

Zárójelentés

Közhelynek beillő megállapítás, hogy az elmúlt két-három évtized során a matematika és az elméleti fizika kapcsolatai rohamosan fejlődtek, nem kis részben az anyag alapvető kölcsönhatásainak – ideértve a gravitációt is – egységes (kvantum-)elméleti leírását célul kitűző húrelmélet fejlődésével kapcsolatban. Valódi kölcsönös befolyásról van szó, ugyanis nem csak az elméleti fizika használ fel egyre újabb és újabb – korábban túl absztraktnak, és ezért az alkalmazások szempontjából érdektelennek vélt – matematikai fogalmakat és elméleteket, de az elméleti fizika igényei egészen új matematikai diszciplínákat hívtak életre: elég itt megemlíteni a vertexoperátor-algebrák vagy a kvantumcsoportok elméletét. E folyamattal párhuzamosan, az elméleti fizika valamely részterületén meghonosodott eszközök rendre elterjednek más területeken is, új, rendkívül hatékony vizsgálati módszereket eredményezve: például, a húrelmélet megalapozásában alapvető szerepet játszó konform térelmélet szerteágazó alkalmazásokra lelt a statisztikus és szilárdtestfizikában, valamint a kvantumszámítógépek elméletében is, de hosszasan lehetne sorolni a hasonló jellegű példákat. Ennek következtében, valamely elméleti probléma leírására kifejlesztett új matematikai apparátus komoly eséllyel találhat alkalmazást a fizika látszólag távol eső területein.

A fent vázolt trendek felismerése vezetett arra az elgondolásra, hogy az elméleti fizika más-más területein dolgozó kutatók együttműködése és rendszeres kölcsönhatása lehetővé tenné, hogy az egyes szakterületeken elterjedt matematikai módszereket építő módon alkalmazzák saját kutatásaikban. Ez motiválta a „Modern algebrai és geometriai módszerek az elméleti fizikában” (OTKA T032453, 2000-2003) pályázatot, melynek eredményessége vezetett a jelen pályázat benyújtásához, annak folytatásaként. A cél továbbra is az volt, hogy a résztvevő kutatók – rendszeres konzultációk és diszkussziók során – megismerjék az egymás szakterületein gyümölcsözőnek bizonyult matematikai módszereket, és azokat megpróbálják saját kutatásaikban alkalmazni. Ebből a szempontból a pályázat kifejezetten sikeresnek mondható: míg a vezető kutató konform térelméleti és húrelméleti kutatásai a kaotikus szórás elméletében is jelentős szerepet játszó vektorértékű moduláris formák vizsgálatára vezettek, addig a résztvevő kutató kvantum-információelméleti kutatásainak fontos húrelméleti alkalmazásai kerültek előtérbe. Kétségtelen, hogy a két, látszólag távoli témakör közötti matematikai analógiák felismerése megtermékenyítőleg hatott mindkét esetben, ezért az együttműködés tagadhatatlanul elérte eredeti célját, még akkor is, ha nem született belőle közös publikáció.

Az elméleti kutatás – szemben a kísérletivel – igen rugalmas, az igényeknek és a nemzetközi trendeknek megfelelően gyors irányváltásokat tesz lehetővé. Ez maga után vonja azt is, hogy a hosszú távú tervezés ez esetben sokkal nehezebb, nagyobb az esélye az előzetes tervektől való eltérésnek. Ez a jelen esetben is megfigyelhető: míg a pályázat első két évére megfogalmazott terveket jelentős mértékben sikerült teljesíteni, a későbbiekben csekély eltérés tapasztalható, amelyet a kutatások belső logikája indokol. Véleményünk szerint, bár a kutatási eredmények nem fedik teljesen a kései időszakra megfogalmazott terveket, de jelentőségben azokat messze meghaladják, így mindenképp indokoltnak tekinthető az előzetes munkatervtől való eltérés.

A pályázat futamideje az eredetileg tervezett négy évről öt évre lett menet-

közben meghosszabbítva. E módosítást az indokolta, hogy a pályázat futamideje során megnyíló uniós pályázaton (MRTN-CT-2004-512194, 2005-2008) alapuló finansziális támogatás lecsökkentette a külföldi utazásoknak a pályázat terhére írható költségeit, így a megítélt pénzügyi támogatás hasznosításának legcélravezetőbb módjának a hosszabbítás bizonyult. Ugyanezen megfontolások indokolják a költségterv egyes tételei közötti kis mértékű átcsoportosításokat.

Az egyes résztvevők eredményeinek részletes ismertetése

Lévay Péter (résztvevő kutató)

Differenciálgeometriai módszerekkel vizsgáltuk a kvantum-összefonódottság kérdését: az összefonódottság mértékét geodetikus hosszként interpretáltuk, és tisztáztuk a Schmidt-dekompozíció geometriai jelentőségét. Felismertük a kevert állapotokat jellemző Uhlmann-féle anholonómia mátrix és speciális relativitás elméletéből ismert Thomas-féle rotációs mátrix analógiáját, ezáltal egy zárt, kísérletileg is ellenőrizhető formulát vezetve le.

Twistor módszereket alkalmaztunk, és egy új invariánst vezettünk be a három qubit összefonódottság vizsgálata során: az új invariáns a rendszer olyan nemlokális tulajdonságait jellemzi, amelyek a redukált sűrűségoperátorok segítségével nem tárgyalhatók. Az N -qubit összefonódottság invariáns mértékeire egységes leírást javasoltunk a Grassmann-sokaságok ún. Plücker-beágyazásain alapuló formalizmus keretében. Végül, tisztáztuk a 4-qubit összefonódottságot jellemző invariánsok geometriai jelentését.

Négy darab egyrészecske állapottal rendelkező két fermionos rendszerben elemi formulát adtunk meg a Neumann-entrópiára, és geometriai magyarázatot adtunk a reziduális entrópia fellépésére. Megadtuk a geometriai (Berry-féle) fázisfaktorok egységes, az univerzális klasszifikáló nyalábokon alapuló tárgyalását.

Részletesen vizsgáltuk a hűrelmélet négydimenziós szuperszimmetrikus kompaktifikációban fellépő fekete lyuk megoldások entrópiájának és modulus stabilizációjának kvantum-információelméleti leírását, egyebek közt megmutattuk, hogy a szuperszimmetrikus attraktor mechanizmus egy olyan kvantum-számításnak feleltethető meg, amikor egy kiindulási 3-qubit állapotból egy maximálisan összefonódott GHZ állapotot desztillálunk. Általános sejtést fogalmaztunk meg az ún. mágikus szupergravitációs elméletek fekete lyuk entrópia-formuláinak és a kvantum-információelmélet összefonódottsági mérőszámainak kapcsolatáról.

Tárgyaltuk a négydimenziós $N = 8$ szupergravitációs elmélet fekete lyuk megoldásainak kérdését 7-qubit állapotok segítségével, rámutatva a rendszer szimmetriáinak a véges Fano-sikkal, illetve a Hamming-kóddal való kapcsolatára.

Az ún. STU-modell keretében, amely az $N=8$ szupergravitáció konzisztens csonkítása, a BPS és nem-BPS fekete lyukak megértésére kifejlesztettünk egy, a hibajavító kódok elméletén alapuló módszert. Megmutattuk, hogy a modell alapjául szolgáló fekete lyuk potenciál egy, a töltésektől és modulus terektől függő 3-qubit állapot normája: a modulus tereken ható kovariáns deriváltak ezen az állapoton bit-flipeket okoznak. Egy speciális megoldásosztályról (D2-D6 brane-rendszer) kiderült, hogy a BPS állapotok védettek ezen bit-flip hibáktól, míg a nem-BPS állapotok nem. Megmutattuk, hogy a fekete lyuk eseményhorizontján (az ún. attraktor pontban) a kapott állapotok a kvantum-információelmélet ún. gráf-állapotainak felelnek meg.

Külföldi előadások

1. 2005 november 30: "On the geometry of N-qubit entanglement" University of Tasmania, Hobart, Australia.
2. 2006 május 30: "STU black holes and quantum entanglement" Department of Theoretical Physics, Justus Liebig University, Giessen, Germany.
3. 2006 június 7: "Twistor methods and the geometry of entanglement", plenary invited lecture at the XXXVIII Symposium on Mathematical Physics "Quantum Entanglement and Geometry", Torun, Poland.
4. 2007 május 30: "Stringy Black Holes and multipartite entanglement", Department of Mathematics, University of Queensland, Brisbane.
5. 2007 június 18-22: "Attractors, black holes and multipartite entanglement", invited speak at „School on Attractor Mechanisms”, Frascati, Rome.
6. 2008 május 13: "A three-qubit interpretation of BPS and non-BPS STU black holes" Theoretical Physics Group, Blackett Laboratory, Imperial College, London.

Bántay Péter (vezető kutató)

A racionális konform térelméletek ún. egyszerű-áram szimmetriáinak vizsgálatában sikerült jelentős előrehaladást elérnünk a súlyozott permutációs hatások elméletének kidolgozásával, illetve a rájuk vonatkozó realizálhatósági feltételek megfogalmazásával, miáltal elvi lehetőség nyílik az egyszerű áramok szisztematikusan felsorolására, illetve az adott szimmetriával rendelkező konform elméletek osztályozására. A számítógépes kapacitás korlátain belül osztályoztuk adott egyszerű áram csoportok esetén a megengedett súlyozott hatásokat és moduláris invariáns partíciós függvényeket, és ezáltal fontos következtetéseket sikerült levonni a primér terek számára, illetve a moduláris ábrázolás szerkezetére vonatkozóan.

Kidolgoztuk a kétdimenziós csoportok (más néven keresztezett modulusok) karakterelméletét, és megadtunk egy olyan eljárást, amely bármely kétdimenziós csoporthoz egy moduláris tenzorkategóriát rendel (ez utóbbi egy megfelelő konform térelmélet korrelációs függvényei közötti szimmetria-relációkat írja le). Konstrukciónk messzemenő általánosítása néhány, már korábban ismert hasonló eljárásnak, és szoros kapcsolatban áll a „Moonshine” jelenségével, illetve az orbifold modellek elméletével.

Vizsgáltuk az orbifoldizáció általános csoportelméleti vonatkozásait és az ún. orbifold transzformációval való kapcsolatát. Beláttuk az orbifold transzformáció tranzitivitását és az exponenciális formula megfelelő általánosítását, mely széleskörű alkalmazásokkal rendelkezik a szimmetrikus szorzatok és a másodkvantált hurok elméletében. Tisztáztuk az orbifold transzformáció szerepét permutációs orbifoldok általánosított partíciós függvényeinek leírásában.

2005 során egy igen gyümölcsöző együttműködésbe kezdtünk T. Gannonnal, a University of Alberta (Edmonton, Canada) professzorával a vektorértékű

moduláris formák és azok fizikai alkalmazásainak vizsgálatára, mely kérdéskör nem csak a húrelméletben és a konform térelméletben játszik alapvető szerepet, de fontos alkalmazásai vannak a kaotikus szórás elméletében, sőt az analitikus számelméletben is. Vizsgálataink során kidolgoztunk egy alapvetően új megközelítést a vektorértékű moduláris formák tárgyalására; meghatároztuk az elmélet alapfogalmait (exponens-, karakterisztikus és fundamentális mátrixok), felismertük az exponensmátrixra vonatkozó trace formulát, bebizonyítottunk egy alapvető fontosságú inverziós formulát, amely lehetővé teszi tetszőleges vektorértékű moduláris forma egzakt meghatározását szinguláris viselkedésének ismeretében, meghatároztuk a fundamentális mátrix által kielégített differenciálegyenlet pontos alakját, és annak hipergeometrikus voltának felhasználásával beláttuk a karakterisztikus mátrixot megszorító monodrómia-egyenletet. Algoritmikus módszereket fejlesztettünk ki ezen hipergeometrikus differenciálegyenlet explicit megoldására, ezáltal lehetővé téve egyes konform térelméleti korrelációs függvények explicit meghatározását szimmetriaelvekből. Általános eljárást adtunk meg a konform térelméleti korrelációs függvények, illetve általában tetszőleges vektorértékű moduláris formák által kielégített invariáns differenciálegyenletek származtatására. Megmutattuk, hogy a moduláris ábrázolás kovariánsainak ismeretében hogyan osztható fel a kompatibilis konform térelméletek partíciós függvényei.

Hosszasan lehetne tovább sorolni a vektorértékű moduláris formák elméletében, illetve azok fizikai alkalmazásaiban elért jelentősebb eredményeket. Ezek publikálása, részben az elmélet újszerűsége miatt, a szokásosnál kissé lassabban halad: eddig mindössze három publikáció született a témában, de további három van előkészületben, és a potenciális alkalmazások széles köre, valamint az elmélet szerteágazó kapcsolatai miatt továbbiakra lehet számítani a közeljövőben. Az elmélet jelentőségét és időszerűségét jelzi az iránta megnyilvánuló nemzetközi érdeklődés, amit jól illusztrál a külföldi konferenciákra történő meghívások növekvő száma.

Külföldi előadások

1. *Simple current symmetries in Rational Conformal Field Theories*, „Infinite dimensional Lie algebras”, Schrödinger Institute, Bécs (Ausztria), 2004.
2. *2D groups and Moonshine*, „Moonshine - the first 25 years”, Edinburgh (Egyesült Királyság), 2004.
3. *Characters of Conformal Field Theories*, „Quantum Field Theory and its Ramifications”, Hobart (Ausztrália), 2005.
4. *Mapping class group representations in Conformal Field Theory*, Hamburg (Németország), 2006.
5. *Vector-valued modular forms in String Theory*, „Perspectives in String Theory”, Seoul (Korea), 2008.
6. *Vector-valued modular forms*, „Vertex Operator Algebras and related topics”, Bloomington (USA), 2008.