A T047102 számú *Differenciálgeometria és alkalmazásai* c. OTKA pályázat szakmai zárójelentése

Csikós Balázs tovább folytatta a Kneser-Poulsen sejtéssel kapcsolatos vizsgálódásait. A híres sejtés szerint, ha gömbök egy együttesére olyan leképezést alkalmazunk, amely eredményeképpen bármely két gömb középpontja az eredetinél csak közelebb kerülhet, akkor az együttesen fedett tartomány térfogata nem nőhet. A [4] dolgozatban Schläfli klasszikus formuláját a szférikus tér szimplex-térfogatainak differenciáljáról Csikós Balázs kiterjesztette pseudo-Riemann Einstein-sokaságok görbelapú poliédereire, majd ezt egy forgástestekre vonatkozó általános formulával kombinálva a sejtést belátta mindhárom állandó görbületű tértípusra abban az esetben, ha a gömbök centrumai egy kettővel magasabb dimenziós térben folytonosan átmozgathatók a kontrahált középpontrendszerbe úgy, hogy a mozgás során a pontok közti távolságok folytonosan csökkennek. (Ennek az állításnak az euklideszi esetét korábban Bezdek Károly és R. Connelly bizonyították). Az általánosított Schläfli-formula segítségével hasonló eredményt sikerült bizonyítani egy Knesertől származó kérdés kapcsán, mely az eredeti kérdés egy általánosítása, annak egy súlyozott változata.

Csikós Balázs R. Connellyvel és Bezdek Károllyal közösen vizsgálta R. Alexander egy sejtését, mely a sík egységkörei metszetének kerületéről állítja, hogy nem csökkenhet, ha a köröket úgy rendezzük át, hogy középponttávolságaik ne nőjenek. Ez a kérdés egyszerű hangzása ellenére elég nehéznek tűnik, de bizonyos speciális esetekben sikerült a pozitív választ bebizonyítani. Az eredményeket az [2] cikk tartalmazza.

Moussong Gábor Csikós Balázzsal közösen ([6]) az elliptikus térben vizsgálta a Kneser–Poulsen-féle problémát. A vizsgálatok során kiderült, hogy az egyszeres összefüggőség hiánya a sejtés hamis voltát eredményezi. Tetszőleges dimenzióban sikerült megadni három olyan folytonosan mozgó kongruens gömböt az elliptikus térben, melyeknél a mozgás során a középponttávolságok monoton csökkennek, mégis a gömbök uniójának térfogata nő. Tudjuk, hogy ilyen ellenpélda az n-dimenziós szférán nincs. Noha ez a példa mutatja, hogy a Kneser-Poulsen sejtés nem igaz az elliptikus térben, sikerült belátni a sejtésnek azt a következményét, hogy ha az n-dimenziós elliptikus térben $n+1$ gömb úgy helyezkedik el, hogy középpontjaik távolsága az elliptikus tér átmérője, akkor a gömbök által lefedett tartomány térfogata maximális.

A Kneser-Poulsen sejtés tetszőleges Riemann-sokaságban megfogalmazható, de az elliptikus tér esete is mutatja, hogy csak bizonyos Riemann-sokaságokban igaz. Ha egy Riemann-sokaságban igaz a Kneser–Poulsen-sejtés akkor ott k geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugaraitól és a gömbközéppontok távolságától függhet. Nevezzük ezt KP_k tulajdonságnak. Csikós Balázs Kunszenti-Kovács Dáviddal közösen belátta, hogy a KP_3 tulajdonságból következik, hogy a tér állandó görbületű. Ha egy KP_3 tér teljes és összefüggő is, akkor egyszeresen összefüggő. [7]

A közelmúltban Csikós Balázs Gudlaugur Thorbergssonnal azt a kérdést vizsgálta, hogy teljes összefüggő Riemann-sokaságok esetén a KP_2 tulajdonságból következik-e, hogy a tér 2-pont homogén. Ez a vizsgálat még folyamatban van, de azt már sikerült belátni, hogy ha egy szimmetrikus tér KP_2, akkor 1-rangú.

2006-ban Csikós Balázs a síkbeli Ulam-féle úszó test problémához kapcsolódó kérdéseket kutatott és ezekben ért el eredményeket. Auerbach ismert jellemzése szerint egy konvex lemez pontosan akkor megoldása a síkbeli úszó test problémának, ha két pont körbefuttatható úgy a peremén, hogy a mozgásuk során mind az euklideszi távolságuk, mind a lemez pereme mentén mért távolságuk állandó. A lemez pereme mentén mért távolságnak és a lemez kerületének arányát kerületi sűrűségnek hívjuk. A témakör egyik fontos kérdése, hogy milyen kerületi sűrűségek esetén van az úszó test problémának körtől különböző megoldása. S. Tabachnikov vezette be a probléma diszkrét változatát. (n, k)-kerékpárpoligonnak nevezett egy zárt n-szöget, ha minden oldala egyenlő és ha az összes olyan átló, mely egy csúcsot a k-adik szomszédjával köt össze ugyanolyan hosszú. Felvetette azt a kérdést, hogy a szabályos n-szöget mikor lehet az (n, k)-kerékpárpoligonok körében deformálni. Tabachnikov eredményeit továbbfejlesztve Csikós Balázs és Robert Connelly leírta az összes olyan (n, k) párt, melyre a szabályos (n, k)-kerékpárpoligon infinitezimálisan elsőrendben deformálható. Ezt az eredményt tartalmazza a [3] dolgozat. A kapott elsőrendben flexibilis kerékpárpoligonok közül néhányról ismert volt, hogy nem csak elsőrendben, hanem igazából is flexibilisek. Az ezek közé nem tartozó poligonokról a [8] dolgozatban azt sikerült belátni, hogy ezek mind másodrendben is flexibilisek, de harmadrendben merevek.

A diszkrét izoperimetrikus probléma annak vizsgálata, hogy az adott kerületű és csúcsszámú poligonok közül melyiknek a területe maximális. A síkon ennek a problémának a megoldása klasszikusnak számító eredmény. Csikós Balázs, Lángi Zsolt és Naszódi Márton kiterjesztette a diszkrét izoperimetrikus probléma megoldását állandó geodetikus görbületű oldalakkal határolt görbevonalú poligonokra mind a három állandó görbületű síkon. Eredményükből publikáció készült. ([5])

Bezdek Károly, Bisztriczki Tibor, Csikós Balázs és Heppes Aladár tanulmányozta azt a Helly típusú kérdést, hogy milyen feltételek mellett garantálhatjuk, hogy ha egy egységnyi átmérőjű körökből álló rendszer bármely k eleméhez van a k kört metsző egyenes, akkor az összes körhöz is van ilyen. Könnyen látható, hogy minden k-hoz van olyan d, hogy a fenti Helly-típusú tétel igaz azzal a feltétellel, hogy a középpontok távolsága $> d$. Az ilyen d távolságok infimumaként adódó t_k sorozatnak sikerült pontosan meghatározni néhány kezdő tagját, és bebizonyítottuk a $t_k = O(1/k)$ aszimptotikát. Az eredményt a [1] dolgozatban közöltük.

Az euklideszi tér rácsvektoraival kapcsolatban számos geometriai kérdés nehéz számelméleti problémákat vet fel. A 60-as években Sárközy András érdekes leszámlálási kérdéseket tisztázott a háromdimenziós tér rácskockáiról. Ezzel kapcsolatban merülnek fel hasonló leszámlálási problémák a tér rácsnégyzeteiről, valamint további természetes kérdések arról, hogy mely rácsvektorok lépnek fel mint valamely rácsnégyzet vagy rácskocka élvektora, illetve hány ilyen rácsnégyzet, rácskocka létezik, milyen esetben van ezeknek unicitása. Moussong Gábor ezeket a kérdéseket vizsgálta Lee Goswick, Kiss Emil és Simányi Nándor munkatársaival részben geometriai, részben algebrai eszközökkel, és közülük jó néhányra meglepő és szép választ találtak. Kiderült például, hogy ha a tér valamely primitív rácsvektorához d^2 a legnagyobb négyzetszám, amely a vektor hossznégyzetét osztja, akkor egyértelműen létezik olyan d élhosszú rész-kockarács, amely az adott vektort tartalmazza. A rácsnégyzetekkel kapcsolatos egyik fő eredményük szerint a térbeli kockarácsban fekvő bármely rácsnégyzet előáll mint valamely rész-kockarácsnak egy lapsíkon fekvő részrácsa. Érdekes kapcsolatot találtak a számelmélet egy régi megoldatlan problémája és a térbeli rácsnégyzetetek viselkedése között. Kiderült ugyanis, hogy valamely n természetes számnak az a tulajdonsága, hogy létezik n hossznégyzetű rácsvektor és bármely n hossznégyzetű rácsvektorhoz található rá merőleges és ugyanolyan hosszú rácsvektor, csak az n szám négyzetmentes részétől függ, továbbá az ilyen négyzetmentes számok előállnak két négyzetszám összegeként, de nem állíthatók elő három pozitív négyzetszám összegeként. Nevezetes megoldatlan sejtés szerint csak kilenc ilyen szám létezik. ([9])

Szenthe Jánosnak a Lorentz-sokaságok izometriáival kapcsolatban tervezett és elvégzett kutatásai a Birkhoff-tétel általánosításának problémájára adtak megoldást [14].

A gömbszimmetrikus téridő fogalma a Schwarzschild-téridő fogalmának általánosításaként alakult ki. Míg a Schwarzschild-téridő globális elmélete ma már jól kidolgozott, a gömbszimmetrikus téridőkéről ez nem mondható el. Ez vezette Szenthe Jánost egy ilyen globális elmélet kidolgozásához. Első lépésként az alapvető globális fogalmakat értelmezte (orbitok osztályozása, transzverzális részsokaságok értelmezése, a tengely fogalmának bevezetése stb.). Ezek alapján megadta a gömbszimmetrikus téridők globális osztályozását [15], [18].

Második lépésként a gömbszimmetrikus téridők topológiáját vizsgálta [17]. Ez a lépés a kompakt transzformációcsoportok elméletének alkalmazásán alapult. Így egy jól áttekinthető osztályozás adódott. A kiépített globális elmélet sikerének tekinthető a Birkhoff-tétel általánosítása terén elért eredményt. Az általánosítással neves kutatók (M. Cahen, R. Debever és mások) foglalkoztak és értek el igen jelentős eredményeket, de végső, azaz szükséges és elégséges feltételt adó általánosítást nem sikerült megadniuk. A kérdést gömbszimmetrikus téridők esetére Szenthe Jánosnak sikerült teljesen lezárni az új globális elmélet alapján.

Szőke Róbert [19] dolgozatában az affin szimmetrikus terek adaptált komplexifikációjával foglalkozik. Teljesen explicit formulát ad a majdnem komplex tenzorra. Pontos és részletes leírását adja annak a maximális tartománynak (a szimmetrikus tér érintőnyalábjában), ahol definiálható az adaptált komplex struktúra. A tétel speciálisan azt is állítja, hogy van ilyen maximális tartomány. Megmutatja, hogy ugyan az előfordulhat, hogy az adaptált komplex struktúra nincs definiálva az egész érintőnyalábon, de a komplex struktúra $(1,0)$-érintőnyalábja kiterjed az eredeti lokálisan szimmetrikus tér teljes érintőnyalábja fölé.

Nemkompakt típusú szimmetrikus Riemann-terek esetében Burns-Halverscheid-Hind tétele szerint ez a tartomány kanonikusan azonosítható az Akhiezer-Gindikin féle komplex koronatérrel. Ez a koronatér fontos szerepet játszik a féligegyszerű Lie csoportok reprezentációelméletében, a ciklusterek vizsgálatában, a Penrose-transzformált általánosításaiban. Affin szimmetrikus terek esetén ez a koronatér nincs definiálva. A fenti azonosítás miatt ezért ebben az esetben az adaptált komplex struktúra maximális értelmezési tartományát nevezzük komplex koronának. Szőke Róbert bebizonyította, hogy ez a korona pontosan akkor egyezik meg az egész érintőnyalábbal, ha minden X érintővektor esetén az R_X görbületi operátornak nincsenek negatív valós sajátértékei.

Szőke Róbert [20] cikke egyetlen tételt tartalmaz: Ha adott egy izometria két lokálisan irreducibilis Kähler-sokaság között és feltesszük, hogy a tereink nem lokálisan hiperkählerek, akkor ez az izometria szükségképpen holomorf, vagy antiholomorf. A feltételek mind szükségesek. A bizonyítás a Riemann-sokaságok Lévi-Civita konnexiójának Berger-féle klasszifikációján alapszik.

Az adaptált komplex struktúrák felhasználhatóak egy sokaság koérintőnyalábjának a kvantálásához is (a geometriai kvantálást értve ez alatt). Ennek a projektnek a leírása, publikálása folyamatban van.

Verhóczki László és Csikós Balázs a közösen írt [10] dolgozatban az F_4 kivételes kompakt Lie-csoporttal kapcsolatos szimmetrikus Riemann-terek csőszerű struktúráját jellemezték. Olyan izometrikus csoporthatásokat vizsgáltak ezen szimmetrikus tereken, ahol az orbitok egy totálgeodetikus részsokaság körül vett csőszerű felületek. Sikerült leírniuk az orbitok alak-operátorát, és ez alapján meghatározták a principális orbitok térfogatát. Ily módon egy egyszerű módszert adtak a befoglaló terek térfogatának meghatározására. Emellett a vizsgált csoporthatásoknál meghatározták az orbitok izotrópia-csoportjait, és ezáltal az orbitokat homogén Riemann-terek alakjában is leírták.

A [11] dolgozatban Verhóczki László és a társszerzők a kompakt típusú szimmetrikus Riemann-terek izotrópia-csoportjainak az orbitjait vizsgálták. Egy G/K kompakt szimmetrikus tér esetében az ún. szűkített gyökrendszer alkalmazásával egy explicit formulát adtak meg a K izotrópia-csoport principális orbitjainak a térfogatára. Ez alapján ki lehet jelölni a maximális térfogatú orbitot, amely egy minimál-részsokaságot ad a befoglaló térben. Konkrét vizsgálatokat végeztek 2-rangú kompakt szimmetrikus terekben, és ennek során a maximális Gauss-görbület függvényében írták le a 2-kodimenziós principális orbitok térfogatait. Az $SU(3)/SO(3)$ szimmetrikus tér esetében azt is megmutatták, hogy a maximális térfogatú orbit egy konstans görbületű tér.

Verhóczki László a közlésre leadott [21] dolgozatában az E_6/K típusú kivételes kompakt szimmetrikus tereken tanulmányozott izometrikus csoporthatásokat. Megmutatta, hogy a négy E_6/K típusú szimmetrikus tér közül hármon meg lehet adni olyan csoporthatást, ahol a principális orbitok kodimenziója 1 és az egyik szinguláris orbit totálgeodetikus. Ezen csoporthatásoknál meghatározta az 1-kodimenziós orbitok principális görbületeit és térfogatait, továbbá a befoglaló terek térfogatait is. Mivel a 78-dimenziós E_6 kivételes Lie-csoport már nem kezelhető mátrixcsoport formában, a vizsgálatok során a Lie-algebrák gyöktér-dekompozícióival kapcsolatos eszközöket kellett alkalmazni.

Verhóczki László közös kutatást végzett G. Thorbergssonnal az irreducibilis szimmetrikus tereken vett sima függvények ún. Funk-transzformáltjával kapcsolatban. Ha veszünk egy sima függvényt egy adott kompakt szimmetrikus téren, akkor ennek a zárt geodetikusok mentén vett integráljai által egy sima függvényt kapunk a legrövidebb geodetikusok terén. Ily módon bármely sima függvénynek megfelel egy függvény a legrövidebb zárt geodetikusok terén. Azt már sikerült bebizonyítaniuk, hogy ez a hozzárendelés injektív, és jelenleg ezen eredmény továbbfejlesztésén dolgoznak.

Verhóczki László a kompakt szimmetrikus Riemann-terekkel kapcsolatos eredményeiről két nemzetközi konferencián tartott előadást (lásd [22], [23]).

Csikós Balázs és Verhóczki László [12]-ben megadták a legfeljebb 6-dimenziós Frobenius-féle (azaz 0 indexű) Lie-algebrák osztályozását algebrailag zárt 0-karakterisztikájú testek felett. A 4-dimenziós Frobenius-féle Lie-algebrák esetén tetszőleges, 2-től különböző karakterisztikájú, nem feltétlenül algebrailag zárt testek felett is sikerült az osztályozást kidolgozni.

Az OTKA pályázat résztvevői 2005. augusztus 29. és szeptember 2. között egy nemzetközi konferenciát szerveztek *Differential Geometry and Physics* címmel. A konferencia sikerét igazolja, hogy azon több mint 120 hazai és külföldi matematikus vett részt. A konferencia megszervezésében és lebonyolításában a pályázat valamennyi résztvevője aktívan és tevékenyen vett részt.

Hivatkozások

[1] K. Bezdek, T. Bisztriczky, B. Csikós, and A. Heppes, *On the transversal Helly numbers of disjoint and overlapping disks*, Archiv der Math. **87(1)** (2006) 86–96.

[2] K. Bezdek, R. Connelly, B. Csikós, *On the Perimeter of the Intersection of Congruent Disks*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **47(1)** (2006) 53–62.

[3] R. Connelly and B. Csikós, *Classification of First-Order Flexible Regular Bicycle Polygons*, Studia Sci. Math. Hung. közlésre elfogadva.

[4] B. Csikós, *A Schläfli-type formula for polytopes with curved faces and its application to the Kneser-Poulsen conjecture*, Monatshefte für Mathematik **147(4)** (2006) 273–292.

[5] B. Csikós, Zs. Lángi, M. Naszódi, *A generalization of the discrete isoperimetric inequality for piecewise smooth curves of constant geodesic curvature*, Periodica Math. Hung., **53(1-2)** (2006) 121–132.

[6] B. Csikós, G. Moussong, *On the Kneser-Poulsen Conjecture in Elliptic Space*, Manuscripta Math., **121(4)** (2006), 481–489.

[7] B. Csikós and D. Kunszenti-Kovács, *On the Extendability of the Kneser-Poulsen Conjecture to Riemannian Manifolds*, Advances in Geometry (közlésre elfogadva).

[8] B. Csikós, *On the Rigidity of Regular Bicycle* (n,k)*-gons*, Contributions to Discrete Mathematics, **2(1)** (2007) 94–107.

[9] L.M. Goswick, E.W. Kiss, G. Moussong, N. Simányi, *Sums of squares and orthogonal integral vectors*, arXiv:0806.3943, leadva a Journal of Number Theory folyóiratba.

[10] B. Csikós, L. Verhóczki, *Tubular structures of compact symmetric spaces associated with the exceptional Lie group* F_4, Geometriae Dedicata **109** (2004), 239–252.

[11] B. Csikós, B. Németh, L. Verhóczki, *Volumes of principal orbits of isotropy subgroups in compact symmetric spaces*, Houston J. Math. **33** (2007), 719–734.

[12] B. Csikós, L. Verhóczki, *Classification of Frobenius Lie algebras of dimension* ≤ 6. Publ. Math. Debrecen, **70(3-4)** (2007) 427–451.

[13] J. Szenthe, *Homogeneous pregeodesics and the orbits neighbouring a lightlike one*, Note di Matematica. Közlésre elfogadva.

[14] J. Szenthe, *On generalization of Birkhoff's theorem*, J. Geom. Phys. **57** (2006) 1099–1113.

[15] J. Szenthe, *Isometry horizons in spherically symmetric space-times*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **5&6** (2006) 1263–1271.

[16] J. Szenthe, *How far does hyperbolic geometry generalize? Non-Euclidean geometries*, Non-euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Mathematics and Applications, **5**81, Springer, pp. 427-444, (2006).

[17] J. Szenthe, *On the topology of spherically symmetric space-times*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004) 725–731. (2004)

[18] J. Szenthe, *On the global geometry of spherically symmetric space-times*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004) 741–754

[19] R. Szőke, *Complex crowns of symmetric spaces*, International Journal of Math. **16** (2005), 889–902.

[20] R. Szőke, *On isometries of Kähler manifolds*, Acta Math. Hungar., **111 (1-2)** (2006) 77–79.

[21] L. Verhóczki, *On compact symmetric spaces associated to the exceptional Lie group* E_6, submitted for publication in Advances in Geometry.

[22] L. Verhóczki, *Cohomogeneity one isometric actions on exceptional compact symmetric spaces*, Conference on Differential Geometry and Physics, Budapest, Abstracts, 2005.

[23] L. Verhóczki, *Comogeneity one isometric actions on compact symmetric spaces of type* E_6/K, 10th International Conference on Differential Geometry and its Applications, Olomouc, Abstracts, 2007.