RENDSZERKOCKÁZATI JELENTŐSÉG MÉRÉSE MINIMÁLISAN SZÜKSÉGES TŐKEINJEKCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL[1]

CSÓKA PÉTER – SASS ZOLTÁN
Budapesti Corvinus Egyetem, KRTK – Budapesti Corvinus Egyetem

Tanulmányunkban kidolgozunk egy keretrendszert, melyben pénzügyi szereplők stilizált hálózatában lehetőség nyílik a rendszerkockázat mérésére és allokációjára. A koalíciós hatások megfelelő kezelése érdekében a kérdést a kooperatív játékelmélet keretei között vizsgáljuk, tőkeallokációs játékokkal. Definiáljuk a minimális tőkeinjekció fogalmát (az a minimális összeg, mely ágensek egy csoportjának hatékony kimentéséhez szükséges). Megmutatjuk, miként alkalmazható a minimális tőkeinjekció a rendszerkockázat mérésére és az ágensek kontribúciójának kifejezésére. Egy példán keresztül bemutatjuk, egy Monte Carlo szimulációba ágyazva hogyan alkalmazható a bemutatott metodológia tetszőleges rendszer struktúrájának elemzésére. A példa ezen felül bizonyítékként szolgál arra, hogy tőkeinjekciók segítéségével bizonyos esetekben mennyivel jobban megragadható az egyes szereplőknek a rendszer működésében betöltött szerepe, mint más, sztenderd módszerek használatával.

1 Bevezetés

A pénzügyi kockázatok mérése és kezelése hatalmas jelentőségű a gazdaságban (általános bemutatásért lásd Christoffersen (2011), a vállalati kockázatkezelésről Dömötör és szerzőtársai (2013), a devizakockázatról Berlinger és Walter (2013)). Ezen kockázatok egyik típusa a pénzügyi hálózatokban megjelenő rendszerkockázat. Pénzügyi hálózatokat egymáshoz különféle pénzügyi tranzakciókon keresztül kapcsolódó szereplők alkotnak, ezen kapcsolatok típusairól lásd például Allen és Babus (2009). Gyakran vizsgált kapcsolati háló például a fedezetlen bankközi hitelek rendszere (az osztrák bankközi hitelpiac struktúráját elemzi Boss és szerzőtársai (2004), a magyar bankközi forintpiacról a likviditási válság előtt és után lásd Lublóy (2005) és Berlinger és szerzőtársai (2011)). Kötelezettségek ilyen hálózata egyrészt növeli a diverzifikációt, másrészt a sokkok terjedése révén hozzájárul a rendszerkockázat megjelenéséhez (Acemoglu és szerzőtársai, 2015). Rochet és Tirole (1996) definíciója alapján a fertőzés az a jelenség, amikor egyes szereplők fizetésképtelenné válása a hozzájuk különféle pénzügyi tranzakciókon keresztül kapcso-

[1]Beérkezett 2022. augusztus 16. Csóka Péter köszöni a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának és az NKFIH K120035. számú kutatási projektjének a támogatását. E-mail: `peter.csoka@uni-corvinus.hu`, `zoltan.sass@uni-corvinus.hu`.

lódó más szereplők fizetésképtelenségét okozza. Ilyen rendszerekben a különböző csatornákon keresztül kialakuló fertőzésről számos tanulmány született. Ezeket remekül rendszerezi Upper (2011), Elsinger és szerzőtársai (2013), Glasserman és Young (2016) és Jackson és Pernoud (2021). Szeretnénk kiemelt figyelmet szentelni az olyan eseteknek, amikor körbetartozások nehezítik a fertőzés lefolyásának megállapítását. Ezen helyzetek vizsgálatában úttörő Eisenberg és Noe (2001). Rogers és Veraart (2013) ezt a modellt bővíti ki csődköltségek jelenlétének esetére, míg Glasserman és Young (2015) tanulmányában már a rendszeren kívüli kötelezettségek is jelen lehetnek. Számos tanulmány épít Eisenberg és Noe (2001) klíring algoritmusára, például Amini és szerzőtársai (2016) vagy Gai és szerzőtársai (2011). A klíringmechanizmus, mely eredetileg az aktuálisan esedékes kifizetések rendezését szabályozza, ezekben a modellekben így a sokkok lefolyását, a csőd tovaterjedését is meghatározza. A legtöbb modell egy központi klíringmechanizmusra épít, amely a rendszer teljes struktúrájának ismeretét feltételezi. Ezt a feltételezést Csóka és Herings (2018) oldja fel, és decentralizált klíringet elemez.

Közös pont a körbetartozások rendszerének vizsgálatában, hogy az egyensúlyi állapot (klíring eredménye) valamilyen, a csődszabályokat reprezentáló leképezés fixpontja. Amennyiben ez nem egyedi, a plusz bizonytalanság miatt pótlólagos rendszerkockázat léphet fel, mint például Roukny és szerzőtársai (2018) vagy Schuldenzucker és szerzőtársai (2020) modelljében. A klíring eredménye vagy az egyensúlyi kifizetéseket, vagy, amennyiben a klíring a kötelezettségek piaci áras újraértékelése, az egyensúlyi tőkeértékeket tartalmazza. Utóbbi esetben dominóhatást nemcsak a fizetésképtelenség, azaz egy ténylegesen bekövetkező csődesemény válthat ki, hanem a ,,csődközeliség" is tovaterjedhet a hálózatban. Ilyen, a hálózaton belül kötelezettségek egyensúlyi tőkeértékeken alapuló ex ante értékelése (amely szemléletében Fischer (2014) munkájára épít) jelenik meg Battiston és szerzőtársai (2012), és az arra építő Bardoscia és szerzőtársai (2015), valamint Battiston és szerzőtársai (2016) tanulmányában. Ebben a szemléletben Visentin és szerzőtársai (2016) megmutatják, hogy különböző sztenderd modellek hogyan illeszthetők egy közös keretrendszerbe. Veraart (2020) pedig kiépíti azt az egyensúlyi állapotot leíró modellt, melyben Veraart (2022) a struktúra rendszerkockázat-csökkentését célzó átalakításának lehetőségét vizsgálja. Barucca és szerzőtársai (2020) modelljében lehetőség van a jövőbeli eszközértékekkel kapcsolatos bizonytalanság beépítésére (jövőbeli sokkok, mint valószínűségi változók). Összekötve az ex ante és az ex post megközelítést megmutatják, hogy a korábbi, ex post szemléletű modellek is e modell speciális paraméterezésével adódnak.

Az egyes ágensek rendszerkockázati jelentőségének mérése egyrészt segíthet megérteni az ágensek rendszerben betöltött szerepét. Másrészt a rendszerkockázat allokációja az ágensekre alkalmazható kockázati tőkeallokációs módszerként, amely a tőketartalékoláson keresztül már a rendszerkockázat kezelését is lehetővé teszi. A Shapley-érték (Shapley (1953)) segítségével azonosítja a rendszerkockázat szempontjából fontos intézményeket, többek között Drehmann és Tarashev (2013), Bluhm és szerzőtársai (2014), valamint Borsos és szerzőtársai (2020). Brunnermeier és Cheridito (2019) egy alsóági veszteségek elleni biztosítás költségével ragadja meg a rendszer egészének kockázatosságát, majd allokálja azt az egyes szereplőkre. Demange (2018) szintén az egyes szereplők rendszerkockázathoz való hozzájárulását méri. Definiál egy indexet, mely a szereplő esetleges csődje esetén a többi szereplő fizetési képességében beálló változást fejezi ki. A rendszerkockázat mérésével és felosztásával foglalkozik Brunnermeier és Cheridito (2019) Euler-(gradiens) módszerrel.

Érdemes szereplők koalícióinak a rendszer egészének kockázatához való hozzájárulását a kooperatív játékelmélet keretei között tárgyalni, ezt alapozza meg Denault (2001). Ha a rendszer egészének kockázata kisebb, mint a komponensek kockázatainak összege, a diverzifikációs hasznot valahogy el kell osztani a komponensek között. A kockázatfelosztás alkalmazási területei Balog és szerzőtársai (2011) alapján például tőkeszükségletek/kockázati limitek kialakítása, (egyéni) teljesítménymérés. Előbbihez kapcsolódóan a VaR-alapú limitrendszerek körültekintés nélküli alkalmazása miatt kialakuló szélsőséges befektetési stratégiák veszélyére mutat rá Walter (2002). Csóka és szerzőtársai (2009) tanulmánya még körbetartozások nélküli rendszerben vizsgálja ezt a problémát, ebben az írásban a körbetartozások esetére fókuszálunk.

Az írás felépítése a következő. A 2.1 részben bemutatjuk azt a kooperatív játékelméleti keretrendszert, mely a rendszer egészének kockázatának egyes szereplőkre történő szétosztását teszi lehetővé. A 2.2 részben ismertetjük az általunk modellezett (stilizált) pénzügyi hálózat szereplőit, azok lehetséges interakcióinak szabályait, valamint bevezetjük a tőkeinjekció fogalmát. A 2.3 részben a korábbiakat összekötve definiáljuk a rendszerkockázatos tőkeallokációs játék két lehetséges verzióját és az ezekből következő rendszerkockázati indikátorokat, melyek az egyes szereplők rendszerkockázathoz történő hozzájárulását mérik. A 3. részben egy példán keresztül illusztráljuk a korábban bemutatottakat.

2 A rendszerkockázatos tőkeallokációs játék

2.1 Kooperatív játékelmélet, tőkeallokációs játékok

Ha egy pénzügyi vállalat több alegységből áll, akkor az alegységek kockázatának összege nagyobb, mint a pénzügyi vállalat kockázata, diverzifikációs hatás jelenik meg, amit valahogy fel kell osztani az alegységekre. Erre többnyire kooperatív játékelméletet használ az irodalom. A tartalékolandó tőkét a kockázati mérték határozza meg, innen a probléma elnevezése: tőkeallokációs/ kockázatelosztási játék, risk (capital) allocation game (bővebben lásd Balog és szerzőtársai (2017)). A lehetséges alkalmazások köre szerteágazó: új üzletággal kapcsolatos stratégiai döntéshozatal, termékárazás, (egyéni) teljesítményértékelés, kockázati limitek kialakítása, biztosítótársaságok kockázatfelosztása.

2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{N}$ játékosok véges halmaza, $|\mathcal{N}| = N$, így minden játékoshoz rendelhető egy őt egyértelműen azonosító index, egy pozitív egész szám. *Egy* (N, v) *átruházható hasznosságú kooperatív játék* megadható a $v : 2^{\mathcal{N}} \to I\!R$ *karakterisztikus függvénnyel*, ahol $v(\{\emptyset\}) = 0$. Az $\mathcal{N}$ játékoshalmazt tartalmazó játékokat jelölje $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$.

Egy $(N, v) \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ játék esetén jelölje $x \in I\!R^n$ a *kifizetések* vektorát, ahol x_i az $i \in \mathcal{N}$ játékos kifizetése. Az x kifizetésvektor a $C \subset \mathcal{N}$ koalíciónak $x(C) = \sum_{i \in C} x_i$ kifizetést biztosít.

Az $x \in I\!R^n$ kifizetés *egyénileg racionális*, ha $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in \mathcal{N}$ játékosra, továbbá *koalíciósan racionális*, ha $x(C) \geq v(C)$ minden $C \subset \mathcal{N}$ koalícióra. A *mag* a hatékony és koalíciósan racionális kifizetések halmaza. A magbeli kifizetések stabilak abban az értelemben, hogy egy koalíció sem akarja blokkolni őket.

A tőkeallokációs játékokhoz a kockázati mértékeket diszkrét világállapotokra fogjuk definiálni. A realizációs vektorok halmaza legyen $\mathcal{X} \in I\!R^S$, ahol S a világállapotok száma. A továbbiakban a jelölés egyszerűsítése érdekében az $s \in S$ jelölés kontextusnak megfelelően jelölhet egy adott szcenáriót a szcenáriók halmazából, vagy az annak egyértelműen megfeleltethető $s \leq S$ pozitív egész indexet. Az s világállapot/kimenetel valószínűsége legyen $p_s > 0$, ahol $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$. A továbbiakban feltételezzük, hogy a világállapotok egyenlő valószínűséggel következnek be, $p_1 = \ldots = p_S = 1/S$. Az $X \in I\!R^S$ vektor megadja egy portfólió lehetséges jövőbeli, adott időtávra vonatkozó nyereségeit. A pozitív értékek tehát nyereséget, a negatív értékek veszteséget jelentenek.

2.2. Definíció. A $\rho : I\!R^S \to I\!R$ függvény *koherens kockázati mérték* (Artzner és szerzőtársai (1999), átfogalmazva: Csóka és szerzőtársai (2009)), ha kielégít néhány alapvető követelményt (axiómát). Ezek: monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás, transzláció-invariancia.

Néhány népszerű kockázati mérték nem teljesíti például a szubadditivitás követelményét, ekkor előfordulhat, hogy két portfólió együttesének kockázata nagyobb, mint a portfóliók kockázatának összege.

Adott X realizációs vektor esetén vezessük be az $X_{s:S}$ rangsor statisztikát az $X_1, \ldots, X_S$ elemek növekvő sorrendbe rendezése után, vagyis $\{X_{1:S}, \ldots, X_{S:S}\} = \{X_1, \ldots, X_S\}$ és $X_{1:S} \leq X_{2:S} \leq \ldots \leq X_{S:S}$. Ekkor a koherens expected shortfall (lásd pl. Acerbi és Tasche (2002) és Ágoston (2010)) definíciója a következő.

2.3. Definíció. Legyenek a kimenetelek azonos bekövetkezési valószínűségűek és legyen $k \in \{1, \ldots, S\}$. Ekkor az X realizációs vektor *k-expected shortfall* értéke

$$\mathrm{ES}_k(X) = -\delta \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} X_{s:S}, \tag{2.1}$$

ahol δ a transzlációs invariancia kritériumában megjelenő kockázatmentes instrumentum ára/diszkont faktor, amit a továbbiakban 1-nek feltételezünk. Részletesebb leírásért lásd Csóka és szerzőtársai (2009).

A k-expected shortfall a legrosszabb k kimenetel diszkontált átlagos vesztesége. Vegyük észre, hogy $k = 1$ esetén a diszkontált maximális veszteséget kapjuk.

Az eddig definiált elemekből a következők szerint építhetjük fel a kockázati környezetet.

2.4. Definíció. A $(N, S, \mathbf{X}, \rho)$ *kockázati környezet* esetén N a portfóliók, S a világállapotok száma (melyről feltettük, hogy azonos valószínűséggel következnek be), $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{S\times 2^N}$ a realizációs vektorok mátrixa, ρ pedig egy koherens kockázati mérték.

Az $\mathbf{X}$ mátrix egy oszlopa tehát egy adott koalíció által a különböző világállapotokban realizált értékeket tartalmazza. Ezen realizációs mátrix rögzített, C koalícióhoz tartozó oszlopát $X(C) \in \mathbb{R}^S$-vel jelöljük. Adott kockázati környezet a következő kooperatív játékot definiálja.

2.5. Definíció. A $(N, S, \mathbf{X}, \rho)$ kockázati környezet esetén az (N, v) *tőkeallokációs játék* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvénye

$$v(C) = -\rho(X(C)) \text{ minden } C \in 2^N \text{ esetén.} \tag{2.2}$$

A maximális veszteségre $\delta = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$v(C) = -\mathrm{ES}_1(X(C)) = -\big(-\min_s X(C)_s\big) = \min_s X(C)_s.$$

2.2 Pénzügyi hálózatok és tőkeinjekció

Az eddigiekben bemutattunk néhány fogalmat és eredményt a kockázatelosztási játékok világából. A következőkben definiálunk egy konkrét kockázatelosztási játékot, melyre majd rendszerkockázatos tőkeallokációs játékként fogunk hivatkozni. Előbb bemutatunk egy stilizált pénzügyi hálózatot, ahol a szereplők interakciói következtében megjelenik a rendszerkockázat. Ezután kétféle módot is mutatunk a realizációs vektor definiálására, majd azokon koherens kockázati mértékeket alkalmazva felépítjük a rendszerkockázatos tőkeallokációs játékot, ahol a cél a rendszerkockázat felosztása (például tőkeallokáció céljából) a rendszer egyes szereplőire.

A legfontosabb jelölések és definíciók bevezetésénél a Csóka (2017) és Csóka és Herings (2021) cikkekre építünk. Egy pénzügyi hálózatot az ágensek halmaza, az ágensek induló készletének értéke, valamint az ágensek többi ágenssel szembeni tartozásainak mértéke határoz meg. Ezeket rendre az alábbiak szerint definiáljuk.

Az ágensek halmazát jelölje $\mathcal{N}$, amely a lehetséges ágensek halmazának, $\mathbb{N}$-nek egy részhalmaza, formálisan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, ahol $\mathcal{N}$ az $\mathbb{N}$ nem üres, véges részhalmazát jelöli. Az ágensekre a továbbiakban jellemzően bankokként fogunk gondolni, kivétel az 1-es számú, kitüntetett szerepű ágens, aki a nem-banki szektort/reálgazdaságot összevontan reprezentálja. A nem-banki szektorról feltesszük, nem rendelkezik tartozásokkal a többi ágens felé.

Az ágensek *induló készletét (endowments, vagy nem banki eszközállomány)* a $z \in \mathbb{R}^N_{++}$ vektor adja meg, amely esetén z_i reprezentálja az i-edik ágens minden tárgyi és immateriális eszközét, kivéve a többi ágensre vonatkozó követeléseket.

Az ágensek tartozásai az $L \in \mathbb{R}_+^{N\times N}$ *tartozási mátrix (liability matrix)* által adottak, amelyben az L_{ij} elem azt mutatja meg, hogy az i-edik ágens mennyivel tartozik j-nek. Természetesen önmaguknak nem tartoznak az ágensek, $L_{ii} = 0$ minden i-re. Ugyanakkor az előfordulhat, hogy különböző szerződések miatt i tartozik j-nek és j is tartozik i-nek, vagyis $L_{ij} > 0$ és $L_{ji} > 0$ is teljesülhet. Az ágensek összes tartozásait a $l \in \mathbb{R}_+^N$ vektor tartalmazza, ahol $l_i = \sum_{j=1}^n L_{ij}$.

2.6. Definíció. A későbbiekben szükség lesz a *relatív tartozások mátrixa* fogalmára.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{\sum_{j=1}^n L_{ij}}, & \text{ha } \sum_{j=1}^N L_{ij} > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy pénzügyi hálózat tehát a (N, z, L) hármas által definiált, az összes pénzügyi hálózatot pedig jelölje $\mathcal{F}$. Azt, hogy egy pénzügyi hálózatban az ágensek ténylegesen mennyit fizetnek egymásnak, a $P \in \mathcal{M}$ *fizetési mátrix* határozza meg, ahol $\mathcal{M}$ jelöli a a főátlójukban nullákat, egyébként nemnegatív valós számokat tartalmazó mátrixok halmazát. P_{ij} adja meg az $i \in \mathcal{N}$ ágens által a $j \in \mathcal{N}$ ágensnek fizetett összeget.

Az $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózat és a $P \in \mathcal{M}$ fizetési mátrix esetén az $i \in \mathcal{N}$ ágens *eszközeinek értéke (asset value)* legyen $a_i(N, z, P) = z_i + \sum_{j\in\mathcal{N}} P_{ji}$, amely az induló készlet és a másoktól kapott kifizetések összege. Az eszközök értékéből kivonva az ágens kifizetéseit megkapjuk az ágens *saját tőkéjét (equity)*, amely az $i \in \mathcal{N}$ ágens esetén $e_i(N, z, P) = a_i(N, z, P) - \sum_{j\in\mathcal{N}} P_{ij} = z_i + \sum_{j\in\mathcal{N}}(P_{ji} - P_{ij})$.

A csődszabályok egy $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózathoz egy $P \in \mathcal{M}$ fizetési mátrixot rendelnek.

2.7. Definíció. A *csődszabály* egy olyan $b : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ függvény, amelynél minden $(N, z, L) \in \mathcal{F}$-re $b(N, z, L) \in \mathcal{M}$.

A $p : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ i arányos csődszabály esetén minden ágens a tartozásaival arányosan fizet az eszközeiből.

2.8. Definíció. Az *arányos csődszabály* az a $p : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ függvény, amelynél minden $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ esetén teljesül, hogy $p(N, z, L) = P$, ahol a P mátrix az alábbi egyenletrendszer megoldása:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{ij} = 0, \\ \min\left\{ \frac{L_{ij}}{\sum_{k\in\mathcal{N}} L_{ik}} a_i(N, z, P), L_{ij} \right\} & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Eisenberg és Noe (2001) eredményeiből (Theorem 2) következik, hogy (2.3)-nak egyértelmű a megoldása. Minden ágens maximum annyit fizet vissza, amennyit eszközoldalából fedezni tud, ugyanakkor, ha egy ágens nem tud teljes egészében eleget tenni kötelezettségeinek, akkor eszközértékével egyenlő nagyságú összkifizetést kell teljesítenie. Arányos csődszabály esetében ezt úgy teszi, hogy kötelezettségei ugyanakkora hányadát fizeti vissza összes hitelezője felé (banki és nembanki hitelezők felé egyaránt). Ebben az írásban végig az arányos csődszabályt használjuk, de elképzelhető más csődszabály is, példákért lásd Csóka és Kondor (2020).

A következőkben szükségünk lesz a minimális tőkeinjekció definíciójára. Ez az a minimális pénzösszeg, amelyet a szereplők adott $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$ halmazában szét kell osztani ahhoz, hogy annak minden tagja szolvens maradjon.

Jelölje $g \in I\!R^N$ az egyes ágensek számára nyújtott nemnegatív pénzösszegek vektorát, míg g_i jelöli ezen vektor i-edik elemét. A tőkeinjekció az ágensek induló készletét növeli. A továbbiakban, amikor $\sum_{i \in C}$ kifejezést írunk (ahol $C \subset \mathcal{N}$ az ágensek tetszőleges, nemüres halmaza), ezzel a C-beli ágenseknek egyértelműen megfeleltethető $1 \leq i \leq N$ indexek fölötti összegzést értjük.

2.9. Definíció. Az $(N, S, \{z^s\}_{s \in S}, \{L^s\}_{s \in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet és a bankok $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$, koalíciója esetén az s világállapotban a C koalíció számára szükséges *minimális tőkeinjekció (továbbiakban csak tőkeinjekció)* összegét, k^s_C-t definiáljuk az alábbi módon:

$$k^s_C = \min \sum_{i \in C} g_i$$

úgy, hogy

$$p(N, z^s + g, L^s)_{ij} = L_{ij} \quad \forall i \in C, j \in \mathcal{N}$$

valamint

$$g_i \geq 0 \quad \forall i \in C, \qquad \text{és} \qquad g_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus C.$$

Vegyük észre, hogy a k^s_C-ben kizárólag C koalíció tagjainak visszafizetésére koncentrálunk, a többi ágens szolvenssége nem szempont. A definíció nem ad receptet arra nézve, hogyan határozható meg az adott világállapotban szükséges minimális tőkeinjekció, erre a kérdésre a 3.1 részben térünk vissza. A 2.9. definícióban a szereplők C részhalmazának kimentéséhez szükséges minimális pénzösszeget úgy határoztuk meg, hogy a tőkeinjekcióból csak C tagjai részesedhetnek nem nulla összeggel. Tekintsünk átmenetileg egy kissé módosított definíciót, ahol ez utóbbi korlátozást feloldjuk.

2.10. Definíció. Az $(N, S, \{z^s\}_{s \in S}, \{L^s\}_{s \in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet és a bankok $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$, koalíciója esetén a C koalíció számára szükséges *megkötés nélküli minimális tőkeinjekció* összegét, κ^s_C-t definiáljuk az alábbi módon:

$$\kappa^s_C = \min \sum_{i \in C} g_i$$

úgy, hogy

$$p(N, z^s + g, L^s)_{ij} = L_{ij} \quad \forall i \in C, j \in \mathcal{N}$$

valamint

$$g_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Felmerül a kérdés, létezhet-e olyan pénzügyi hálózatos kockázati környezet és benne ágensek olyan koalíciója, melyre a megkötés nélküli minimális tőkeinjekció összege szigorúan kisebb, mint a minimális tőkeinjekció összege, azaz olcsóbban megoldható-e ágensek egy csoportjának kimentése, ha tőkeinjekciót bárki kaphat a rendszeren belül. Másképp, induljunk ki egy adott C koalíció számára szükséges minimális tőkeinjekcióból (2.9), és vizsgáljuk meg, lehetséges-e a tőkeinjekciót alkotó plusz forrásokat úgy átcsoportosítani $\mathcal{N} \setminus C$ koalíción kívüli ágensek számára úgy, hogy továbbra is garantáljuk, C egyik tagja sincs csődben, de az ennek eléréséhez szükséges pénzösszeg csökkenjen. A kérdés két szempontból jelentős. Egyrészt, amennyiben ez lehetséges, az sokat elárul a rendszeren belüli tovagyűrűző hatások erősségéről. Másrészt, a gyakorlati alkalmazhatóságot nagyban segíti, ha nem kell megkötés nélküli minimális tőkeinjekciót (2.10) számolni.

2.1. Állítás. Tetszőleges $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet és tetszőleges $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$ nem üres koalíció esetén $\kappa_C^s = k_C^s$

Bizonyítás. A 2.2. Állítás kimondja, hogy tetszőleges pénzösszeg jobban hasznosul közvetlenül C koalíció tagjainak adva, olyan értelemben, hogy ekkor fog a koalíció tagjainak összvisszafizetése $(\sum_{i\in C}\sum_{j\in\mathcal{N}} p(N, z^s, L^s)_{ij})$ maximálisan nőni. Ez az eredmény ellentmond a korábban vázolt reallokációs séma létezésének, így bizonyítva az állítást. □

2.2. Állítás. Adott $k > 0$ pénzösszeget C koalíció tagjai között optimálisan szétosztva, annak összvisszafizetése $(p_C := \sum_{i\in C}\sum_{j\in\mathcal{N}} p(N, z^s, L^s)_{ij})$ legalább annyival nő, mintha ezt a k összeget tetszőleges $\mathcal{N} \setminus C$-beli ágensek között osztottuk volna szét optimálisan. Ez azt is jelenti, hogy tetszőleges pénzösszeg, amit $\mathcal{N} \setminus C$ tagjainak adnánk, reallokálható C tagjai számára úgy, hogy p_C nem csökken.

Bizonyítás. Jelölje $D \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$ a csődös szereplők halmazát. Nézzük meg, mi a hatása, ha $k > 0$ összeget juttatunk $j \in \mathcal{N} \setminus C$ ágensnek. Ez egyedül akkor érdekes, ha $j \in D$ is teljesül, azaz j csődben van. Hiszen ha j már e tőkeinjekció előtt sem volt csődben, teljes összegben fizetett minden hitelezőjének, így a visszafizetése nem növelhető. Tegyük fel, hogy ezen k összeget C tagjai közt optimálisan szétosztva p_C-ben $a_k > 0$ növekedés áll be (amely már tartalmaz minden tovagyűrűző hatást). Ez azt jelenti, hogy ha egy k összeg tetszőleges $i \in C$-hez jut (akár közvetlenül, akár a többi ágens visszafizetésének növekedésén keresztül), p_C legfeljebb a_k összeggel nő. Megmutatjuk, hogy k összeget tetszőleges $j \in \mathcal{N} \setminus C$ ágensnek juttatva, a p_C-ben beálló növekedés $b_k \leq a_k$. Ha a k összeget tetszőleges ilyen j-nek adjuk, p_C növekedése felülről becsülhető az alábbi végtelen tagú összeggel:

$$b_k \leq a_k \sum_{i\in C} \Pi_{ji} + a_k \sum_{k\in D\setminus C} \Pi_{jk} \sum_{i\in C} \Pi_{ki} + a_k \sum_{k\in D\setminus C, f\in D\setminus C} \Pi_{jk}\Pi_{kf} \sum_{i\in C} \Pi_{fi} + \ldots$$

$$+ a_k \sum_{j_k\in D\setminus\{i\}, k=1\ldots p-1} \Pi_{jj_1}\Pi_{j_1j_2} \ldots \sum_{i\in C} \Pi_{j_{p-1}i} + \ldots , \tag{2.4}$$

ahol Π a relatív tartozások mátrixa (2.6. Definíció). Annak belátásához, hogy ez valóban felső becslés, képzeletben kövessük végig, a k pénzösszeg hogyan áramlik keresztül a rendszeren, és milyen tovagyűrűző hatások vannak (ahogy az ágensek visszafizetésének növekedése más ágensek visszafizetéséhez vezet). A csupa nemnegatív tagú összegek bizonyos tagjai kisebbek lehetnek vagy hiányozhatnak is, amennyiben bizonyos bankok valamely lépésben kikerülnek a csődös bankok halmazából. Az összegzés azért csak $D \setminus C$ szereplőkre történik, mert amint k valamekkora x része eljut C bármely tagjához, p_c-ben beálló növekedést felülről becsülhetjük xa_k-val. Ez utóbbi szintén felső becslés, két okból. Egyrészt, nem feltétlen van optimálisan szétosztva, másrészt, előfordulhat, hogy D szűkült időközben, kevesebb csatorna áll rendelkezésre a visszafizetés növelésére, így a hatás is legfeljebb a_k. Vegyük észre, hogy $\sum_{i\in C}\Pi_{ji} \leq 1-\sum_{k\in D\setminus C}\Pi_{jk}$, és hasonlóan, az összeg p-edik tagjában, a szorzat utolsó tagja esetén, $\sum_{i\in C}\Pi_{j_{p-1}i} \leq 1-\sum_{j_p\in D\setminus C}\Pi_{j_{p-1}j_p}$. Emeljük ki a_k-t az összes tagból:

$$(2.4) \leq a_k\Big((1-\sum_{k\in D\setminus C}\Pi_{jk}) + \sum_{k\in D\setminus C}\Pi_{jk}(1-\sum_{f\in D\setminus C}\Pi_{kf})+$$

$$+\sum_{k\in D\setminus C, f\in D\setminus C}\Pi_{jk}\Pi_{kf}(1-\sum_{g\in D\setminus C}\Pi_{fg}) + \ldots$$

$$+\sum_{j_k\in D\setminus C, k=1\ldots p-1}\Pi_{jj_1}\Pi_{j_1j_2}\ldots\Pi_{j_{p-2}j_{p-1}}(1-\sum_{j_p\in D\setminus C}\Pi_{j_{p-1}j_p}) + \ldots\Big). \quad (2.5)$$

Az átláthatóság kedvéért vezessük be az alábbi jelölést.

$$Q_p = \sum_{j_k\in D\setminus C, k=1\ldots p}\Pi_{jj_1}\Pi_{j_1j_2}\ldots\Pi_{j_{p-1}j_p}.$$

Ezzel a jelöléssel

$$(2.5) = a_k\Big((1-Q_1)+(Q_1-Q_2)+\ldots+(Q_{p-1}-Q_p)+\ldots\Big).$$

Mivel $0 \leq Q_p \leq Q_{p+1} \quad \forall p \leq N$, a teleszkopikus sor összege legfeljebb 1, tehát $b_k \leq a_k$. A bizonyítás teljes, hiszen a fenti eredmény triviálisan továbbvihető C-n kívüli ágensek halmazára, az egyes ágenseknek juttatott összeg hatását sorban, egymás után vizsgálva. □

A továbbiakban tehát, mivel a tőkeinjekció összege szempontjából irreleváns, ki (nem) részesülhet belőle, amennyiben tőkeinjekciót említünk, mindig az eredeti (2.9) verzióját értjük alatta. Megjegyzendő, hogy az általunk használt tőkeinjekció fogalma szemléletében eltér például a Demange (2018) által alkalmazottól, ahol a cél egy adott rendelkezésre álló keret optimális elosztása. Nagyon hasonló viszont Jackson és Pernoud (2020) tőkeinjekció definíciója, azzal a különbséggel, hogy számunkra nemcsak a teljes rendszer kimentésének költsége érdekes, minden koalícióra meg kell határoznunk ezt az összeget.

2.3 Tőkeallokáció és rendszerkockázati indikátor

Drehmann és Tarashev (2013) alapján a következők szerint építhetjük fel a pénzügyi hálózatos kockázati környezetet, mely összegyűjti a rendszerkockázatos tőkeallokációs játék definiálásához szükséges építőkockákat.

2.11. Definíció. Az $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ *pénzügyi hálózatos kockázati környezet* esetén $\mathcal{N}$ az ágensek halmaza, ahol az 1-es ágens a nem bankszektor (reálgazdaság), a többi ágens pedig bank, S a világállapotok száma (mind azonos valószínűséggel következik be), z^s az ágensek induló készlete az s világállapotban, L^s a tartozások mátrixa s világállapotban (melyekről a továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy minden világállapotban megegyeznek), ρ pedig egy koherens kockázati mérték.

A rendszerkockázat modellezése során minden egyes világállapotban adott egy pénzügyi hálózat, melyek az ágensek z nem banki eszközeinek értékében (z^s) térnek el. Az arányos csődszabály pedig ebben az esetben egyértelműen meghatározza, melyik ágens kinek mennyit fizessen. A csődszabály választásával tehát az ágensek ezen eszközeit értintő sokkok tovaterjedésének módját is rögzítettük. A tőkeallokációs játékhoz szükségünk van realizációs vektorokra, a következő döntést tehát arról kell meghoznunk, a rendszer milyen paramétereit vizsgáljuk, hogy eldöntsük, mennyire súlyosan érintették ezek a sokkok a rendszert. Nézhetjük például a nem banki hitelezők veszteségét (2.12. Definíció), vagy az ágensek kimentéséhez szükséges minimális tőkeinjekciót (2.13. Definíció).

2.12. Definíció. Az $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet és a bankok $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$, koalíciója esetén az s világállapotban a C koalíció *nem banki veszteségekkel definiált realizációja*, azaz a realizációs vektor s szcenárióhoz tartozó eleme legyen

$$X(C)_s = \sum_{i\in C} \left(p(N, z^s, L^s)_{i1} - L^s_{i1}\right), \tag{2.6}$$

ahol $L^s_{i1} - p(N, z^s, L^s)_{i1}$ a nem bankszektornak (kitüntetett 1-es szereplő) az i bank által okozott veszteség.

Célszerű a nem banki szektor veszteségét nézni, az összes veszteség mérése Drehmann és Tarashev (2013) érvelésének megfelelően egyfajta többszörös számlálást jelentene. A realizációs vektorban ennek az ellentettje szerepel, mert ott a negatív értékek reprezentálják a veszteséget.

2.13. Definíció. Az $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet és a bankok $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$, koalíciója esetén az s világállapotban a C koalíció *nem banki veszteségekkel definiált realizációja*, azaz a realizációs vektor s szcenárióhoz tartozó eleme legyen

$$X(C)_s = -k^s_C, \tag{2.7}$$

ahol a tőkeinjekció ellentettje szerepel, hiszen a negatív értékek reprezentálják a veszteséget.

2.14. Definíció. Adott $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet esetén az (N, v) *rendszerkockázatos tőkeallokációs játék* $v : 2^{\mathcal{N}\setminus\{1\}} \to I\!R$ karakterisztikus függvénye (a realizációs vektort akár nem banki veszteségek, akár tőkeinjekció összegével definiálva)

$$v(C) = -\rho(X(C)), \quad C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}. \tag{2.8}$$

A továbbiakban ha rendszerkockázatos tőkeallokációs játékot említünk, az jelentheti akár azt az esetet, melyben a realizációs vektort nem banki veszteségek, akár azt, amikor tőkeinjekció összegével definiáljuk. Ahol számít, külön megemlítjük, melyik esetre gondolunk, ellenkező esetben az állítások mindkét verzióra vonatkoznak.

2.1. Példa. Tekintsük az $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezetet, ahol $N = \{1, 2, 3\}$ az ágensek halmaza, az 1-es ágens a nem banki szektor, $S = \{1, 2\}$ a világállapotok halmaza $p_1 = p_2 = 0{,}5$, ρ pedig a maximális veszteség. λ^* az arányos csődszabály szerinti (egyensúlyi) visszafizetési arányt jelöli.

i	z_i^1	L_{ij}^1			λ^*	a_i	e_i	$p(N, z^1, L^1)_{i1} - L_{i1}^1$
Ágens 1	0	0	0	0		4,3	4,3	
Ágens 2	1,9	1	0	3	0,7	2,8	0	-0,3
Ágens 3	2,4	4	1	0	0,9	4,5	0	-0,4

1. táblázat. A pénzügyi hálózatos kockázati környezet az 1-es világállapotban. *Forrás:* saját szerkesztés.

Vegyük észre, hogy az 1-es világállapotban a 2-es ágens (bank) fundamentális csődben van, a 3-as ágens (bank) csődje viszont fertőzéses, csak azért nem tud fizetni, mert nem kapja meg az összes követelését.

i	z_i^2	L_{ij}^2			λ^*	a_i	e_i	$p(N, z^2, L^2)_{i1} - L_{i1}^2$
Ágens 1	0	0	0	0		4,5	4,5	
Ágens 2	1,4	1	0	3	0,6	2,4	0	-0,4
Ágens 3	5	4	1	0	1	6,8	1,8	0

2. táblázat. A pénzügyi hálózatos kockázati környezet a 2-es világállapotban. *Forrás:* saját szerkesztés.

Vegyük észre, hogy a 2-es világállapotban a 2-es ágens fundamentális csődben van, a 3-as ágens nincs csődben.

A (2.8) egyenletet használva a 3. (4.) táblázatban lévő tőkeallokációs játékot kapjuk, amennyiben a realizációs vektort a 2.12. Definíció (2.13. Definíció) határozza meg. Figyeljük meg, a játék mindkét esetben szuperadditív (a rendszerkockázat szintjén megfogalmazva: a részek kockázatának összege nagyobb, mint a rendszer egészének kockázata), a megjelenő diverzifikációs hatás szétosztása a kooperatív játékelmélet eszközeivel lehetséges.

C	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$
$X^1(C)$	-0,3	-0,4	-0,7
$X^2(C)$	-0,4	0	-0,4
$\mathrm{ES}_1(C)$	0,4	0,4	0,7
$v(C)$	-0,4	-0,4	-0,7

3. táblázat. A rendszerkockázatos tőkeallokációs játék, amennyiben a realizációs vektort a banki veszteségek határozzák meg. *Forrás:* saját szerkesztés.

C	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$X^1(C)$	-1,1	-0,425	-1,1
$X^2(C)$	-1,6	0,0	-1,6
$\mathrm{ES}_1(C)$	1,6	0,425	1,6
$v(C)$	-1,6	-0,425	-1,6

4. táblázat. A rendszerkockázatos tőkeallokációs játék, amennyiben a realizációs vektort tőkeinjekció segítségével határozzuk meg. *Forrás:* saját szerkesztés.

A következőkben belátjuk, hogy tőkeinjekcióval mért kockázat esetén megjelenik a diverzifikációs hatás, vagyis két diszjunkt koalíció kockázatának összege nem lehet kisebb, mint együttes kockázatuk. Mivel a karakterisztikus függvény a kockázat ellentettje, a generált kooperatív játék szuperadditív.

2.3. Állítás. Az $(N, S, \{z_s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezet, tőkeinjekcióval definiált realizációs vektor és banki ágensek diszjunkt $C, T \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$ halmaza esetén:

$$v(C \cup T) \geq v(C) + v(T). \tag{2.9}$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$k^s_C + k^s_T \geq k^s_{C\cup T} \quad \forall T, C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}, \quad \forall s \in S.$$

Vagyis,

$$X_s(C \cup T) \geq X_s(C) + X_s(T) \quad \forall T, C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}, \quad \forall s \in S.$$

Mivel ez minden világállapotra fennáll, a koherens kockázati mérték monotonitását felhasználva:

$$\rho(X(C \cup T)_s) \leq \rho(X(C)_s + X(T)_s) \quad \forall T, C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}.$$

A koherens kockázati mérték szubadditivitása miatt:

$$\rho(X(C\cup T)_s) \leq \rho(X(C)_s + X(T)_s) \leq \rho(X(C)_s) + \rho(X(T)_s) \quad \forall T, C \subset \mathcal{N}\setminus\{1\}.$$

□

Az állítás természetesen nem banki veszteségekkel definiált realizációs vektor esetén is érvényes, a bizonyítás triviálisan következik.

Miután definiáltuk a rendszerkockázatos játékot, még szükség van egy módszerre, mellyel az egyes szereplők rendszerkockázathoz történő hozzájárulását mérjük. Ez a nagykoalíció értékének szétosztásával lehetséges, valamely, kooperatív játékelméletből ismert megoldási koncepció segítségével. Mi a továbbiakban a Shapley-értéket (Shapley (1953)) fogjuk alkalmazni. Ez az az egyértelmű szétosztási elv, mely teljesíti a egyenlően kezelés, erős monotonitás és jól definiáltság kritériumait, de nem feltétlen magbeli, tehát a koalíciós elfogadhatóság sérülhet használatával. Ezen felül elosztás, tehát egyénileg elfogadható: semelyik ágensre (bankra) nem oszt nagyobb kockázatot, mint amit az ágens egymaga visel.

2.15. Definíció. Adott $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezethez tartozó (N, v) rendszerkockázatos tőkeallokációs játék mellett tetszőleges $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$ ágens *rendszerkockázati indikátorát* az ágens Shapley-értéke adja.

$$\varphi_i = -\sum_{C\subseteq N\setminus\{i,1\}} \frac{|C|!\,(k-|C|-1)!}{k!}(v(C\cup\{i\}) - v(C)), \tag{2.10}$$

ahol az átláthatóság kedvéért $k = n-1$ az ágensek száma a nem banki szektor nélkül.

3 Implementáció, a rendszerkockázati indikátorok összehasonlítása

A következőkben ismertetünk egy, a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából kritikus részletet. A 2.9. Definíció nem adott receptet arra, hogyan számolható az egyes szcenáriókban szükséges minimális tőkeinjekció. Látni fogjuk, hogy amennyiben a tőkeinjekció a 2.9. Definíció szerint kerül meghatározásra, a feladat rendkívül egyszerű. Emiatt kulcsfontosságú tehát a 2.1. Állítás: mindegy, hogy a tőkeinjekciót 2.9 vagy 2.10 alapján definiáljuk, az ezekhez szükséges teljes összeg ugyanaz.

3.1 A minimálisan szükséges tőkeinjekció meghatározása

Vegyük a $(N, S, \{z^s\}_{s\in S}, \{L^s\}_{s\in S}, \rho)$ pénzügyi hálózatos kockázati környezetet és a banki ágensek $C \subset \mathcal{N} \setminus \{1\}$ koalícióját az s világállapotban: a cél meghatározni azon minimális pénzösszeget és annak allokációját, amely garantálja minden C-beli ágens csődmentességét. Rögzítsük a szcenáriót, és módosítsuk az ebben a szcenárióban realizálódott (N, z, L) pénzügyi hálózatot az alábbi módon:

- Az új rendszerben az ágensek halmaza: $I^C := \mathcal{N} \setminus C$.
- A tartozások mátrixa $L^C \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}\setminus C|\times|\mathcal{N}\setminus C|} := \{L_{i\in\mathcal{N}\setminus C, j\in\mathcal{N}\setminus C}\}^2$, ahol eltávolítjuk a C-ben szereplő banki ágensekhez tartozó sorokat és oszlopokat.
- Az új induló készletek $z^C \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}\setminus C|}$, ahol $z_i^C := z_i + \sum_{j\in C} L_{ji} \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus C$, hiszen az összes C-beli szereplő teljes összegben fizet a tőkeinjekció hatására.
- Az (új) tartozások mátrixának első oszlopát átírjuk: $L_{i1}^C := L_{i1} + \sum_{j\in C} L_{ij}$ minden $i \in \mathcal{N} \setminus C$-re, a C-beli ágensek felé fennálló tartozásokat átcsoportosítjuk, mintha a nem-banki szektor felé állnának fent. Ez megtehető, hiszen a reálgazdaság által teljesített visszafizetés nem modellezett mennyiség.

[2]Ahol az indexek a korábbiakban leírtaknak megfelelően értendők

Az így létrehozott (I^C, z^C, L^C) pénzügyi hálózat ugyanolyan – a klíringmátrix létezése, unicitása szempontjából releváns – tulajdonságokkal bír, mint az eredeti pénzügyi hálózat, így klíringmátrix ugyanúgy számolható rá. A 2.9. Definíció szerinti tőkeinjekcióból nem részesedhet C-n kívüli ágens, így a módosított pénzügyi rendszerben úgy számolható klíringmátrix, hogy még nem tudjuk, melyik C-beli ágens mekkora összeget kapott: elég azt tudni, hogy ezek elegendőek minden C-beli ágens szolvensségéhez. Jelölje a módosított pénzügyi rendszerben az arányos csődszabálynak megfelelő (egyedi) klíringmátrixot $p(I^C, z^C, L^C)$. Ennek ismeretében tudjuk, a tőkeinjekció után melyik ágens mennyit fog fizetni, így az egyes C-beli szereplőknek szükséges pénzösszeg meghatározása triviális feladat:

$$x_j = \max\Big(\sum_{i\in\mathcal{N}} L_{ji} - z_j - \sum_{k\in\mathcal{N}\setminus C} p(I^C, z^C, L^C)_{jk} - \sum_{l\in C} L_{jl}, 0\Big) \quad \forall j \in C\,, \tag{3.1}$$

tehát a C-beli ágensektől a teljes követelést megkapják, míg a C-n kívüli ágensek visszafizetését az előbb meghatározott klíringmátrix adja. Vegyük észre, hogy a módosított pénzügyi rendszert csak a C-n kívüli ágensek visszafizetésének meghatározására használtuk, a C-beli szereplők számára természetesen továbbra is az eredeti L mátrix és z induló készlet a releváns. A C koalíció kimentéséhez szükséges tőkeinjekció teljes összege tehát:

$$k_C^A = \sum_{j\in C} x_j. \tag{3.2}$$

A módszerrel tehát az optimális tőkeinjekció meghatározása egy klíringmátrix számolásához mérhető számítású igényű probléma. Természetesen a feladat minden világállapotra és ágensek minden koalíciójára elvégzendő. A klíringmátrix meghatározása arányos csődszabály esetén általános esetben egy fixpont-iterációval megoldható, melynek konvergenciája gyorsítható például Irons és Tuck (1969) módszerével. Egy másik lehetőség Rogers és Veraart (2013) algoritmusának alkalmazása.

3.2 Szimulációs példa

A következő példa célja, hogy előrevetítse az eddig bemutatottak gyakorlati alkalmazhatóságát, valamint szemléltesse, mekkora jelentősége lehet, melyik módszerrel definiáljuk a realizációs vektort.

Feltételezzük, hogy a rendszerben az egyedüli sztochasztikus komponens az ágensek induló készlete. Ezt $z_i = e^{Y_i}\bar{z}_i$ alakú felbontásával fejezzük ki, ahol $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^N$ determinisztikus, az induló készletet érintő sokkokat reprezentáló valószínűségi vektorváltozót pedig $Y \in \mathbb{R}^N$ jelöli. Monte Carlo szimulációval generálunk 200 000 szcenáriót (a sokkok Y együttes eloszlásából), majd ebből 1000 db bootstrap minta segítségével határozunk meg konfidenciaintervallumokat a releváns mennyiségekre.

A rendszer a nem-banki szektorból és 7 banki ágensből: egy központi szereplőből, 3 egymástól megkülönböztethetetlen hitelezőből és 3 egymástól megkülönböztethetetlen hitelfelvevő szereplőből áll. Ezek az ágensek egymáshoz csak a központi szereplőn keresztül kapcsolódnak. A hitelfelvevő banki szereplők tehát mind azonos nagyságú tartozásokkal rendelkeznek a központi szereplő felé, akinek pedig a hitelezők felé van tartozása. Ezen kapcsolatok nagysága a relatív tartozások mátrixa segítségével kifejezve:

$$\Pi_{\text{hitelfelvevő, központi}} = r, \quad \text{és} \quad \Pi_{\text{központi, hitelező}} = r.$$

Az 5. táblázat tartalmazza a rendszer releváns paramétereit. Az összekapcsoltság növelésének hatását hasonló módon vizsgálja Nier és szerzőtársai (2007).

	$\bar{z}_i$	l_i	$\sum_j \Pi_{j,i}$	$\sum_j \Pi_{i,j}$	L_{i1}	P_{fund}
központi	$(l_c - 0{,}94 * 3 * l_b)/0{,}94$	$87/(1 - 3 * r)$	$3r$	$3r$	87	0,05
hitelező	$l_b/0{,}94$	$87/(1 - r)$	0	r	87	0, 05
hitelfelvevő	$(l_l - r * l_c)/0{,}94$	87	r	0	87	0,05

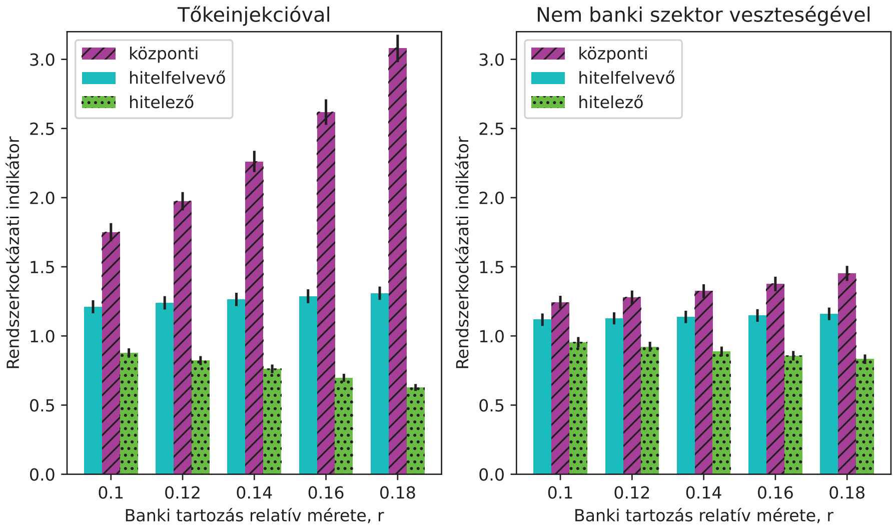
5. táblázat. A példában szereplő rendszer. *Forrás:* saját szerkesztés.

Függetlenül r értékétől, az alábbiak mindig fennálnak:

- Az induló készletek sokkok előtti értékét figyelembe véve, az ágensek 6% tőkemegfelelési mutatóval rendelkeznek: $\frac{\bar{e}_i + l_i}{l_i} = 6\% \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$, ahol $\bar{e}_i = \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{n} L_{ji} - l_i$.
- A nem banki szektor felé fennálló tartozás az adott ágens rendszerben betöltött szerepétől függetlenül állandó: $L_{i1} = 87 \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$.

Arányos csődszabályt feltételezünk, melyben az összes (banki ágensek és a reálgazdaság tagjai) szereplő felé fennálló tartozások ugyanolyan szenioritással rendelkeznek. Minden $s \in S$ szcenárióban szükség van a kiinduló készletek realizált értékére. Az i ágens eszközoldalát érintő sokk loghozamát reprezentáló Y_i valószínűségi változóról feltesszük, hogy normális eloszlású 0 várható értékkel és σ_i szórással: $Y_i = \sigma_i \left(\beta\zeta + \sqrt{1 - \beta^2}\xi_i\right)$, ahol $\{\xi_i, \zeta\}$, a közös piaci és az egyedi faktorok sztenderd normális eloszlású, páronként független változók. A szórások σ_i értékét úgy állítjuk be, hogy előre meghatározott, rögzített fundamentális csődvalószínűségeket kapjunk (5. táblázat utolsó oszlopa, P_{fund}). Ezzel egy olyan befektetési politikát feltételezünk, mely csak a nem-banki eszközök kockázatosságát veszi figyelembe, és figyelmen kívül hagyja a bankközi követeléseken fellépő partnerkockázatot, így az ágensek összekapcsoltsága miatt fellépő rendszerkockázattal nem számol.

Az egyes ágensek befektetési hozamainak korrelációja, β minden esetben 60% ebben a példában. A realizációs vektorokat mind a nem banki veszteségek, mind a tőkeinjekciók összegével meghatározzuk, ezután a 2%-os expected shortfallt használjuk kockázati mértékként. Az első esetben tehát minden koalíció értékét a legrosszabb 2%-hoz tartozó átlagos, a koalíció tagjai által nem banki szektorra rótt veszteség adja. A második esetben ez a koalíció kimentéséhez szükséges tőkeinjekció átlagos összege az esetek legrosszabb 2%-ában.



1. ábra. Rendszerkockázati indikátorok r függvényében

Az 1. ábra az összekapcsoltság növelésének (r növelésén keresztül) a különböző típusú (központi, hitelező, hitelfelvevő) ágensek rendszerkockázati indikátorára gyakorolt hatását mutatja be. Egy adott oszlop magassága tehát egy adott kategóriába tartozó ágens átlagos (hiszen a szimuláció miatt például a három hitelező között lehetnek minimális különbségek) rendszerkockázati indikátorát mutatja. Az ábra emellett tartalmazza az indikátorok 90%-os bootstrap konfidenciaintervallumait is.

A rendszer egészének kockázata természetesen el fog térni annak függvényében, melyik módszert alkalmazzuk a realizációs vektor definiálására. Sokkal érdekesebb megfigyelni, mennyire más rendszerkockázati jelentőséget társít a két módszer a központi ágensnek.

Az összekapcsoltság növelésével a központi ágens rendszerkockázati indikátora is nő, ez közös a két módszerben. Lényegesen eltér azonban a növekedés mértéke. Ahogy az összekapcsoltság nő, a központi ágens nagyobb eséllyel szenved el akkora veszteségeket a (hitelezők felé fennálló) kötelezettségein, hogy már nem tud tartozásai egészének eleget tenni, nő a fertőzéses csőd valószínűsége. Mivel ő az egyedüli ágens, aki több, rendszeren belüli követeléssel rendelkezik, a fertőzéses csőd őt fogja legsúlyosabban érinteni (a példában nem elhanyagolható a nem banki eszközhozamok korrelációja).

Nézzük előbb a nem banki veszteségekkel definiált realizációs vektor esetét. A nem banki eszközértékek végig azonosak az összes ágensre. Ahogy tehát növeljük az összekapcsoltságot, a nem banki tartozások súlya csökken a központi szereplő esetén. Így ugyan hiába játszik központi szerepet a fertőzés tovaterjedésében, a növekvő fertőzéses csődvalószínűség csak kismértékben képes rendszerkockázati indikátorát növelni.

Ezzel szemben, amennyiben a realizációs vektort tőkeinjekció adja, az összekapcsoltság növelése sokkal dinamikusabban emeli a központi ágens rendszerkockázati indikátorát. A nagyobb összekapcsoltságból eredő nagyobb veszteségeket csak egyre nagyobb tőkeinjekció képes semlegesíteni.

Amennyiben kizárólag a nem banki hitelezők veszteségeire koncentrálunk, a központi ágens jelentősége nem kiugró, még magas összekapcsoltság esetén sem. Ha a rendszer egészének stabilitása a kérdés (tőkeinjekcióval mért kockázat), a központi ágens kritikus szerepe látványos lesz, főleg magas összekapcsoltság mellett.

Bár a modell képes körbetartozásokat kezelni, ez ebben a példában nem jelenik meg. A struktúraválasztást e helyett a háromféle banki ágens markánsan eltérő szerepe, és az ebből következően eltérő rendszerkockázati jelentőségük bemutatása motiválja.

4 Záró megjegyzések

Bemutattunk egy rendszerkockázat mérésére és az egyes szereplők hozzájárulásainak mérésére alkalmas modellt, miután ismertettük az ehhez szükséges építőkockákat. A szokásos, hitelezők veszteségére fókuszáló módszerek alternatívájaként tőkeinjekciókat is alkalmazhatunk a kockázatosság mérésére. Miután ismertettünk egy ezzel kapcsolatos eredményt, egy szimulációs példán keresztül mutattuk be a két módszer különbözőségét. Ez utóbbi eredmény előrevetíti egy esetleges gyakorlati alkalmazás során meghozandó kritikus döntéseket.

A jelenlegi modell több ponton tartalmaz jelentős egyszerűsítéseket. A sokkok terjedésének dinamikája és a szabályozói beavatkozás lehetőségei alapjaiban mások, ha számolunk csődköltségek megjelenésével. Egy másik egyszerűsítő feltételezés, melyet érdemes lehet feloldani, az összes kötelezettség azonos szenioritási szintje. Szintén egyszerűsítés, hogy a kötelezettségek hálózata exogén és változatlan. Miután rögzítettünk egy módszert a rendszerkockázat mérésére, egy kézenfekvő kutatási irány valamely, a rendszer struktúráját érintő beavatkozás lehetősége. Ilyen beavatkozás célja például lehet a rendszerkockázat minimalizálása, módja pedig például a portfólió kompresszió. Ez utóbbiról lásd D'Errico és Roukny (2021) vagy Schuldenzucker és Seuken (2020). Mivel a portfólió kompresszió ugyanarra a gráfelméleti problémára vezethető vissza, mint például a vesecsereprogramok, az utóbbihoz kötődő eredmények (lásd például Biró és szerzőtársai (2021)) jelentősen segíthetik ezt a kutatási irányt. Ezen felül, bár a bemutatott példában a tőkemegfelelési mutatót rögzített értéken tartottuk, modellünkkel megvizsgálható az is, hogy a rendszerkockázati indikátor hogyan függ a tőkemegfelelési mutatótól.

Irodalom

1. Acemoglu, D., Ozdaglar, A., és Tahbaz-Salehi, A. (2015). Systemic risk and stability in financial networks. *American Economic Review*, 105(2):564–608.
2. Acerbi, C. és Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503.

3. Ágoston, K. C. (2010). Cvar számítás SRA algoritmussal. *Szigma*, 41(1-2):61–73.
4. Allen, F. és Babus, A. (2009). Networks in finance. *The network challenge: strategy, profit, and risk in an interlinked world*, 367.
5. Amini, H., Cont, R., és Minca, A. (2016). Resilience to contagion in financial networks. *Mathematical Finance*, 26(2):329–365.
6. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., és Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228.
7. Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P., és Pintér, M. (2011). Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban (Methods of capital allocation and their characteristics in practice). *Közgazdasági Szemle*, 58(7-8):619–632.
8. Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P., és Pintér, M. (2017). Properties and comparison of risk capital allocation methods. *European Journal of Operational Research*, 259(2): 614–625.
9. Bardoscia, M., Battiston, S., Caccioli, F., és Caldarelli, G. (201506). Debtrank: A microscopic foundation for shock propagation. *PLOS ONE*, 10(6):1–13.
10. Barucca, P., Bardoscia, M., Caccioli, F., D'Errico, M., Visentin, G., Caldarelli, G., és Battiston, S. (2020). Network valuation in financial systems. *Mathematical Finance*, 30(4):1181–1204.
11. Battiston, S., Puliga, M., Kaushik, R., Tasca, P., és Caldarelli, G. (2012). Debtrank: Too central to fail? Financial networks, the Fed and systemic risk. *Scientific Reports*, 2.
12. Battiston, S., Caldarelli, G., D'Errico, M., és Gurciullo, S. (2016). Leveraging the network: a stress-test framework based on debtrank. *Statistics & Risk Modeling*, 33(3-4):117–138.
13. Berlinger, E. és Walter, G. (2013). Unortodox javaslat a deviza- és forintalapú jelzáloghitelek rendezésére. *Hitelintézeti Szemle*, 12(6):469–494.
14. Berlinger, E., Michaletzky, M., és Szenes, M. (2011). A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után (Examination of the network dynamics of the uncovered interbank forint market before the liquidity crisis and after). *Közgazdasági Szemle*, 58(3):229–252.
15. Biró, P., van de Klundert, J., Manlove, D., és szerzőtársai (2021). Modelling and optimisation in European kidney exchange programmes. *European Journal of Operational Research*, 291(2):447–456.
16. Bluhm, M., Faia, E., és Krahnen, J. P. (2014). Endogenous banks' networks, cascades and systemic risk. Technical report, SAFE Working Paper.
17. Borsos, A., Mérő, B., és szerzőtársai (2020). Shock propagation in the banking system with real economy feedback. Technical report, Magyar Nemzeti Bank (Central Bank of Hungary).
18. Boss, M., Elsinger, H., Summer, M., és Thurner 4, S. (2004). Network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6):677–684.
19. Brunnermeier, M. K. és Cheridito, P. (2019). Measuring and allocating systemic risk. *Risks*, 7(2):1–19.
20. Christoffersen, P. (2011). *Elements of financial risk management*. Academic Press.
21. Csóka, P. (2017). Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén. *Közgazdasági Szemle*, 64(9):930–942. doi:10.18414/KSZ.2017.9.930.

22. Csóka, P. és Herings, P. J.-J. (2021). An axiomatization of the proportional rule in financial networks. *Management Science*, 67(5):2799–2812.
23. Csóka, P. és Kondor, G. (2020). Csődszabályok pénzügyi hálózatokban. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 37(2):1–13.
24. Csóka, P., Herings, P. J.-J., és Kóczy, L. Á. (2009). Stable allocations of risk. *Games and Economic Behavior*, 67(1):266–276.
25. Csóka, P. és Herings, P. J.-J. (2018). Decentralized clearing in financial networks. *Management Science*, 64(10):4681–4699.
26. Demange, G. (2018). Contagion in financial networks: a threat index. *Management Science*, 64(2):955–970.
27. Denault, M. (2001). Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4:1–34.
28. Dömötör, B., Juhász, P., és Száz, J. (2013). Devizaárfolyam-kockázat, kamatlábkockázat, vállalatfinanszírozás. A vállalat értéke és a csődvalószínűség mint sztochasztikus folyamat. *Hitelintézeti Szemle*, 12(1):38–55.
29. Drehmann, M. és Tarashev, N. (2013). Measuring the systemic importance of interconnected banks. *Journal of Financial Intermediation*, 22(4):586–607.
30. D'Errico, M. és Roukny, T. (2021). Compressing over-the-counter markets. *Operations Research.*
31. Eisenberg, L. és Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. *Management Science*, 47(2):236–249.
32. Elsinger, H., Lehar, A., és Summer, M. (2013). Network models and systemic risk assessment. *Handbook on Systemic Risk*, 1:287–305.
33. Fischer, T. (2014). No-arbitrage pricing under systemic risk: Accounting for cross-ownership. *Mathematical Finance*, 24(1):97–124.
34. Gai, P., Haldane, A., és Kapadia, S. (2011). Complexity, concentration and contagion. *Journal of Monetary Economics*, 58(5):453–470.
35. Glasserman, P. és Young, H. P. (2015). How likely is contagion in financial networks? *Journal of Banking & Finance*, 50:383–399.
36. Glasserman, P. és Young, H. P. (2016). Contagion in financial networks. *Journal of Economic Literature*, 54(3):779–831. doi:10.1257/jel.20151228.
37. Irons, B. M. és Tuck, R. C. (1969). A version of the aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3):275–277.
38. Jackson, M. O. és Pernoud, A. (2020). Credit freezes, equilibrium multiplicity, and optimal bailouts in financial networks. *arXiv preprint arXiv:2012.12861.*
39. Jackson, M. O. és Pernoud, A. (2021). Systemic risk in financial networks: A survey. *Annual Review of Economics*, 13:171–202.
40. Lublóy, Á. (2005). Dominóhatás a magyar bankközi piacon. *Közgazdasági Szemle*, 52(4):377–401.
41. Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T., és Alentorn, A. (2007). Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6): 2033–2060.
42. Rochet, J.-C. és Tirole, J. (1996). Interbank lending and systemic risk. *Journal of Money, Credit and Banking*, 28(4):733–762.
43. Rogers, L. C. és Veraart, L. A. (2013). Failure and rescue in an interbank network. *Management Science*, 59(4):882–898.

44. Roukny, T., Battiston, S., és Stiglitz, J. E. (2018). Interconnectedness as a source of uncertainty in systemic risk. *Journal of Financial Stability*, 35:93–106.

45. Schuldenzucker, S. és Seuken, S. (2020). Portfolio compression in financial networks: Incentives and systemic risk. In *Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation*, 79–79.

46. Schuldenzucker, S., Seuken, S., és Battiston, S. (2020). Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks. *Management Science*, 66(5):1981–1998.

47. Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 2(28):307–317.

48. Upper, C. (2011). Simulation methods to assess the danger of contagion in interbank markets. *Journal of Financial Stability*, 7(3):111–125.

49. Veraart, L. A. M. (2020). Distress and default contagion in financial networks. *Mathematical Finance*, 30(3):705–737.

50. Veraart, L. A. M. (2022). When does portfolio compression reduce systemic risk? *Mathematical Finance*, 32(3):727–778.

51. Visentin, G., Battiston, S., és D'Errico, M. (2016). Rethinking financial contagion. Working paper.

52. Walter, G. (2002). Var-limitrendszer melletti hozammaximalizálás: a kaszinóhatás. *Közgazdasági Szemle*, 3:212–234.

MEASURING SYSTEMIC IMPORTANCE WITH CAPITAL INJECTIONS

Financial networks consist of agents connected through various financial transactions, which can increase diversification but also spread the effects of shocks to individual agents. This can result in systemic risk, where the default of certain agents can cause the default of other agents connected to them. In this study, we examine these effects in a simplified system of exogenously determined payment obligations, where uncollateralized debt obligations act as a channel of contagion and risky outside endowments are the source of initial shocks. We use a clearing mechanism to settle these obligations and determine the outcome of contagion.

To assess each agent's contribution to systemic risk, we use the framework of cooperative games and develop a concept called the systemic risk capital allocation game. This framework defines the minimum amount of cash injections needed to rescue a given coalition of agents, after shocks have been realized but before the clearing mechanism. Our key contribution is introducing this type of capital injection as a tool for measuring the systemic importance of coalitions of agents. We prove that for rescuing a given coalition with a minimal amount of cash, it suffices to inject cash into agents within that group. We also show how this result enables the practical application of our method, with the computational cost of calculating the capital injection being the same as the cost of calculating the clearing payment for the system. Lastly, we demonstrate how the systemic risk allocation game can be combined with Monte Carlo simulation to analyze a network of obligations of any structure, and how capital injections can better capture the role of key agents compared to other metrics.