A

MAGYAR TUDOM. AKADÉMIA

ÉRTESÍTŐJE.

Harminczegyedik akadémiai ülés.

A *III.* osztály *nyolczadik* ülése.

1872. nov. 18-kán.

Stoczek József r. t. osztályelnök elnöklete alatt.

302. (33) *Szily Kálmán* l. t. „Hamilton egyenlete a hőelméletben.“ cz. értekezést olvasott fel. Kivonata ez.

A t. Akadémia mult évi deczember 11-én tartott osztályülésén szerencsém volt egy rövid értekezést előadni, melyben a *Hamilton* dynamikai elve és a hőelmélet második főtétele között létező összefüggésről szólottam. Az eredmény, melyre akkor jutottam, abban állott, hogy a második főtételt kifejező egyenlet tökéletesen egybevág Hamilton egyenletével, s hogy e szerint arra a kérdésre adandó feleletünkben, melyik dynamikai egyenletre vezethető vissza a hőelmélet második főtétele, közvetlenül Hamilton egyenletére kell utalnunk.

E dolgozatom közzétételére különösen azon körülmény indított, hogy sem *Boltzman*, sem *Clausius* — pedig ők az egyedüliek, kik az iménti kérdéssel akkoráig tüzetesen foglalkoztak — értekezéseikben Hamilton elvét meg sem említik. Mindketten azon véleményből látszanak kiindulni, hogy az összeegyeztetés kedvéért egy új, a dynamikában még addig nem ismert egyenletet lesz szükséges levezetni; mindketten észreveszik, hogy leszármaztatott egyenleteik némi távoli rokonságban állanak a *legkisebb működés elvével*: de Hamilton elvére s az ehhez való rokonság megmutatására egyikök sem fordít figyelmet.

Értekezésem a t. Akadémia kiadványain kivül a *Poggendorff*-féle Annalokban és a Philosophical Magazineban is megjelenvén, szélesebb körökben is ismeretes lett s előidézte azt, mit óhajtottam és reméltem is — Clausius válaszát.

A Poggendorff-féle Annalok ez idei augustusi és a Philosophical Magazinenek e napokban kiadott novemberi füzetében Clausius egy czikket tesz közzé: „A mechanikai hőelmélet második főtételének összefüggéséről Hamilton elvével“ czim alatt, melyben kizárólag fentebbi dolgozatommal foglalkozik.

Engedje meg a t. Akadémia, hogy Clausius czikkét tárgya szerint megismertetve, tavali dolgozatomban elfoglalt álláspontomról némi észrevételeket tehessek ott, hol azok a tárgyat illetőleg még szükségeseknek mutatkoznak.

Clausius mindjárt czikke elején egész készséggel megismeri, hogy a keresett összefüggés sokkal szembetünőbbé válik, ha a hőelmélet második főtételét nem — a mint Boltzmann és ő tette — a legkisebb működés elvével, hanem a Hamilton elvével hasonlítjuk össze. Egyszersmind sejtetni engedi az okot, mely őt abban gátolta, hogy az összefüggést keresvén, figyelme a Hamilton elvére irányozódjék. Ugyanis több tankönyben, például *Iacobi* „Vorlesungen über Dynamik“ czimü művében a Hamilton egyenlete oly alakban adatik elő, mely a hiányos variatio következtében lényegesen eltér az eredeti alaktól. Ha pedig már az eredeti Hamiltonféle egyenlet helyett csupán a Iacobiféle alakot tartjuk szemmel, ugy csakugyan való igaz, hogy el sem igen lehet képzelni, miként létezhessék e között az alak között, meg a hőelmélet második főegyenlete között valami tisztán kifejezhető összefüggés.

Ezután idézi Clausius a Hamilton-féle egyenletnek általam használt eredeti alakját és constatálja, hogy a Boltzmannféle egyenlet, ha kellően értelmezzük, tökéletesen egybevág Hamilton egyenletével, sőt mi több, azzal teljesen identikus is.

De azt a mit Boltzmann egyenletéről megenged, t. i. a Hamilton egyenletével való összeegyezést, azt a magáéra nézve határozottan kétségbe vonja, sőt egyenest lehetetlennek nyilvánítja. Ezzel ismét viszszakerül tehát az a kérdés, mely már taval fennforgott Clausius és Boltzmann között, midőn ez utóbbi a maga prioritási igényeit a Poggendorffféle Annalokban érvényesítette, t. i. az a kérdés, van-e különbség, és ha van, mi a külömbség Boltzmann és Clausius egyenlete között. E kérdést az ügy jelen fordulatában megfelelőbben formulázhatjuk ekként: van-e különbség és ha van, mi a különbség Hamilton és Clausius egyenlete között?

Most már meg lévén engedve, sőt Clausius válasza után majdnem kényszerítve lévén, hogy e kérdés vitatásába és tisztázásába magam részéről is beereszkedjem, mindenekelőtt azt az egyenletet fogom megismertetni, melyet Clausius válaszában is magáénak nevez, illetőleg a maga számára reclamál.

A dolog kényelmesebb előtüntetése kedvéért szoritkozzunk egyelőre — mint Clausius is teszi — egy magános pont mozgásának megfigyelésére. Legyen tehát adva valamely anyagi pont, mely eredetileg vagy zárt pályában, vagy két adott pont között mozog. A pontra csupán oly erők működjenek, melyeknek erőfüggvényök (vagy mint Clausius szokta nevezni *ergol*jok) van, azaz oly erők, melyeknek összetevői a pont öszrendezőiből alkotott valamely függvénynek nemleg vett differential quotiensei által fejezhetők ki. Gondoljuk már most, hogy ez a mozgás, bármi oknál fogva, végtelen csekély változást szenvedjen. A megváltoztatott mozgás közben kövessen a pont megint zárt pályát, vagy mozogjon megint az előbbi két pont, vagy másik kettő között, de azon kikötéssel, hogy $\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z$ ugyanazon értékkel bírjon a pálya kezdet- és végpontján. Jelöljük már most az egyszeri pályafutás időtartamát i-vel, az elevenerőt T-vel, az erőfüggvényt U-val, s egyezzünk meg abban, hogy a változó mennyiségek középértékét a betű fölött vízszint huzott vonással tüntetjük elő (olyformán hogy $\overline{x} = \frac{1}{i}\int_0^i xdt$), úgy az egyenlet, melyre Clausius válaszában hivatkozik s melyet első értekezésében (18.)-czal jelölt, a következő:

$$\overline{\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{\delta y}\cdot\delta y + \frac{dU}{dz}\cdot\delta z} = \delta\overline{T} + 2\overline{T}\,\delta logi \ldots\ldots\ldots\ (1.)$$

Ez azon egyenlet, melyre Clausius úr mint saját egyenletére utal, s melyről helyesen veszi észre, hogy ez bizonyára általánosabb Hamilton egyenleténél. E között meg a Hamiltoné között csakugyan lehetetlenség volna teljes összeegyezést találni. Meg kell azonban jegyeznem, hogy én *ezt* nem tartottam és nem neveztem Clausius egyenletének; s hogy nem is lehetett — valamint most sem lehet — annak tartanom. Ezen egyenlet ugyanis *már öt év óta általánosan ismeretes* Sir William *Thomson*nak a physikusok között igen elterjedt, sokszor idézett s már németre is lefordított kézikönyvéből, a „Treatise on Natural Philosophy“ I. kötetéből, mely már 1867-ben megjelent. Ha e műnek „Dynamical Laws and Principles“ czímű fejezetében, a 233-ik lapon (9.) alatt előforduló egyenletet Clausius jelzésével irjuk, úgy az a következő alakot ölti magára:

$$\delta\,(2i\overline{T} = i\left[\overline{\delta T + \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z}\right] \ldots\ldots\ (2.)$$

Nyilván való, hogy ezen egyenlet tökéletesen identikus a föntebbivel (1.) alatt.

De még egy másik, nem kevésbbé fontos ok miatt sem lehetett, hogy Clausius egyenletéről szólván, Thomsonnak imént említett általános egyenletét érthessem alatta. A Thomsonféle egyenlet ugyanis olannyira általános, hogy bizonyos speciális föltevés nélkül nem is egyeztethető össze a hőelmélet második főtételével. Mert ha a Thomsonféle egyenletet egész általánosságban alkalmazni lehetne arra a mozgásra, melyet melegségnek nevezünk, úgy — a mint a jelen értekezésben megmutatom — a hőelmélet második főtétele nem is volna igaz. A Thomsonféle dynamikai egyenlet és a hőelmélet második főtétele között úgy lehet az összeegyezést a legegyszerűbben létrehozni, ha a dynamikai egyenletben egy tagot eltüntetünk, semmivé teszünk. És mivel éppen Clausius volt az, ki megmutatta, hogy melyik tagnak kell e végett a Thomsonféle egyenletből kiesni, s hogy ezen kiejtés minő föltevések által érhető el — úgy hiszem, a históriai fejlődésnek akkor adunk teljes igazságot, ha a szóban forgó eltüntetés útján támadt speciális egyenletet

$$\delta\overline{U} = \delta\overline{T} + 2\,\overline{T}\,\delta\,\mathrm{logi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

nevezzük, a mint neveztem is, Clausius egyenletének.

Ez Clausius egyenlete. Én erről az egyenletről állítottam azt, nem pedig a Thomsonéról, hogy a Hamiltonfélével tökéletesen identikus. És állításomat fentartom most is egész teljességében, s azt hiszem, az imént előadottak után, Clausius úrnak se lesz ellene semmi kifogása.

Ámbár tehát Clausius idevágó mathematikai fejtegetései új mechanikai egyenletre egyáltalában nem vezettek és csupán a Thomsonféle és Hamiltonféle egyenleteket szolgáltatták kissé transformált alakban: mindamellett tévedés volna azt hinni, hogy e szerint eme nagyérdekü fejtegetések sikertelenek maradának. Valamint Boltzmann, úgy én is a legnagyobb készséggel beismerem, hogy e fejtegetések azon része, mely különösen az erőfüggvény alakjának változtatására vonatkozik, okvetlenül szükséges volt: sőt szivesen hozzáteszem azt is, hogy e nélkül nem is lehetett volna a Hamiltonféle egyenletet a hőelméletbe jó szerével bevezetni. Hamilton ugyanis egyenletét csak azon esetre bizonyította be, hogyha az erőfüggvény alakja, a megváltoztatott mozgás közben, nem szenved semmi változást; Clausius vizsgálataiból ellenben kitünt, hogy *ugyanezt* az egyenletet (a Hamiltonét) akkor is szabad használni, ha az erőfüggvény alakja megváltozik, csak azt kötvén ki, hogy az innét eredő variatio középértéke semmi legyen. A Hamiltonféle egyenlet érvényének ilynemű kiterjesztésére csakugyan szükség volt, mivel a hőelméletben a testeknek oly állapotváltozásai jönnek tekintetbe, melyek nem csupán a térbeli változásoktól, hanem az erőfüggvénynek megváltozott alakjától is függenek.

Értekezésemben megvizsgálom még, vajon minő módosítást kell tenni Hamilton egyenletén, hogy az ne csak egy pont, hanem egy egész pontrendszer mozgásának megváltozására is alkalmazható legyen, és pedig mindjárt egy oly pont rendszerénél, melyben az egyes pontok nem egyenlő közép-elevenerővel és nem is egyenlő idő alatt futják be *zárt* pályáikat. Clausius úr igen helyesen jegyzi meg, hogy ez esetben a Hamiltonféle egyenlet nem alkalmazható *közvetlenül,* s hogy ennélfogva külön vizsgálódásra van szükség.

Ha azonban a dolgot egy kissé közelebbről szemügyre veszszük, azt találjuk, hogy a Hamiltonféle egyenleten semmi egyéb változtoztatást nem kell tennünk, mint azt, a mi az erélyt illetőleg a heterogén pontrendszer fogalmából úgy is önként következik, t. i. jobbról és balról a tagok elé kell tenni Σ jelét, és az összegezést kiterjeszteni a rendszer valamennyi pontjára. A míg tehát *egy pontra* vagy a homogén pontrendrendszerre az erély variatioját a Hamilton egyenlete így adja:

$$\delta E = \frac{\delta\,(2i\overline{T})}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

az alatt egy hetorogén pontrendszernél az erély variatiojának összegét a következő teljesen analog egyenlet fejezi ki:

$$\Sigma\delta E = \frac{\Sigma\,\delta(2i\overline{T})}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.)$$

E módosítás oly csekély és — a mint már föntebb mondottuk — a pontrendszer fogalmából elannyira önként következő, hogy az (5.)-tel jelölt egyenletet valóban nem tekinthetjük egyébnek, mint *a Hamilton-féle egyenlet szükségképi kifolyásának*. Minthogy azonban ez az egyenlet Hamiltonnál még nem fordúl elő, s minthogy ő a summatio-jel alkalmazásában csak arra az esetre szorítkozott, midőn az egyes pontok mindannyian egyenlő idő alatt futják be pályáikat, ez okból czélszerűnek tartottam, Hamilton módszerét követve, az (5.) alatti egyenletet külön is bebizonyítani. Különben megemlítendő, hogy ez az egyenlet Boltzmannnál fordúl elő először, s hogy az általam adott bebizonyítás lényegében csak az elején, egyebütt pedig csak a berendezésében különbözik Boltzmannétól.

Azon esetet illetőleg, mikor a pontok pályái nem zárottak, csak annyit akarok megjegyezni, hogy az átlépés a zárt pályákról a nem zártakra tökéletesen egy módon vihető végbe, írjuk a Hamilton-Boltzmann-féle egyenletet akár eredeti alakjában, akár a Clausius által transformálva adott logaros alakban. Itt az egyenlet formája bizonyára sem nem okozza, sem nem hárítja el azokat a nehézségeket, melyekre Clausius úr czikke végén hivatkozik.

A könnyebb áttekintés kedveért állítsuk még egymás mellé ama dynamikai egyenlet fejlődési mozzanatait, melyre a hőelmélet második főtételét vissza lehet vezetni. Az egyenletet felállítja *Hamilton* 1834-ben; de a bebizonyításnál fölteszi, hogy a pontrendszer homogén, és az erőfüggvény alakja változatlan. 1866-ban *Boltzmann* alkalmazza heterogén pontrendszerre is, és ő hozza először a hőelmélet ismert alakjára. 1871-ben *Clausius* bebizonyítja, hogy ugyanez az egyenlet akkor is érvényes, ha az erőfüggvény alakja megváltozik, de az innét eredő variatio középértéke semmi. A 38 év alatt csak érvénye, alkalmazhatósága terjeszkedett, a nélkül, hogy maga az egyenlet változott volna. Ismételhetem tehát előbbi értekezésem zárszavait: „az, a mit a thermodynamikában második főtételnek nevezünk, nem egyéb, mint a dynamikában a Hamiltonféle elv, ugyanaz az elv, mely az elméleti physika többi részeiben is már sokféle alkalmazásra talált.“

---

302. (34.) *Balogh Kálmán* l. t. közli: 1) Mihálkovics Géza tanár részéről „Adatok a madárszem fésűjének szerkezetéhez és fejlődéséhez. Brücke E. tanár élettani dolgozdájából Bécsben.“ Kivonata itt következik:

Mihálkovics Géza tanár „Adatok a madárszem fésűjének szerkezetéhez és fejlődéséhez“ cz. értekezésben azt mondja, hogy a madárszem fésűje (pecten), mely a szemür belsejében annak hosztengelyével párhuzamosan a látideg belépésétől egészen a lencséig terjedhet, az üvegtestben fekszik, s azt közönségesen edényhártya-szövetnek tartják, azonban ezen szerv mindeddig tüzetesen nem vizsgáltatott meg, hanem a szerzők azt mindeddig csak röviden érintették.

Mihálkovics tanár a madárszem fésűjét, mely Owen szerint csak a röptelennél (apterix) hiányzik, úgy felnőtt állatoknál mint ébrényeknél vizsgálta, mégp edig nemcsak szabad szemmel, hanem górcsövileg is, s