

Kaján László

## EGYSZERŰ ELJÁRÁS RÚDSZERKEZETEK IGÉNYBEVÉTELI HATÁSFÜGGVÉNYEINEK GÉPI ELŐÁLLÍTÁSÁHOZ

A nagy teljesítményű elektronikus számítógépek elterjedésével egyidejűleg kialakult a szerkezetek erőtani számításának új, hatékony módszere, az ún. végelem-módszer, amelynek általánosan használt változata az elmozdulásmódszeren alapul. E változat használható fel legcélszerűbben az automatikus számításához, mivel az erőmódszer a törzstartó felvételét adatként követeli, ez pedig történhet hibásan, vagy célszerűtlenül is, ami a számítási eredményeket jelentősen ronthatja. A rúdszerkezetek végelem-elmozdulás módszerrel végzett számítás esetén az egyes szerkezet típusok az általános rúdszerkezet speciális esetei, számítási elvükben nincs különbség, és nincs szükség elhanyagolásokra, egyszerűsítő feltevésekre. E módszer alkalmazásával számos számítógépes program készült, amelyek az adott terhelésekből kiszámítják a szerkezet megadott csomópontjainak elmozdulásait és az alkotó rudak igénybevételeit a rúdvégeken. Igénybevételi hatásfüggvények szerkesztésére ezek a programok nem képesek, ezért a hasznos teher (jármű- és földemteher) mértékadó elhelyezése nehézkes és hosszadalmas.

Az itt bemutatott módszer alkalmasan választott, egyszerűen kiszámítható teher ráhelyezésével és az ebből keletkező elmozdulások meghatározásával ezeket a programokat is alkalmassá teszi igénybevételi hatásfüggvények előállítására. Hatékonyan alkalmazható továbbá a mértékadó teherhelyzetek kikeresésére és leterhelésére is alkalmas új programokban.

### Az igénybevételi hatásfüggvény-szerkesztés statikus és kinematikus módszere

Az igénybevételi hatásfüggvényeket meghatározhatjuk statikus és kinematikus módszerrel.

A *statikus módszer* a szerkezet erőmódszerrel végzett számításán alapul:

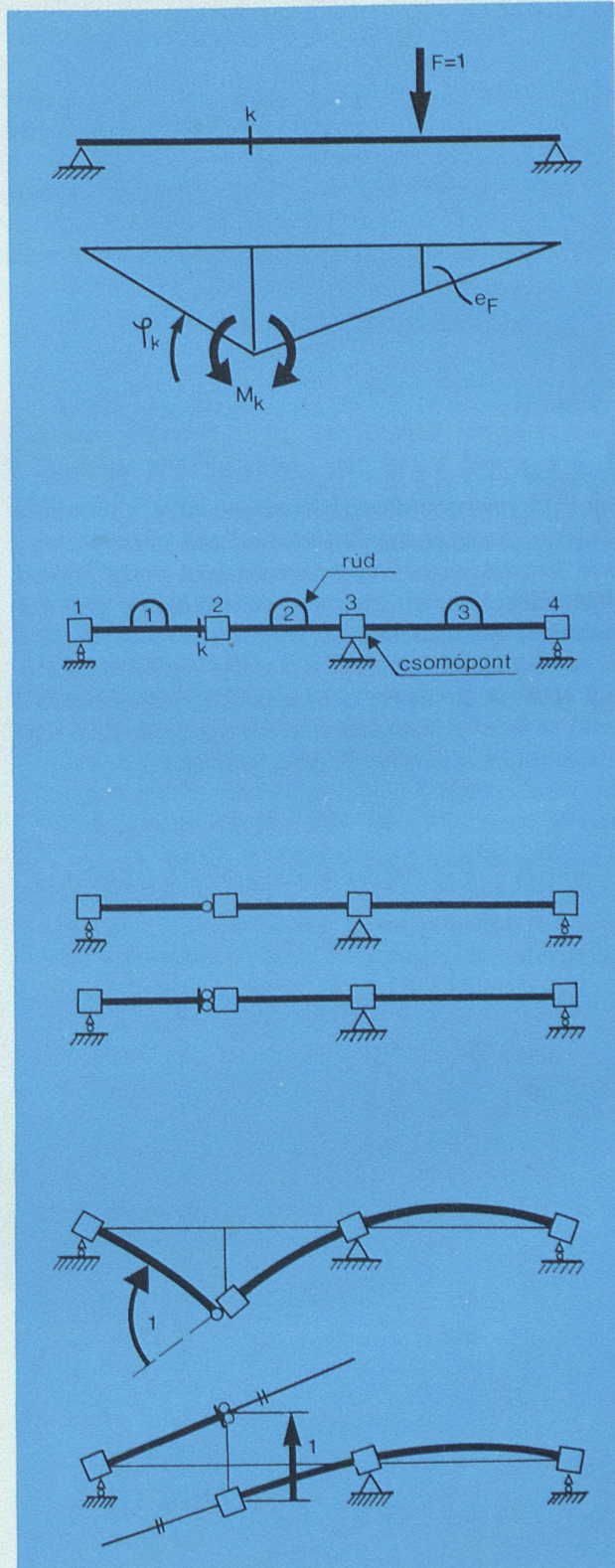
$$\eta(C_k) = \eta(C_k)_o + \sum^{(i)} C_{ik} \cdot \eta(X_i), \text{ ahol}$$

$\eta(C_k)$  — a keresett igénybevétel hatásfüggvénye a „k” keresztmetszetben

$\eta(C_k)_o$  — hatásfüggvény a statikailag határozott törzstartón

$C_{ik}$  — a statikailag fölös mennyiségek egységeiből a határozott tartón keletkező hatás a „k” keresztmetszetben

$\eta(X_i)$  — a statikailag fölös kapcsolatok hatásfüggvényei.





A statikailag fölös kapcsolatok hatásfüggvényeit a felvételi egyenletrendszerből kapjuk, amely a relatív elmozdulások nulla értékűségét fejezi ki a fölös kapcsolatok helyén.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \eta(X_j) + \eta(a_i)_o = 0 \quad i = 1 \dots n$$

$$\eta(X_i) = \sum_{j=1}^n z_{ij} \cdot \eta(a_j)_o \quad i = 1 \dots n$$

$a_{ij}$  – a  $j$ -ik helyen működő statikailag fölös mennyiség egységéből  $i$ -ik fölös mennyiség helyén keletkező relatív mozgás

$\eta(a_i)_o$  – az  $i$ -ik fölös mennyiség helyén keletkező relatív mozgás hatásfüggvénye a statikailag határozott törzstartón

$z_{ij}$  – a  $j$ -ik helyen beiktatott egységnyi relatív mozgásból az  $i$ -ik helyen keletkező hatás.

Az egyenletrendszert felírhatjuk mátrix alakban is.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \eta(\underline{x}) + \eta(\underline{a})_o = 0$$

$$\eta(\underline{x}) = -\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \eta(\underline{a})_o = \underline{\underline{Z}} \cdot \eta(\underline{a})_o$$

$\underline{\underline{A}}$  – az  $a_{ij}$ -ből képzett ún. „egységtényezők mátrixa”  
 $\underline{\underline{Z}}$  – a  $z_{ij}$ -ből képzett ún. „hatástényezők mátrixa”.

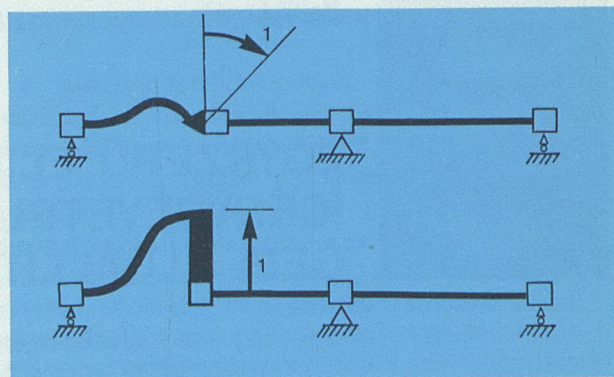
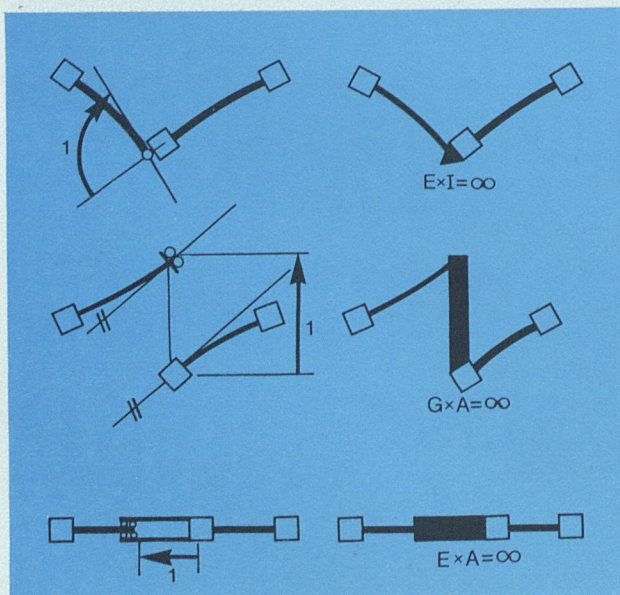
Ennek a módszernek az a hátránya, hogy a törzstartó felvétele általában nem automatizálható valamint, hogy csak igen alacsony határozatlansági fokú szerkezeteknél alkalmazható. Ezért általános rúdszerkezetek gépi számításához nem alkalmas.

A kinematikus módszer elvi alapja egy felcserélhető tétel. A Betti-tétel értelmében egyensúly esetén a külső és belső erők munkájának összege zérus. (Erő alatt általánosított erőfogalmat, dinámot értünk.)

$$F \cdot e_F - M_k \cdot \varphi_k = 0$$

Az erőt és a relatív elfordulást egységnyinek választjuk.

$$e_F = M_k$$



E tétel értelmében a megszüntetett kapcsolat helyén beiktatott egységnyi relatív mozgás hatására kialakult elmozdulási ábra azonos az igénybevételi hatásfüggvényel. A számítás két lépésben történik:

$$\eta(M_k) = ? \quad \eta(T_k) = ?$$

Az első lépésben megszüntetjük a kért igénybevételt felvevő kapcsolatot a vizsgált keresztmetszetben. Második lépésben egységnyi relatív elmozdulást hozunk létre, ekkor a szerkezeten kialakuló elmozdulási állapot azonos lesz a kért igénybevétel hatásfüggvényével. Ez a módszer a statikai rendszer megváltoztatásával jár együtt, azonkívül az egységnyi relatív mozgás létrehozása nehézkes.

Statikailag határozott tartók igénybevételi hatásfüggvényei a végelem-elmozdulás módszer alkalmazása esetén a kinematikus módszerrel nem is számíthatók, mivel a kapcsolat megszüntetésével a szerkezet labilis részre esik szét.

### A módosított kinematikus módszer és alkalmazása gépi számításra

Tekintsük a szerkezetet abban az elmozdulási állapotban, amikor a megszüntetett kapcsolat helyén egységnyi relatív mozgás van! A végelem-elmozdulás módszer alkalmazása esetén az egyes elemek a csomópontokban kapcsolódnak. Lényeges, hogy a megszüntetett kapcsolat a vizsgált rúd megadott csomópontjához tartozó keresztmetszetben legyen. Ekkor a vizsgált rúdvégi keresztmetszet, és nem a csomópont igénybevételi hatásfüggvényéről beszélünk. A megszüntetett kapcsolat helyén az elmozdulási állapotot fenntartó, egymással ellentétes irányú, de azonos abszolút értékű erőket helyettesíthetjük egy végtelen merev kapcsolattal.

Kényszerítsük vissza a szerkezet csomópontjait az eredeti, elmozdulásmentes állapotba! A végtelen merev kapcsolat miatt az egységnyi relatív mozgás a vizsgált rúdvégen megmarad. A vizsgált rúd kivételével a szerkezet többi rúdja alakváltozás-mentes. A rúdvég egységnyi relatív mozgásához tartozó terhelőerők a rúd merevségi mátrixával határozhatók meg.

$$\underline{s} = -\underline{K} \cdot \underline{e}_i \text{ a jobb oldali,}$$

$$\underline{s} = \underline{K} \cdot \underline{e}_i \text{ a bal oldali rúdvég esetén}$$

$$\underline{s} \text{ – a csomóponti erők vektora}$$

$$\underline{K} \text{ – a rúd merevségi mátrixa}$$



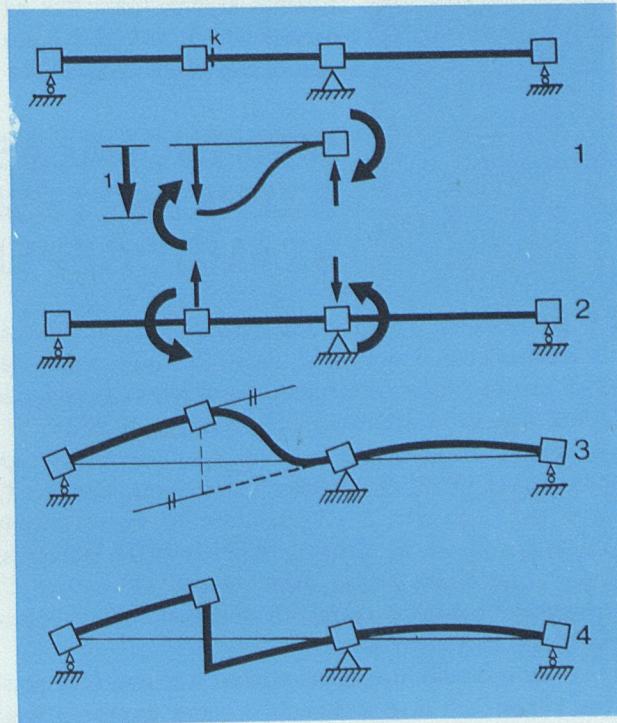
$\xi_i$  –  $i$ -ik egységvektor

$i$  – a kért hatás sorszáma a csomóponti erők vektorában.

Az elmozdulásmentes csomópont fenntartásához szükséges erők ellentettjei szükségesek az egységnyi relatív mozgáshoz tartozó elmozdulási állapot visszaállításához. A statikai rendszer megváltoztatása nélkül, könnyen kiszámítható terhek ráhelyezésével, kinematikus úton állíthatjuk elő az igénybevételi hatásfüggvényeket a végelem-elmozdulás módszer alkalmazásával. A számítás általában négy lépésben végezhető el.

Az első lépésben meghatározzuk az elmozdulásmentes csomópontú állapothoz tartozó erőket (vagyis a vizsgált rúd kezdeti görbült alakját létrehozó erőket), valamint a vizsgált rúd kezdeti görbe alakját leíró elmozdulásfüggvényt. Az így meghatározott erők ellentettjét a második lépésben működtetjük az egyenes rudakból álló, alakváltozás-mentes szerkezetre. A harmadik lépésben meghatározzuk a szerkezet elmozdulásfüggvényét. A kapott elmozdulásfüggvényeket szuperponáljuk:

$$\eta(C_k) = \eta(C_k)_m + \eta(C_k)_e$$



$\eta(C_k)_m$  – az igénybevételi hatásfüggvény a mozdulatlan csomópontú szerkezeten, a vizsgált rúd kezdeti, görbült alakjának elmozdulásfüggvénye  
 $\eta(C_k)_e$  – a szerkezet elmozdulásfüggvénye.

A számítás menetét egy többtámaszú gerenda „ $k$ ” keresztmetszetének nyíróerő-hatásfüggvényének szerkesztésével tehetjük szemléletessé.

Rácsos tartók rúderő-hatásfüggvényeinek szerkesztésekor a negyedik lépést elhagyhatjuk, mert az csak a vizsgált rúd elmozdulásfüggvényének korrigálására szolgál, tehát csak akkor lényeges, ha a rúd maga is terhelt.

Ez az eljárás jól alkalmazható statikailag határozott szerkezetek esetén is. Az ICL System 4–70 gépre kidolgozott rúdszerkezeti program próbafuttatásai igazolták a levezetett eljárás helyességét és hatékonyságát. Ennek alapján építettük be az UVATERV R–20 típusú számítógépére készített „Síkbeli keretszerkezetek csomóponti igénybevételei és elmozdulásai” valamint a „Gerendahidak mértékadó igénybevételeinek meghatározása” című számítógépes programokba. Az utóbbiban megoldottuk az adott terhecsoportba a mértékadó teherhelyzet automatikus kikeresését és a hatásfüggvények gépi leterhelését is. Az eljárás továbbfejleszhető már végelem-típusokra is, pl. lemez nyomatéki hatásfelületének meghatározására.

