf{H} \varphi_n = E_n \varphi_n, \quad (2)$$

ahol  $E_n$  lehet a hidrogénatom egyik gerjesztett energiaértéke ( $n > 1$ ),  $\varphi_n$  a megfelelő sajátfüggvény. Ha az atomot fény éri,  $\mathcal{U}(t) \neq 0$ , akkor (2) már nem elégíti ki az állapotegyenletet, átmenet történik más  $E_{n'}$  atomállapotokba. ( $E_{n'} > E_n$  esetén abszorpcióról,  $E_{n'} < E_n$  esetén indukált fényemisszióról beszélünk.) De ha az atomi elektronra külső tér nem hat,  $\mathcal{U}(t) = 0$ , akkor (2) az (1)-nek megoldása. Ez azt jelenti, hogy az (1) állapotegyenlet szerint a magára hagyott atom tartósan megmarad stacionárius gerjesztett állapotában. Mindennapos tapasztalat azonban, hogy a valóságban a gerjesztett atomállapot igen rövid életű, egymilliomod másodperc törtrésze alatt önként bekövetkezik az alapállapotba való átmenet. Az ilyen spontán fényemissziót, melynek kiváltásához nem szükséges külső behatás, a kvantummechanika önmagában nem képes megmagyarázni.



## A kvantumelektrodinamika felállítása

A kísérletek kétségeket kizárva bebizonyították a fényemisszió és abszorpció kvantumosságát. Viszont az is kiderült, hogy az egyes fénykvantumokhoz nem rendelhető jól definiált pálya, haladásuk a térben nem lokalizálható. (Gondoljunk a Michelson—Jánossy- vagy a Wiener-kísérletre.) A nagyszámú kísérlet (amelyeknek csak csekély hányadáról esett itt szó) végül kijelölte az utat, melyen haladni kell. Az egyes vonulatok nem tekinthetők az energia Maxwell-féle értelemben vett folytonos hordozójának, de a fénykvantumok sem tárgyalhatók klasszikus részecskeként. Az egész elektromágneses teret azonban kétségkívül energia-, impulzus-, impulzusmomentum-hordozó fizikai realitásnak kell tekintenünk. *Az elektromágneses tér egésze állítandó párhuzamba az elektronokkal, atomokkal, molekulákkal, nem talán egyetlen  $h\nu$  energiakvantum.*

A mondottakat talán szabad egy példával illusztrálnunk. Az elektromágneses teret a Postatakarékpénztárhoz hasonlíthatjuk. Ha pénzt akarok Budapestről szegedi nagybácsimnak küldeni, be kell mennem egy postahivatalba és ott „emittálnom” kell bizonyos pénzösszeget, amely beolvad a Postatakarék vagyónába. Ez az összeg nem folytonos, hanem csak egy elemi pénzkvantumnak, a fillérnek egész számú többszöröse lehet (ami azonban nem jelenti azt, hogy az összegben adott számú alumíniumfillér halmazát kell látnunk). Bizonyos idő elteltével megjelenik szegedi nagybácsimnál a postás és ekkor a nagybácsi „abszorbeálja” a fenti összeget. A pénzösszeg közben is létezett, nyilván a Postatakarék együttes vagyónának részét képezte. De ha a postához intézett kérdésekkel vagy másként megpróbáljuk kinyomozni, hogy az általam emittált pénzérmék vagy bankjegyek miként, milyen járművel, milyen vasúti vonalon vagy országúton jutottak el szegedi nagybácsimhoz, nyilván furcsán néznének rám a postahivatalnokok és tudtomra adnák, hogy kérdésem értelmetlen, valami absztrakt postautalvány- és csekk-hálózatot emlegetnének. Hasonló sikertelenséggel járna az a kérdésem is, hogy az általam „emittált” százás bankó hol, melyik geometriai helyen szakadt szét a nagybátyám által kézhez kapott két ötvenesre.

Valami hasonló elképzelés alakult ki a kutatók fejében az elektromágneses térről. Ugyanazt a módszert, amelyet a (véges számú szabadsági fokkal rendelkező) elektronra, atomra a kvantummechanikában sikerrel alkalmaztak, vitték át a (végtelen sok szabadsági fokú) elektromágneses térre, miként azt a hőmérsékleti sugárzás elméletében röviden már láttuk is. A kvantumelektrodinamika felállítása *Dirac, Fermi, Heisenberg, Pauli* nevéhez fűződik (1927—1930).

*A sugárzási tér, mint végtelen szabadsági fokú mechanikai rendszer*

Az elektromágneses tér mindig két részre bontható fel. Az egyik rész az elektrosztatikus

Coulomb-tér, amely a töltött részecskék körül alakul ki és amelynek nagysága kizárólag a részecskék koordinátáitól függ. Ezt a teret írhatjuk le az  $U$  skalárpotenciállal.  $U$  értéke:

$$U = \sum_i \frac{e_i}{r_i},$$

a  $j$ -ik elektron potenciális energiája az  $U$  által leírt sztatikus térben

$$V(x_j) = e_j U(x_j) = \sum_i \frac{e_i e_j}{r_{ij}}, \quad \text{ahol}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

Látható, hogy a Coulomb-tér egyszerűen figyelembevehető a kvantummechanika szokásos keretei közt, mint potenciális energia, amely a kölcsönható részecskék helykoordinátáitól függ.

Az elektromágneses tér másik része a sugárzási tér, amely már nincs a töltésekhez kötve, hanem a mechanikai részecskékről leválva, saját önálló törvényei szerint alakulhat, terjedhet tova, szállíthat energiát és impulzust. A sugárzási teret észleljük elektromágneses hullámok, ill. fotonok formájában. A sugárzási tér leírására az  $\mathfrak{A}$  vektorpotenciált használjuk.  $\mathfrak{A}$  a hullámegyenletet elégíti ki, amely árammentes térben

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Ezenkívül tudjuk, hogy a hullámok transzverzálisak. Az  $\mathfrak{A}$  vektor mindig merőleges a terjedési irányra. Az  $U$  skalár- és  $\mathfrak{A}$  vektorpotenciálból képezhetők a térerősségek:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_{szl} + \mathfrak{E}_{sug}, \quad \mathfrak{E}_{szl} = -\text{grad } U, \\ \mathfrak{E}_{sug} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{sug} = \text{rot } \mathfrak{A}. \end{aligned} \quad (4)$$

*A továbbiakban elegendő sugárzási térrel foglalkozni, mert ezzel kapcsolatosak az elektromágneses tér önálló, mechanikai testektől független szabadsági fokai.* A kvantumfizikai tárgyalás megköveteli, hogy minden fizikai mennyiséghez operátorokat rendeljünk. Mivel (4) és (1) szerint a térerősségek és minden más térmennyiség visszavezethetők a vektorpotenciálra, elegendő meghatározni a vektorpotenciál operátorát.

Tekintsünk egy  $v$  térfogatú kocka alakú tartományt, amely magában foglalja a szemügyre vett mechanikai rendszert és elektromágneses teret. Határfeltételként írjuk elő, hogy a vektorpotenciál a határfelület átellenes pontjain egyenlő értékeket vegyen fel. (Ilyen kocka lehet pl. egy vezetőfalú üregrezonátor, vagy pedig a vákuumban elképzelt, elég nagy oldalélű tartomány). Ebben a lehetséges hullámformák álló (vagy azok kombinációjával előállítható haladó) hullámok. A vektorpotenciál minden esetben felírható ilyen állóhullámok összegeként:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k e_k q_k(t) \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k \mathbf{a}_k \mathbf{r} + \delta_k\right). \quad (5)$$



(Itt  $a_k$  a terjedési irányt,  $e_k$  az erre merőleges polarizációs irányt kijelölő egységvektor,  $\nu_k$  a frekvencia,  $r$  az  $x, y, z$  koordinátákból, mint komponensekből megalkotott helyzetvektor,  $\delta_k$  pedig a fázisállandó). Azt a körülményt, hogy a vektorpotenciál mindig felírható az (5) alatt megadott sor alakjában, a matematikus úgy fejezi ki, hogy a trigonometrikus függvények teljes függvényrendszert alkotnak, és ezért (3) minden megoldása Fourier-sorba fejthető.

A  $q_k(t)$  amplitúdók írják le az erőtér intenzitását, időbeli változását. A  $k$  index az egyes sajátrezgéseket különbözteti meg. Mivel  $\nu$  és  $\nu + d\nu$  közé eső frekvenciatartományban (I. 1) szerint

$$dN_\nu = \frac{8\pi\nu}{c^2} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

számú sajátrezgés alakulhat ki, és mivel  $\nu$  a zérus és végtelen közt változhatik, a rezgésformák száma végtelen. Ez azt jelenti, hogy a tér pillanatnyi állapotának rögzítéséhez végtelen sok  $q_k(t)$  időfüggvény megadása szükséges. A  $q_k(t)$  függvényeket az elektromágneses sugárzási tér koordinátáinak tekinthetjük. Segítségükkel a teret úgy írhatjuk le, mint egy végtelen szabadsági fokú, végtelen sok koordinátával jellemezhető mechanikai rendszert.

A  $q_k(t)$  „koordináták” időbeli változását megszabó „mozgásegyenlethez” a következőképpen juthatunk el: Helyettesítsük az (5) kifejezést a (3) hullámegyenletbe. Kapjuk:

$$-\sum_k (\ddot{q}_k + 4\pi^2 \nu_k^2 q_k) \frac{1}{c^2} e_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k\right) = 0.$$

A trigonometrikus függvények rendszerének teljesége miatt a baloldal csak akkor lehet zérus  $x, y, z$ , azaz  $r$  minden értékére, ha az együttartók külön-külön zérusok:

$$\ddot{q}_k + 4\pi^2 \nu_k^2 q_k = 0. \quad (7)$$

Látható, hogy minden egyes  $q_k(t)$  „koordináta” a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletét elégíti ki.

Képezzük tiszta sugárzási térben ( $U = 0$ ) a térerősségeket. (4) és (5) alapján

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \\ &= -\frac{1}{c} \sum_k e_k \dot{q}_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k\right), \quad (8) \\ \mathfrak{H} &= \text{rot } \mathfrak{A} = \\ &= \frac{2\pi}{c} \sum_k (a_k \times e_k) q_k \cos\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k\right). \quad (9) \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva megalkothatjuk a téreenergia kifejezését is. Az elektrodinamika ismert képlete szerint

$$E = \frac{1}{8\pi} \int_v (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dv = \frac{v}{8\pi} (\overline{\mathfrak{E}^2} + \overline{\mathfrak{H}^2}). \quad (10)$$

A felülhúzás térbeli átlagot jelent. A vegyes szorzatok átlagértéke nyilvánvalóan zérus,  $\cos^2 = \sin^2 = 1/2$ ,  $|a_k \times e_k| = 1$ , ezért

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2c^2} \sum_k \dot{q}_k^2, \quad \overline{\mathfrak{H}^2} = \frac{4\pi^2}{c^2} \sum_k \nu_k^2 q_k^2,$$

tehát

$$E = \frac{v}{8\pi c^2} \sum_k \left( \frac{1}{2} \dot{q}_k^2 + 2\pi^2 \nu_k^2 q_k^2 \right). \quad (11)$$

A téreenergia tehát oszcillátor-energiakifejezések összege. Eredményünket abban foglalhatjuk össze, hogy az elektromágneses tér olyan végtelen sok szabadsági fokú mechanikai rendszerrel ekvivalens, amely harmonikus oszcillátorokból tevődik össze. Ez Jeans tétele, amellyel a hőmérsékleti sugárzás tárgyalásánál már találkoztunk.

#### Áttérés a kvantumelméleti tárgyalásra

Hasonlítsuk össze a  $k$ -ik sajátrezgés

$$E_k = \frac{v}{8\pi c^2} (\dot{q}_k^2 + 4\pi^2 \nu_k^2 q_k^2)$$

energiaképletét a mechanikai oszcillátor

$$E_M = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4\pi^2 \nu^2 x^2) = \frac{p^2}{2m} + \pi^2 \nu^2 x^2$$

energiakifejezésével. Látható, hogy (12) megegyezik egy  $m = v/8\pi c^2$  tömegű és  $\nu_k$  frekvenciájú mechanikai oszcillátor energiájával. Ezt az analógiát felhasználva az elektromágneses oszcillátoroknál is értelmezhető a  $q_k$  koordinátához kanonikusan konjugált impulzus:

$$p_k = m \dot{q}_k = \frac{v}{16\pi c^2} \dot{q}_k. \quad (12)$$

Az energia az

$$E = \sum_k \left( \frac{8\pi c^2}{v} p_k^2 + \frac{v\pi\nu_k^2}{4c^2} q_k^2 \right), \quad (13)$$

az elektromos térerősség pedig az

$$\mathfrak{E} = -\frac{16\pi c}{v} \sum_k e_k p_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k\right) \quad (14)$$

alakban írható a kanonikusan konjugált mennyiségek felhasználásával.

A kvantumelméleti tárgyalásra való áttérés módja ezek után már egyértelműen ki van jelölve. Minden fizikai mennyiséget, így  $\mathfrak{A}$ -t,  $\mathfrak{E}$ -t,  $\mathfrak{H}$ -t,  $E$ -t operátornak kell tekintenünk. A kanonikusan konjugált párokat egymással fel nem cserélhető operátorok írják le, fennáll most is az (I. 15) alatt megismert Heisenberg-féle felcserélési törvény:

$$p_k q_l - q_l p_k = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{kl}. \quad (15)$$

Az összes többi párok felcserélhetőek.

Az operátorok konkrét alakját ismerve könnyen meghatározhatjuk most is az egyes fizikai mennyiségek sajátértékeit, egyidejű mérhetőségének



feltételét stb. E célból használhatjuk a Schrödinger-féle differenciáloperátorokat, de most előnyösebb az (I. 18) alatt bevezetett  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{a}^*$  operátor alkalmazása. Legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= \sqrt{\frac{\nu \nu}{16 h c^2}} \left( \mathbf{q}_k + i \frac{8 c^2}{\nu \nu} \mathbf{p}_k \right), \\ \mathbf{a}_k^* &= \sqrt{\frac{\nu \nu}{16 h c^2}} \left( \mathbf{q}_k - i \frac{8 c^2}{\nu \nu} \mathbf{p}_k \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Ezek (15) és (16) szerint a következő felcserélési törvénynek tesznek eleget:

$$\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* - \mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k = 1. \quad (17)$$

A különböző indexű operátorok egymással felcserélhetők.

A sugárzási tér energiaoperátora (13), (16) és (17) alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{ sug }} &= \sum_k \left( \frac{8 \pi c^2}{\nu} \mathbf{p}_k^2 + \frac{\nu \pi \nu_k^2}{4 c^2} \mathbf{q}_k^2 \right) = \\ &= \sum_k \frac{h \nu_k}{2} (\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^*) = \\ &= \sum_k h \nu_k \left( \mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Vezessük be most is a következő operátort:

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k. \quad (19)$$

Az (I. 21)–(I. 25) alatt követett eljárás szerint most is belátható, hogy  $\mathbf{N}_k$  sajátértékei a nemnegatív egész számok:

$$\mathbf{N}_k \varphi_k(n_k) = n_k \varphi_k(n_k), \quad \text{ahol } n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Ebből a sugárzási tér teljes energiájának lehetséges értékei is megkaphatók:

$$\mathbf{H}_{\text{ sug }} \varphi(n_1 \dots n_k \dots) = E_{\text{ sug }} \varphi(n_1 \dots n_k \dots), \quad (21)$$

ahol

$$\begin{aligned} E_{\text{ sug }} &= \sum_k h \nu_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sum_k n_k h \nu_k + E_0 \quad \left( E_0 = \frac{1}{2} \sum_k h \nu_k \right) \end{aligned} \quad (22)$$

az energiasajátérték és

$$\varphi(n_1 \dots n_k \dots) = \varphi_1(n_1) \dots \varphi_k(n_k) \dots \quad (23)$$

a megfelelő energiasajátfüggvény.

(22)-ből látható, hogy a sugárzási tér teljes energiája  $h \nu_k$  energiakvantumok összege. (Eltekintve az  $E_0$  zéruspontenergiától. Ez az additív

állandó közönséges folyamatoknál nem játszik szerepet, mert ezeknél mindig energiakülönbségekről van szó. Fizikai jelentéséről a függelékben lesz szó.) Eredményünk ilyen módon elméleti megalapozását nyújtja az (I. 10) Planck-féle feltevésnek. Ez azt jelenti, hogy a kvantumelektrodinamika alapaxiómáját képező (15) felcserélési törvény számot képes adni mind a Planck-féle sugárzási törvényről, mind az elektromágneses sugárzás kvantumosságainak egyéb következményeiről. Az egyes  $h \nu_k$  energiakvantumokhoz azonban mégsem köt olyan modellszerű képet, amilyennel Einstein, Born és mások megpróbálkoztak, nem esik szó pl. a foton pályájáról, ezért az elmélet nem kerül ellentétbe a foton klasszikus részecske-jellegét cáfoló kísérletekkel.

Ha a térenergia helyett a térimpulzus sajátértékeit számítottuk volna ki, arra az adódott volna, hogy  $h \nu_k / c$  egész számú többszöröse. A térben levő energia- és impulzuskvantumok száma megegyező.

A (19) alatt bevezetett  $\mathbf{N}_k$ -t a fentiek szerint a  *فوتونszám operátorának*  kell tekintenünk. Ennek  $\mathbf{N}_k$  sajátértéke adja meg a  $k$ -ik állóhullámra jutó energiakvantumok számát. Szemléletes jelentése van az  $\mathbf{a}_k$  és  $\mathbf{a}_k^*$  operátoroknak is. Az (I. 23) és (I. 24) képletekkel kapcsolatban mondottakat esetünkre alkalmazva, írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k \varphi_k(n) &= b_n \varphi_k(n-1), \\ \mathbf{a}_k^* \varphi_k(n) &= b'_n \varphi_k(n+1), \end{aligned} \quad (24)$$

azaz (23)-at figyelembe véve

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k \varphi(n_1 \dots n_k \dots) &= b_n \varphi(n_1 \dots n_k - 1 \dots), \\ \mathbf{a}_k^* \varphi(n_1 \dots n_k \dots) &= b'_n \varphi(n_1 \dots n_k + 1 \dots). \end{aligned} \quad (25)$$

Az  $\mathbf{a}_k$  hatása tehát abban áll, hogy a  $k$ -ik állóhullámban helyet foglaló kvantumok számát eggyel csökkenti,  $\mathbf{a}_k^*$  viszont ugyanezt eggyel növeli. ( $b_n$  és  $b'_n$  egyszerű állandó együtthatók, melyeknek megfelelő választásával a sajátfüggvények normáltsága biztosítható. Értékük könnyen kiszámítható:  $b_n = \sqrt{n}$ ,  $b'_n = \sqrt{n+1}$ , de erre nem lesz szükségünk.)  $\mathbf{a}_k$ -t *abszorpcióoperátornak*,  $\mathbf{a}_k^*$ -ot *emisszióoperátornak* nevezzük, ezek írják ke a  $\nu_k$  frekvenciájú foton elnyelését és születését.

A termennyiségek abszorpció- és emisszióoperátorokkal kifejezett alakja (5), (8), (9), (16) alapján:

$$\mathfrak{A} = \sum_k 2c \sqrt{\frac{h}{\nu_k \nu}} e_k (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*) \sin \left( \frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k \right), \quad (26)$$

$$\mathfrak{E} = \sum_k i 4\pi \sqrt{\frac{h \nu_k}{\nu}} e_k (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) \sin \left( \frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k \right), \quad (27)$$

$$\mathfrak{S} = \sum_k 4\pi \sqrt{\frac{h \nu_k}{\nu}} a_k \times e_k (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*) \cos \left( \frac{2\pi}{c} \nu_k a_k r + \delta_k \right). \quad (28)$$



A térerősségek operátor-alakja mutatja, miként egyesíti a kvantumelektrodinamika a hullám- és részecske-tulajdonságokat. A trigonometrikus helyfüggvények a hullámsajátságokat, interferenciaképességet tükrözik, az abszorpció- és emisszió-operátorok pedig a kvantált energiafelvételt és energialeadást biztosítják.

### Atomok és sugárzás kölcsönhatása

A mechanikai rendszerek (atomok) és sugárzás kölcsönhatása a fentiek alapján már könnyen leírható. Az atomot és a sugárzási teret nem két független rendszernek kell tekintenünk, hanem egyetlen rendszernek, amelynek energiája három tagból tevődik össze: az atom kvantummechanikai energiájából, a sugárzási tér energiájából és egy kis tagból, ami a kettő kölcsönhatását írja le. Ha a kölcsönhatási energiát elhanyagoljuk, nem adódik atom és sugárzás közt semmi kapcsolat: az atom nem emittálhat és nem abszorbeálhat elektromágneses energiát.

A helyzetet Fermi nyomán egyszerű példával szemléltethetjük. Az atomot jelképezze egy inga, a sugárzási teret egy mellette elhelyezett rezgő húr. Ha az inga és húr közt nincs összeköttetés, mindkettő egymástól függetlenül mozog, az energia az inga és a húr energiájának egyszerű összege. Létesítsünk köztük csatolást azáltal, hogy az inga súlyát egy vékony gumifonál felhasználásával hozzákötjük a húr valamelyik pontjához. A gumifonál okozta csatolás kissé perturbálni fogja az inga lengését és a húr rezgését egyaránt. Tegyük fel pl., hogy  $t = 0$ -kor a húr rezeg, de az inga nyugalomban van. (Ez felel meg annak, hogy a sugárzási térben elektromágneses hullámok vannak, de az atom alapállapotban van.) A gumifonálon át igen kis erők vívódnak át az ingára, ezek periódusa megegyezik a húr rezgésidejével. Ha ez a periódus különbözik az inga lengésidejétől, az inga csak észrevehetően kis mértékben jön mozgásba. Ha azonban a két periódus megegyezik, rezonanciajelenség lép fel és bizonyos idő elteltével az ingalengés amplitudója számottevő mértékűre felnövekszik. (Az atom abszorbeálja a sugárzó energiát.) Ha viszont  $t = 0$ -kor a húr nyugalomban van és az inga leng (az atom gerjesztve van), a fordított jelenség következik be. Az ingáról a gumifonál által átvitt rántások a húrt rezgésbe hozzák, de csak a húr azon sajátrezgése gerjesztődik számottevő mértékben, melynek frekvenciája az ingalengés sajátfrekvenciájának közelébe esik. (Az atom sugárzást emittál.)

A fent leírt és példával megvilágított kölcsönhatás kvantitatív megfogalmazása nehézség nélkül megtörténhetik. Az atomból és sugárzási térből álló teljes rendszer energiája

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{atom} + \mathbf{H}_{sug} + \mathbf{H}_k. \quad (29)$$

$\mathbf{H}_{atom}$  a kvantummechanikában (I. rész) megismert energiaoperátor, pl. a hidrogénatom esetében

$$\mathbf{H}_{atom} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (30)$$

alakú, benne az elektron  $x, y, z$  koordinátái szerepelnek.  $\mathbf{H}_{sug}$  a sugárzási tér (18) alatt felírt energiaoperátora:

$$\mathbf{H}_{sug} = \sum_k \hbar \nu_k \mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k + E_0 = \sum_k \hbar \nu_k \mathbf{N}_k + E_0. \quad (31)$$

Ebben a sugárzási folyamatokra jellemző  $\mathbf{a}_k$  abszorpció- és  $\mathbf{a}_k^*$  emisszió-operátorok fordulnak elő.

Ha a teljes energiaoperátor csak ezt a két kifejezést tartalmazná, a rendszer állapotának időbeli változását leíró állapotegyenlet a következő volna:

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{H}_{atom} + \mathbf{H}_{sug}) \psi = 0. \quad (32)$$

Ennek az állapotegyenletnek a megoldása az atom és a sugárzás egymástól független állapotfüggvényének szorzataként adható meg:

$$\psi = \psi_{atom} \cdot \psi_{sug} = \varphi_a(\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_a t} \cdot \varphi(n_1 \dots n_k \dots) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_k (n_k \hbar \nu_k + E_0) t} \quad (33)$$

Itt  $\varphi(n_1 \dots n_k \dots)$  a sugárzási tér meghatározott számú fotonot tartalmazó állapotát leíró sajátfüggvény,  $\varphi_a(\mathbf{r})$  pedig az  $E_a$  energiaszinthez tartozó atomi sajátfüggvény:

$$\mathbf{H}_{atom} \varphi_a(\mathbf{r}) = E_a \varphi_a(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Mivel a (33) megoldás minden pillanatban kielégíti a (32) egyenletet, a következőt mondhatjuk: ha  $t = 0$  pillanatban az atom az  $E_a$  energiaszinten (pl. alapállapotban) volt, ezenkívül a térben  $n_1, \dots, n_k, \dots$  számú foton volt jelen  $\nu_1, \dots, \nu_k, \dots$  frekvenciával, akkor ez a helyzet változatlanul fennmarad továbbra is, nem történik változás sem az atom energiájában, sem a fotonok számában.

Megváltozik azonban a helyzet, ha az atom és a sugárzás kölcsönhatását leíró  $\mathbf{H}_k$  energiátagot is figyelembe vesszük. Ennek alakja, mint azt (1) alatt is idéztük,

$$\mathbf{H}_k = \frac{e}{m c} \mathfrak{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (35)$$

azaz részletesen kiírva:

$$\mathbf{H}_k = \frac{2e}{m} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{\nu_k v}} (e_k \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*) \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{c} \nu_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{r} + \delta_k \right). \quad (36)$$



Szerepelnek most a sugárzási tér  $\mathbf{a}_k$ ,  $\mathbf{a}_k^*$  abszorpció- és emisszióoperátorai (mégpedig lineárisan), ezenkívül az elektron  $\mathbf{r}$  koordinátavektora és

$$p = \frac{h}{2\pi i} \text{grad révén az elektronkoordináták szerint}$$

való differenciálás operátora. Ha a teljes (29) energiaoperátorral írjuk fel az állapotegyenletet,

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{H}_{atom} + \mathbf{H}_{sug} + \mathbf{H}_k) \psi = 0, \quad (37)$$

akkor ennek már nem megoldása az egymástól független atom-állapotfüggvény és sugárzás-állapotfüggvény egyszerű (33) szorzata, hanem tér és sugárzás kölcsönösen befolyásolják egymás állapotát.

Tételezzük fel, hogy  $t = 0$ -kor az atom  $E_a$  energiaállapotban van és a térben levő különböző frekvenciájú kvantumok száma  $n_1, \dots, n_k, \dots$

$$\psi(0) = \varphi_a(\mathbf{r}) \varphi(n_1 \dots n_k \dots). \quad (38)$$

$dt$  idő elteltével ez az állapot megváltozik, u. i. (37) szerint

$$\begin{aligned} \psi(dt) &= \psi(0) + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \psi(0) - \frac{2\pi i}{h} dt (\mathbf{H}_{atom} + \mathbf{H}_{sug} + \mathbf{H}_k) \psi(0) = \\ &= \left[ 1 - \frac{2\pi i}{h} dt (E_a + \sum_k n_k h \nu_k + E_0) \right] \psi(0) - \frac{2\pi i}{h} dt \mathbf{H}_k \psi(0) = \\ &= \left[ 1 - \frac{2\pi i}{h} dt (E_a + \sum_k n_k h \nu_k + E_0) \right] \varphi_a(\mathbf{r}) \varphi(n_1 \dots n_k \dots) - \\ &- i \frac{2e}{m} dt \sum_k (e_k \text{grad } \varphi_a(\mathbf{r})) \sin \left( \frac{2\pi}{h} \nu_k \mathbf{a}_k \mathbf{r} + \delta_k \right) [b_k \varphi(n_1 \dots n_k - 1 \dots) + b'_k \varphi(n_1 \dots n_k + 1 \dots)]. \quad (39) \end{aligned}$$

Az utolsó tag már  $\mathbf{H}_{atom}$ -nak nem  $E_a$ -hoz tartozó sajátfüggvénye és a sugárzási térben sem  $n_1, \dots, n_k, \dots$  fotonszámú állapotot ír le.  $dt$  idő elteltével az atom a kölcsönhatás révén bizonyos valószínűséggel más energiaszintre került és egyidejűleg ugyanilyen valószínűséggel megváltozott a sugárzási térben jelenlevő fotonok száma  $n_k$ -ról  $n_k - 1$ -re (abszorpció esete) vagy  $n_k + 1$ -re (emisszió esete).

Megfelelő matematikai közelítő módszerekkel meghatározható a (37) állapotegyenlet megoldása tetszőleges  $t$  pillanatra. Ilyen módon lehetővé válik, hogy az egyes sugárzási folyamatok (emiszió, abszorpció, fényszórás, Raman-jelenség, fényelektromos jelenség, fékezési sugárzás) valószínűségét, időbeli lefolyását, spektrális eloszlását stb. kvantitatíven tárgyaljuk. A kvantummechanikát a sugárzási folyamatok elméletének kidolgozása, a kvantumelektrodinamika tette teljessé. Konkrét eredmények leszámaztatását itt nem mutathatjuk be, csak megjegyezzük, hogy azokat a spektroszkópiai, atomfizikai vagy magfizikai megfigyelés minden esetben a legteljesebb mértékben igazolta.

Ha nem is végzünk anyag és sugárzás kölcsönhatásával kapcsolatban részletszámításokat, két körülményre rá szeretnénk mutatni. Először is megérthetjük, miként ad számot az elmélet a spontán fényemisszióról. Amíg az elektromágneses teret klasszikusan írtuk le, az (1) egyenletben szereplő  $\mathfrak{A}$  vektorpotenciál egyszerű függvény volt és a sugárzási tér gerjesztetlen állapotában zérussal volt helyettesíthető. Így adódhatott az a hamis eredmény, hogy a (2) gerjesztett atomállapot mindaddig stabilan fennmaradhatott, amíg az atomot fényhullám nem érte. Más a helyzet a kvantumelektrodinamikában. Ekkor  $\mathfrak{A}$  mindig egy meghatározott zérustól különböző operátor,

ezért a teljes állapotegyenletnek a stacionáriusan gerjesztett állapotban levő atom soha nem lehet megoldása.

A másik megjegyzés a következő: A (36) kölcsönhatási energiaoperátor és a (39) perturbált állapotfüggvény alakja rámutat arra, miként egyeztethető össze a kvantumos jelleg az interferenciajelenségekkel. (36)-ban  $\mathbf{a}_k$  és  $\mathbf{a}_k^*$  a sinusfüggvénnyel van szorozva. Ez azt eredményezi, hogy abszorpció vagy emisszió soha nem fordulhat elő a csomópontokban, ott, ahol a sinus-alakú hullámfüggvény zérus értéket vesz fel, viszont nagy valószínűséggel bekövetkezhetik a nagy amplitúdójú pontokban. *A kvantumelektrodinamika alapján nemcsak a kvantumos sajátosságokat tudjuk értelmezni, hanem az interferencia-jelenségeket, köztük a Wiener-féle állóhullámkísérletet is.*

## F Ü G G E L É K

### Az elektromágneses tér zéruspontingadozása

A térerősség-operátorok (9) és (14) alakjai azt mutatják, hogy  $\mathfrak{E}$  a  $\mathbf{p}_k$ ,  $\mathfrak{H}$  a  $\mathbf{q}_k$  operátorokból épül fel. (15) szerint utóbbiak közt a Heisenberg-féle felcserélési törvény áll fenn, ezért  $\mathfrak{E}$  és  $\mathfrak{H}$  sem lehet felcserélhető, hanem azok is valamilyen (15)-ből leszámaztatható felcserélési törvénynek tesznek eleget. Ennek számos érdekes következménye van a két térerősség egyidejű mérhetőségével kapcsolatban. Most azonban az lényeges számunkra, hogy  $\mathfrak{E}$  és  $\mathfrak{H}$  nem vehet fel egyidejűleg zérus értéket. (Ehhez  $p_k = q_k = 0$  volna szükséges, amit a  $\Delta p_k \cdot \Delta q_k \geq h/4\pi$  összefüggés megtilt.) Nincs tehát az elektromágneses térnek olyan állapota, amelyben az elektromos és mágneses térerősség határozottan és tartósan zérus volna. Analóg eredményt ismertünk meg a II. részben a kristályok mechanikai rezgéseivel kapcsolatban is: a határozatlansági összefüggés ott is megtiltotta a teljes nyugalom megvalósulását.

Az elektromágneses tér energiája a (10) képlet szerint csak akkor lehetne zérus, ha  $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$  volna egyidejűleg. Ezt a térerősségekre vonatkozó határozat-



lansági összefüggés megtiltja, ezért  $\mathbf{H}_{szg}$  minimális értéke zérustól különbözik. Ezt a zérustól különböző minimális értéket nevezzük az elektromágneses tér zéruspontenergiájának:

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2} \hbar \nu_k. \quad (40)$$

Ekkora a tér energiája fotonmentes állapotban ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = \dots = 0$ ). A térben végtelen sok különböző frekvenciájú állóhullám alakulhat ki, ezért a zéruspontenergia végtelen nagy.

A zéruspontenergiát létrehozó térerősség-értékeket nevezzük a tér zéruspontingadozásának. Az elnevezés arra utal, hogy a tér legalacsonyabb energiájú, ún. vákuumállapotában

$$\varphi_0 = \varphi(0 \dots 0 \dots) = \varphi_1(0) \dots \varphi_k(0) \dots \quad (41)$$

$\mathcal{E}$  középértéke zérus (ui. az  $\mathcal{E}$ -ben szereplő  $\mathbf{a}_k$  a 0-fotonos állapotot (I. 24) szerint zérusba,  $\mathbf{a}_k^*$  pedig egyfotonos állapotba viszi át, utóbbi pedig  $\varphi_0$ -ra ortogonális),  $\mathcal{E}$  négyzetének középértéke azonban nem.  $\overline{\mathcal{E}^2}$ -ot egyszerűen kiszámíthatjuk a (10) és (40) képlet egybevetéséből. Egy kiszemelt állóhullámra

$$E_{k0} = \frac{v}{8\pi} (\overline{\mathcal{E}_k^2} + \overline{\mathcal{H}_k^2}) = \frac{1}{2} \hbar \nu_k.$$

Tekintetbe véve azt, hogy elektromágneses sugárzásnál légüres térben  $\overline{\mathcal{E}^2} = \overline{\mathcal{H}^2}$ ,

$$\overline{\mathcal{E}_k^2} = \overline{\mathcal{H}_k^2} = \frac{2\pi}{v} \hbar \nu_k. \quad (42)$$

lyen középértéket szolgáltat egy

$$\mathcal{E}_k = \sqrt{\frac{4\pi}{v} \hbar \nu_k} e_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k \tau + \delta_k - 2\pi \nu_k t\right) \quad (43)$$

alakú klasszikus erőter, határozatlan fázisállandóval. (Ez a mindig jelenlevő zéruspont-térerősség tekinthető a fentebb tárgyalt spontán fényemisszió kiváltójával. A  $\mathbf{H}_k$ -ban szereplő  $\mathcal{A}$  vektorpotenciál operátora azért nem helyettesíthető soha zérussal, mert a zéruspontingadozást mindig le kell írnia. A zéruspontingadozás energiája már nem vonható el a térből, ezért abszorpciót nem idézhet elő, emissziót azonban igen.)

A tér zéruspontingadozása természetesen befolyással van a térben levő részecskékre is. Ezt a befolyást kiszámíthatnánk a kvantumfizika megismert módszereivel is, szemléletesség kedvéért azonban az egyszerűbb klasszikus módszert használjuk. A fluktuáló (43) térerősség gyorsítja az elektront az

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = -e \mathcal{E}_k = -e \sqrt{\frac{4\pi}{v} \hbar \nu_k} e_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k \tau + \delta_k - 2\pi \nu_k t\right)$$

mozgásegyenlet szerint. Ennek integrálásából megkapható az elektron sebességének és helyzetének a  $k$ -ik állóhullám zéruspontingadozása által előidézett változása is:

$$\frac{d \mathbf{r}_k}{dt} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{v \pi \nu_k}} e_k \cos\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k \tau + \delta_k - 2\pi \nu_k t\right),$$

$$\overline{v_k^2} = \frac{\hbar e^2}{2\pi m^2 v \nu_k},$$

$$\mathbf{r}_k = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi^3 v \nu_k}} e_k \sin\left(\frac{2\pi}{c} \nu_k a_k \tau + \delta_k - 2\pi \nu_k t\right),$$

$$\overline{r_k^2} = \frac{\hbar^2 e^2}{8\pi^3 m^2 v \nu_k^3}.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy az elektron a tér zéruspontingadozásának hatására mintegy Brown-mozgást végez. A sebesség és kitérés négyzetének átlaga, összegezve a tér összes sajátrezgésére (a vegyes szorzatok átlagolva kiesnek):

$$\overline{v^2} = \sum_k \frac{\hbar e^2}{2\pi m^2 v \nu_k}, \quad \overline{r^2} = \sum_k \frac{\hbar^2 e^2}{8\pi^3 m^2 v \nu_k^3}. \quad (44)$$

Tekintsünk először egy szabad elektront, amely makroszkopikusan nyugalomban van. Pontosan nem lehet nyugalomban, hanem a (44) által leírt zéruspontingadozást végzi, ezáltal feltétlenül rendelkezik

$$\varepsilon_{\text{KIN}} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \sum_k \frac{\hbar e^2}{4\pi m v \nu_k}. \quad (45)$$

nagyságú kinetikus energiával. Vegyük figyelembe, hogy a tér  $d\nu$  frekvenciatartományba eső sajátrezgéseinek számát (6) alatt megadtuk. Így (45)-ben az összegezést integrállá alakíthatjuk át.

$$\varepsilon_{\text{KIN}} = \int_0^\infty \frac{\hbar e^2}{4m v \pi \nu} dN(\nu) = \frac{2e^2}{\hbar c} \cdot m c^2 \int_0^\infty x dx = \infty. \quad (46)$$

$$\left(x = \frac{\hbar \nu}{m c^2}\right)$$

Az elektron elektromágneses eredetű kinetikus energiája tehát végtelen nagy. Ez azonban mégsem jelent súlyos problémát, mert a fenti energia mindig az elektron mechanikai eredetű  $mc^2$  nyugalmi energiájával és a pontoszerű elektron elektrosztatikus sajátenergiájával együtt lép fel (ami szintén végtelen nagy). Mindhárom energia elszakíthatatlan az elektrontól, ezért az energia és tömeg ekvivalenciája folytán a három energia összege szolgáltatja a fizikai elektron kísérletileg észlelt tömegét:

$$m' = \frac{m c^2 + \varepsilon_{\text{SZTAT}} + \varepsilon_{\text{KIN}}}{c^2} = 0,9 \cdot 10^{-27} \text{ g}. \quad (47)$$

A végtelen nagy sztatikus és sugárzásisajátenergiáknak a (megfigyelhetetlen) mechanikai tömeghez való csatolását nevezzük tömegrenormálásnak. Csak az  $m'$  renormált tömeg észlelhető, az  $m$  renormálatlan tömeg nem. (Tekintettel arra, hogy az elmélet szerint (47) jobboldalának mindegyik tagja  $m$ -mel arányos és az arányossági tényező  $\varepsilon_{\text{SZTAT}}$  és  $\varepsilon_{\text{KIN}}$  esetében végtelen, (47) ilyen alakú:

$$m' = m(1 + \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy  $m'$  véges volta miatt  $m$ -nek végtelen kicsinynek, zérusnak kell lennie, azaz az elektron egész megfigyelhető tömege elektromágneses eredetű.)

Kötött elektronnál a zéruspontingadozás által előidézett Brown-mozgásnak a tömegrenormáláson kívül másik nevezetes következménye is van. Az elektron nem tartózkodik szigorúan egy  $P$  pontban, ahol a potenciális energia  $V(P)$ , hanem folytonosan mozog, oscillál egy olyan tartományban, melynek sugarát hozzávetőlegesen  $r^2$  gyöke szabja meg. Ez azt jelenti, hogy  $V(P)$ -t helyettesíteni kell  $V$ -nek  $P$  körül írt kis gömbre vonatkozó átlagával. Egy potenciálvölgy mélyén fekvő részecskénél  $V(P)$ -nek ilyen átlaggal való helyettesítése feltétlenül a potenciális energiának pozitív értékkel való lát-szólagos megnövekedését eredményezi. Ez a megnövekedés bekövetkezik pl. a hidrogénatomban a maghoz legközelebb elhelyezkedő,  $l=0$  kvantumállapotban levő elektronoknál. Az  $n=2, l=0$  elektron esetében ez az energianövekedés  $4,3 \cdot 10^{-6}$  eV-nak felel meg, tehát igen kicsiny érték, létezését azonban Lambnak érzékeny radiospektroszkópiai eszközökkel sikerült kimutatnia



1947-ben. (Lásd a Fizikai Szemle ez évi első számát.) A Lamb-féle energiaszint-eltolódás megfigyelt értéke a tapasztalattal négy jegy pontossággal megegyezik, így az az elektromágneses tér zéruspontingadozásának és egyben a kvantumelektrodinamikának egyik legfontosabb kísérleti igazolását jelenti.

Az elektromágneses tér vákuumállapotának tanulmányozása, mely a Lamb-féle szinteltolódás felfedezésével aratta első nagy sikerét, a kvantumelektrodinamika fejlődésében új kornak megindulását jelentette. Ennek során a relativisztikus tárgyalás következetes alkalmazásával, a renormalizációs program következetes végrehajtásával sikerült sok korábbi nehézséget kiküszöbölni, egyben az anyag és sugárzás kölcsönhatásával kapcsolatban egész sor jelenséget nagy pontossággal értelmezni és előre látni. A legfontosabb eredmények elérése Tomonaga, Schwinger, Feynman és Dyson nevéhez fűződik.

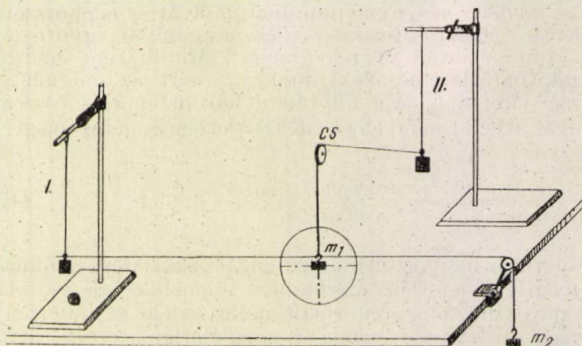
Marx György

Egyetemi Elméleti Fizikai Intézet  
KFKI Atomfizikai Osztály

## A FIZIKA TANÍTÁSA

### Egymásra merőleges rezgések összetétele

A középiskolai tankönyvek — szerintem nagyon helyesen — a harmonikus rezgőmozgást az egyenletes körmozgást végző pont vetületének mozgásaként vezetik be. A tanuló a jól bemutatott bevezető alapkísérlet után elfogadja ezt az erős ugrást. Mégis tudat alatti gyanakvása, hogy a két mozgásnak talán nincs is különösebb kapcsolata, csak akkor oszlik el teljesen, ha bemutatjuk neki az ellenkísérletet: hogy az egyenletes körmozgást összetehetjük két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgásból.



1. ábra

Jómagam ezt először egy egyszerűen összeállítható, szemmel könnyen követhető, mechanikai kísérlettel szoktam bemutatni. Készítünk (1. 1. ábra) két, kb. 1 m hosszú fonálingát nagy (2 kg) tömegekkel a végükön. A fonálra kötött hurkokkal az egyik inga hossza, és így lengésideje változtatható. Az I. inga jobbra-balra, a II. előre-hátra lenghet. Ha csak a II. ingát lengetjük, akkor ez a cs csigán átvettett fonál segítségével függőleges irányú harmonikus rezgőmozgásban tartja az  $m_1$  testecskét. (Az áttekinthetőség kedvéért a csigát tartó bunsenállványt a rajzról elhagytuk.) A csigát minél magasabbra tegyük és esetleg egy, a csiga alatti dróthurkon keresztül vezessük a fonalat, mert a későbbiekben könnyen kiugrik a csigából. — Ha csak az I. ingát lengetjük, az  $m_1$  vízszintes irányban végez harmonikus rezgőmozgást. (Az I. inga minél messzebb legyen. A vízszintes fonál feszesen tartásáról az  $m_2$  ellensúly gondos-

kodik.) — Ha most mindkét ingát egyszerre lengetjük, akkor a két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevődik. Ha lengésidejük és amplitudójuk is azonos, és az egyiket akkor indítjuk, amikor a másik éppen a nyugalmi helyzetben halad át (vagyis a fáziskülönbség közöttük  $\frac{\pi}{2}$ , akkor *eredőjük egyenletes körmozgás lesz.*

A kísérlet — főleg ha az  $m_1$ -hez vezető fonalak nem elég hosszúak — nem ad olyan szép kört, mint szeretnők, mégis jobbnak tartom bevezető kísérletnek, mint más szebb kört adó kísérleteket (rezgőrugós, hangvillás, katódsugárosszcilloszkópos kísérletek), mert szemmel követhető és így meggyőzőbb.

A leírt összeállítással az egymásra merőleges rezgések összetételének egyéb esetei is bemutathatók. — Nagyon megkönnyíti a megfigyelést, ha az összeállítás működésének bemutatása után az  $m_1$  „rezgő pont” mögé táblát állítunk, arra krétával koordinátarendszert rajzolunk, és minden kísérlet után felrajzoljuk, hogy mit láttunk. A következő közismert kísérletek mutathatók be:

A) Egyenlő rezgésidejű ingákkal:

1. A fázis azonos. Olyan téglalap (négyzet) átlója mentén mozog az  $m_1$  pont, melynek oldalai az amplitudók. (L. 2. 1. ábrát.)

2.  $\pi$  fáziskülönbség esetén ugyanannak a téglalapnak a másik átlója mentén mozog a pont (2.2. ábra).

3. Ha a fáziskülönbség  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , akkor az előbbi téglalapba beírt ellipszis lesz a pont pályája (2.3. ábra).

4. Ha a fáziskülönbség  $\frac{\pi}{2}$ , akkor egyenlő amplitudók esetén a már említett egyenletes körmozgás jön létre, különböző amplitudók esetén álló vagy fekvő ellipszis (2.4. ábra).

B) Ha az ingák lengésideje különböző, akkor a változatos Lissajous-féle görbéket írja le a pont. Ha a rezgésidők hányadosa racionális, akkor a görbék zártak lesznek. (A két egymás melletti téglalapoldal és az álló görbe érintési pontjai