

**NEGYED ÉS FÉL JÁRMŰMODELL IDENTIFIKÁCIÓJÁNAK GP-LFM
TECHNIKÁVAL VALÓ MEGVALÓSÍTHATÓSÁGA**

Szerzők:

Dobák Dávid
Budapesti Műszaki és
Gazdaságtudományi Egyetem

Csernák Gábor (Ph.D.)
Budapesti Műszaki és
Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki
Mechanikai Tanszék,
ELKH-BME Gépek Dinamikája
Kutatócsoport

Első szerző e-mail címe:
dobakdavid@gmail.com

Lektorok:

Kollár László E. (Prof. Ph.D.)
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Informatikai Kar, Savaria Műszaki
Intézet

Németh Balázs (Ph.D.)
Eötvös Loránd Kutatási Hálózat,
Számítástechnikai és Automatizálási
Kutatóintézet, Rendszer és
Írányításelméleti Kutatólaboratórium

és további két anonim lektor...

Absztrakt

Napjainkban a dinamikai rendszerek identifikációja a magas minőségi követelmények miatt fontosabb, mint valaha. A járműiparnak biztonságkritikus területként különösen magas az igénye az olyan eljárásokra, amelyekkel leoszoríthatók a tesztelés magas költségei. Mivel Magyarország az egyik legnagyobb járműipari beszállító Európában, a mérnököknek ismerniük kell a korszerű technikákat. Cikkünkben demonstráljuk az ún. Gaussian Process – Latent Force Model (GP-LFM) technika hatékonyságát az egy szabadsági fokú negyed járműmodellen keresztül. Bemutatjuk és egyben általánosítjuk az elméletet több szabadsági fokú rendszerek identifikációjához, amely a későbbiekben lehetővé teszi a komplexebb rendszerek, például a fél járműmodell identifikációját.

Kulcsszavak: gépi tanulás, negyed járműmodell, fél járműmodell, GP-LFM, modell identifikáció

Diszciplínák: mérnöki tudományok, matematika, informatika

Abstract*FEASIBILITY OF THE IDENTIFICATION OF QUARTER AND HALF CAR MODELS WITH GP-LFM METHOD*

Nowadays the identification of dynamical systems has become more important than ever because of the high quality expectations. Vehicle industry has high demand for this kind of methods, since it is safety-critical and the testing bears a high expense. Since Hungary is one of the greatest vehicle suppliers in Europe, engineers have to know up-to-date advanced techniques. In our paper we demonstrate the efficiency of the so-called Gaussian Process – Latent Force Model (GP-LFM) technique through the example of a quarter car model. We introduce and generalize the theory for MDoF systems, which allows the identification of more complex systems like the half car model.

Keywords: machine learning, quarter car model, half car model, GP-LFM, model identificatio

Disciplines: engineering, mathematics, informatics

Dobák Dávid és Csernák Gábor (2023): Negyed és fél járműmodell identifikációjának GP-LFM technikával való megvalósíthatósága. *Mesterséges Intelligencia – interdiszciplináris folyóirat*, V. évf. 2023/1. szám. 35-49. doi: 10.35406/MI.2023.1.35

Az analitikusan levezetett modellek méréssel történő identifikációja már régóta a mérnöki gyakorlat szerves részét képezi. A számítógépek elterjedése segítette a gépi tanulás megjelenését a modellezés ezen lépése során. A számítási teljesítmény növekedése egyre inkább teret adott a bonyolultabb algoritmusoknak, ugyanakkor a mérnökök mindig igyekeztek a lehető legjobban kihasználni a rendelkezésre álló erőforrásokat. Különösen magas az igény a jó modellekre a biztonságkritikus és/vagy költséges alkalmazások esetén – erre tipikus példa a járműipar, azon belül is a gépjárműipar. Magyarországon kiemelkedően

fontos ez a terület, hiszen ez adja a GDP 25 százalékát (Net1). Az autógyártók sokszor nemcsak a termelést, hanem bizonyos K+F jellegű feladatokat is telepítenek hazánkba (Stubnya, 2020). Utóbbi nagyon nagy lehetőséget jelent az ország gazdaságának, hiszen ezek valóban magas hozzáadott értékkel rendelkező munkafolyamatok. Ezért rendkívül fontos, hogy a hazai mérnökök ismerjék a legújabb technikákat, és tudásuk versenyképes legyen a rivális országok mérnökeivel szemben. Cikkünkben egy új típusú, sztochasztikus differenciálegyenleteken (SDE) alapuló gépi tanulási technikát (Gaussian Process –

Latent Force Model, GP-LFM) haszná-lunk modellidentifikációra.

A GP-LFM módszer egy szofisztikált grey-box identifikációs eljárás, amely SSM-SDE (State Space Model – Stochastic Differential Equation) alakban modellezi a rendszert (lásd: Alvarez és tsai, 2009). A modell egy paraméterezett sztochasztikus folyamatot tartalmaz, aminek a paraméterei a mérési adatokkal taníthatók. Emiatt az eljárás különösen alkalmas nemlineáris rendszerek identifikációjára, mivel szinte bármilyen nemlinearitás kinyerhető a mérési adatokból, a nemlinearitás jellegének előzetes ismerete nélkül. Ígéretes eredmények születtek JONSWAP spektrumból (Hasselmann és tsai, 1973) generált gerjesztések esetén – lásd: Rogers és tsai., 2018, 2020). A nemsima rendszerek egy részahalmazát jelentik a szakaszosan folytonos rendszerek (piecewise continuity, lásd még ehhez kapcsolódóan: VSS, Variable Structure System). Ezek identifikációja rendkívül nehéz feladat, de az ilyen rendszerek esetén is alkalmazható GP-LFM technika (ún. switching GP-LFM) is kidolgozásra került (Marino és Cicirello, 2023). A GP-LFM lépéseit jól összefoglaló cikk született, melyben szimulált Duffing-oszcillátoron (kőbös oszcillátor) és benchmark (Silverbox benchmark – lásd: Wigren és Schoukens, 2013) adatokon egyaránt demonstrálták az eljárás hatékonyságát (Rogers és Friis, 2022) egy szabadsági fokú rendszerek esetében.

A módszer működését először az egy szabadsági fokú (SDoF) negyed járműmodellen keresztül mutatjuk be. A gy-

korlatban általában több szabadsági fokú modellek vizsgálatára van szükség, ezért az elméletet általánosítjuk több szabadsági fokú rendszerekre. A szemléletesség kedvéért a levezetést egy két szabadsági fokú fél járműmodellre végezzük el, külön figyelmet szentelve azokra lépésekre, ahol az általánosítás nem triviális.

Bár a mesterséges intelligencia témakörében rendszeresen jelennek meg magyar nyelvű publikációk – ezekről például Russell és Norvig (2005) könyvének magyar nyelvű kiadása tartalmaz összefoglalót –, a legújabb eredmények kizárólag idegen nyelvű publikációkban találhatóak meg. A GP-LFM eljárás kapcsán egyelőre még angol nyelven is kevés a fellelhető szakirodalom, ezért cikkünkkel a módszer magyar nyelven is elérhető szakirodalmát szeretnénk bővíteni.

A cikk felépítése a következő: a negyed járműmodell bemutatása, mozgásegyenletének felírása, valamint az eredmények demonstrációs jellegű bemutatása a következő két szakaszban található. A rákövetkező, negyedik szakaszban a fél járműmodell mozgásegyenletét adjuk meg. Ezután kerül bemutatásra az általánosított GP-LFM módszer, a hatodik szakaszban pedig az ehhez használt gépi tanulás algoritmus kerül levezetésre. A záró szakasz értelmezi a cikk eredményeit és iránymutatást ad a későbbi kutatásokat illetően.

Negyed járműmodell mozgásegyenlete

A cikk esettanulmányához kapcsolódó mechanikai alapismeretek elsajátíthatók

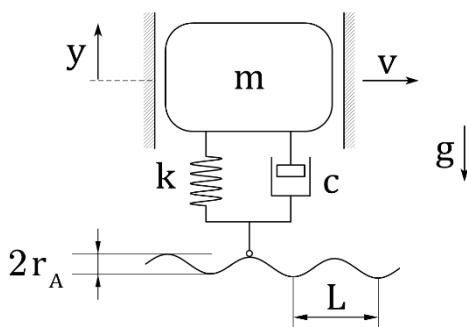
például Genta (2009), Csernák (2018) vagy Csernák és Stépán (2019) műveiből. Utóbbiban megtalálható a cikkünkben használt negyed, illetve fél járműmodell részletes levezetése is, ezért mi itt ettől eltekintünk. A negyed járműmodell (1. ábra) járművek egy szabadsági fokkal történő modellezésére használható. Ez a módszer kevésbé pontos a szofisztikáltabb modellekhez (például: fél járműmodellhez) képest, viszont az egyszerű, egy szabadsági fokú rendszer sokkal kevésbé számításiigényes algoritmust eredményez a gépi tanulás alkalmazása során.

Az 1. ábra jelöléseivel az (1) mozgásegyenlet írható fel:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = kr_A \sin(\omega t) + cr_A \omega \cos(\omega t). \quad (1)$$

Itt m a v sebességgel haladó negyed jármű tömege, k a felfüggesztés merevsége, c a csillapítás, L az út egyenetlenségeinek térbeli periódusa, r_A pedig az egyenetlenség amplitúdója. A járműre $\omega = 2\pi v/L$ körfrek-

1. ábra: A negyed járműmodell mechanikai modellje (forrás: Csernák és Stépán, 2019 alapján a Szerzők)



venciájú gerjesztés adódik át az útfelületről. A modellezés a továbbiakban az (1) egyenlet alapján történik. A harmonikus gerjesztés körfrekvenciája és amplitúdója az ω és r_A paraméterekkel állítható.

A módszer hatékonyságának demonstrációja a negyed járműmodell példájában

Az alábbi szakaszban demonstrációs jelleggel bemutatjuk a GP-LFM technika hatékonyságát a negyed járműmodell példáján keresztül. A módszer – melynek részletes bemutatására és általánosítására az ötödik és hatodik szakaszban kerül sor – azon alapul, hogy a modell ismeretlen paramétereit valamilyen várható értékű és szórási, normális eloszlású véletlen változóknak tekintjük. Az algoritmus a kiindulásként megadott, ún. prior eloszlásokhoz megkeresi a mérési adatokhoz legjobban illeszkedő, ún. posterior eloszlásokat, melyek várható értékei lesznek a paraméterek modellben felvett értékei.

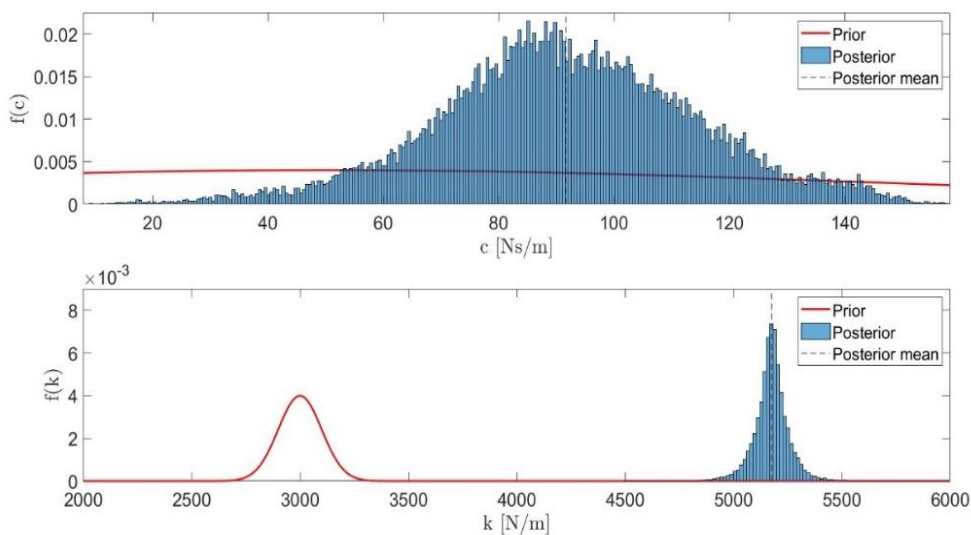
A szakirodalomban (például Rogers és tsai., 2020 és Rogers és Friis, 2022) SDoF esetre közölt eredmények alapján implementáltuk az identifikációs algoritmust, és numerikus szimulációval kapott, zajjal terhelt adatsorokon teszteltük. Célunk a rugómerevség és a csillapítási tényező értékének meghatározása volt a gyorsulás idősora alapján. A szimuláció paramétereit $c = 90$ [Ns/m], $k = 5000$ [N/m], $m = 1000$ [kg], $\omega = 5$ [rad/s], a prior eloszlások pedig $c_{prior} \sim N(50,100)$, $k_{prior} \sim N(300,100)$.

A 2. ábrán látható egy futtatás eredménye egy negyed járműmodell esetére. Eszerint a posterior eloszlások eltávolodnak az ismeretlennek feltételezett, ezért nagyon nagy szórással megválasztott prior eloszlásoktól, és várható értékük egyértelműen tart a paraméterek valódi, szimulációban használt értékeihez. A felső ábra prior eloszlása a nagy szórás miatt látszik közel vízszintesnek, az alsó ábra pedig bemutatja, hogy rossz prior eloszlás esetén is működőképes az algoritmus. Az ábrán is jelölt posterior átlagok értéke 91.5 [Ns/m] a csillapításra és 5170 [N/m] a merevségre.

Az eredmények vizsgálata és kiértékelése történhet a zaj, a mérések száma (minta-szám) és az előírt Markov-lánc elemszám

függvényében. Utóbbi paraméter az algoritmus futtatása során generált eloszlások mintavételezésének módját és minőségét adja meg (bővebben ld. 6. szakasz). Szimulációs tesztek során arra jutottunk, hogy a mérések száma, vagyis a mintaszám illetve a Markov elemszám kevésbé befolyásolja dominánsan az eredményeket. Ez nem túl meglepő, hiszen a negyed járműmodell esetén a gerjesztés két harmonikus függvény szuperponáltja és ha kellően nagy a mintavételi frekvencia (azaz kellően kicsi T_s), akkor a mintavételezési tételek értelmében teljes mértékben visszaállítható a folytonos jel. Tehát a harmonikus jeleknek egy periódusán vett mintavételezés elvileg elégséges, de a mérési zaj miatt érdemes

2. ábra: GP-LFM modellidentifikáció eredménye (forrás: a Szerzők)



több perióduson keresztül tartó mintavételezést alkalmazni. A Markov elemszám pedig, hasonlóan a mérési mintaszámhoz, egy érték felett nem befolyásolja érdemben a folyamatot, a határ alatt viszont tönkreteszi a megoldást, mert a posterior eloszlásba nem kerül elég valódi posterior minta. Ezt bizonyos mértékig lehet kompenzálni a burn-in fázissal (ld. 6. szakasz). A gyakorlatban is használható eredményeket mutat be a 1. táblázat. Itt az egyes futtatások (oszlopok) eredménye látható a negyed járműmodell paramétereire (sorok). Minden futtatás 5-5 identifikáció átlaga. Az 1. táblázatban az algoritmusból származó átlag értékek eltérése látható a valós paraméterektől, az algoritmusból kapott szórással normálva. Például a merevség esetében ez a (2) képlettel számolható:

$$\Delta(k) = \frac{\mu_{posterior}(k) - k_{real}}{\sigma_{posterior}(k)}, \quad (2)$$

ahol $\Delta(k)$ a normált eltérés, $\mu_{posterior}(k)$ és $\sigma_{posterior}(k)$ a posterior átlag és szórás, k_{real} pedig a paraméter valódi értéke. A futtatások között kizárólag a zaj nagysága került megváltoztatásra (kezdőérték: 3 [m/s²]

szórásnégyzet, futtatások között ugyanennyivel megnövelve).

Az 1. táblázat alapján, amely összesen 50 különálló identifikáció eredményeit foglalja magában, ökölszabályként megállapítható az eredmények értékeléséhez, hogy az algoritmus során kapott megoldás, vagyis a megkapott posterior átlag nem tér el jobban a valódi megoldástól, mint a posterior szórás. Ez különösen hasznos lehet a járműiparban, ahol kiemelt szerepet játszanak a megbízhatósági szintek a biztonság miatt. Mind a program, mind a modellezés MATLAB R2022a szoftver használatával készült.

Megállapítható tehát, hogy a módszer célravezető lehet identifikációs feladatokra. A továbbiakban a módszer magasabb dimenzióra történő általánosítását vizsgáljuk meg.

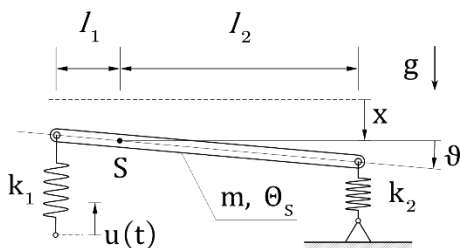
Fél járműmodell mozgásegyenlete

A fél járműmodell részletes levezetése megtalálható a második szakaszban hivatkozott művekben (például: Csernák & Stépán, 2019). A fél járműmodell a két-tengelyes járműveket két rugóval (első és hátsó felfüggesztés) és egy merev testtel realizálja. Ez két szabadsági fokú modellt eredményez. A fél járműmodell mechanikai modellje a 2. ábrán látható.

1. táblázat: Szórással normált hibák (forrás: a Szerzők)

	1. run	2. run	3. run	4. run	5. run	6. run	7. run	8. run	9. run	10. run
$\Delta(c)$	0.084	0.128	0.108	0.196	0.209	0.187	0.160	0.272	0.116	0.216
$\Delta(k)$	-0.449	-0.647	-0.493	-0.323	-0.267	-0.278	-0.385	-0.478	-0.240	-0.409

. 2. ábra: A féljárműmodell mechanikai modellje (forrás: Csernák és Stépán, 2019 alapján a Szerzők)



A 2. ábra jelöléseivel a 3. ábrán látható (3) mozgásegyenlet írható fel. A kapott mozgásegyenlet tehát továbbra is lineáris, viszont két szabadsági fokú. A továbbiakban levezetjük az előző pontban alkalmazott módszert és általánosítjuk oly módon, hogy az a későbbiekben alkalmas legyen több szabadsági fokú lineáris mechanikai rendszerek, különösen a féljárműmodell identifikációjára.

A GP-LFM technika bemutatása és általánosítása

A módszer alkalmazása során az első lépés minden esetben a mérési séma kiválasztása (Rogers és Friis, 2022). A lineáris paraméterek egyikét (skaláris tömeg/tömegmátrix, skaláris csillapítás/csillapítási mátrix, skaláris merevség/merevségi mátrix) ugyanis ismertnek kell tekinteni, hogy a többi, ismeretlen paraméter megfelelően konvergáljon a tanulás során. Ezenkívül ki kell választani, hogy a

mérési adatok gyorsulás, sebesség, vagy pozíció adatok.

Mi a leggyakrabban alkalmazott megoldást választjuk, azaz a tömegmátrix elemeit tekintjük ismertnek (valós mérés esetén ez határozható meg legkönnyebben), illetve a rendszer gyorsulását mérjük a szimuláció során (szintén ezt lenne a legkönnyebb és legolcsóbb mérni egy valós mérés esetén a legtöbb esetben).

A 3. ábrán látható (4) egyenlet írható fel 2 DoF esetre. Ezen keresztül modellezhető minden olyan hatás (zaj, ismeretlen nemlinearitás), amit explicit módon nem vettünk figyelembe a mozgásegyenletben (Rogers és Friis, 2022). Így a (4) egyenlettel bármilyen két szabadsági fokú mechanikai rendszer leírható. A GP-LFM módszernek megfelelően $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ a 3. ábra (5) képletben jelzett sztochasztikus folyamattal közelíthető.

Az $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ komponensei tehát egymástól független 0 várható értékű skaláris Gauss-folyamatok, amelyek $k_{1,2}(t, t^*)$ kovarianciafüggvényei így egymástól függetlenek. A Gauss-folyamat (MacKay, 1998) lényegében a normáloszlás (gyakran Gauss-eloszlás) végtelen dimenziós kiterjesztése. Ennek megfelelően a várható érték vektort egy egyváltozós, a kovariancia mátrixot pedig egy kétváltozós függvény váltja fel. A Gauss-folyamat ezért jól alkalmazható nemparametrikus gépi tanulási technikákhoz. A kifejezés nem jelenti azt, hogy ne lennének paraméterek, éppen ellenkezőleg, tetszőleges számú paraméter lehet (lásd például: Kolassa, 2020).

3. ábra: A jelen tanulmányban hivatkozott (3)-(8) számú képletek. Forrás: a Szerzők

(3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 u_0 \sin(\omega t) \\ k_1 l_1 u_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

(4)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{U}(t),$$

ahol $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ az általános koordináták vektora, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tömegmátrix, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ csillapítási mátrix, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ merevségi mátrix, $\mathbf{U}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gerjesztés, $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pedig a nem modellezett hatásokat és ezáltal a determinisztikus, lineáris résztől való eltérést figyelembe vevő függvény.

(5)

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \\ f_2(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \end{bmatrix}, \quad f_{1,2} \sim \text{GP}(0, k_{1,2}(t, t^*))$$

(6)

$$d\mathbf{h} = \mathbf{F}\mathbf{h}dt + \mathbf{L}d\boldsymbol{\beta}(t),$$

ahol $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ a sztochasztikus rendszer állapotvektora, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rendszermátrix, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ diszperziós mátrix, $\boldsymbol{\beta}(t) \in \mathbb{R}^m$ pedig Brown-mozgás $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ diffúziós mátrixszal

(7)

$$k(t, t^*) = \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}|t - t^*|}{l} \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}|t - t^*|}{l} \right).$$

(8)

$$\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{1,2}^2 & -2\lambda_{1,2} \end{bmatrix}, \mathbf{L}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{1,2} = [4\lambda_{1,2}^3 \sigma_{1,2}^2],$$

ahol $\lambda_{1,2} = \sqrt{3}/l_{1,2}$, a jelölések pedig a (6) egyenletnek megfelelők

A kovarianciafüggvényként használt kernel függvény kiválasztása a következő fontos lépés. A kernel olyan kétváltozós függvény, mellyel két, paraméterként kapott objektum hasonlósága mérhető gépi tanulás során. Megmutatható (Särkkä és Solin, 2019), hogy a legtöbb kernelhez (a kernellel definiált Gauss-folyamathoz) tartozik állapotter reprezentáció, sztochasztikus differenciálegyenlet formájában. A két leggyakrabban alkalmazott kernel a Matérn 3/2 és az exponenciális (ez megegyezik a Matérn 1/2-vel). Egy általános, lineáris időinvariáns (LTI) sztochasztikus differenciálegyenlet felírható a 3. ábra (6) képletben közölt differenciális alakban.

Az SSM-SDE reprezentációk állapotvektora és $f_{1,2}$ erőkomponensek között a kapcsolat az, hogy az állapotvektorok elemei megegyeznek az erőkomponensek deriváltjaival, azaz:

$$\mathbf{h}_{1,2} = [f_{1,2} \dot{f}_{1,2} \dots f_{1,2}^{(n)}]^T,$$

ahol n értéke a kernel függvény megválasztásától függ.

A Matérn 3/2 kernel σ^2 és l paraméterekkel a 3. ábra (7) képlete révén definiálható (lásd például: Särkkä és Solin, 2019).

Az ezzel a kernellel definiált – lásd: (5) egyenlet) – Gauss-folyamatokhoz levezethető a 3. ábra (8) képletben közölt $n=2$ dimenziós SSM-SDE reprezentáció (lásd például: Särkkä és Solin, 2019).

Ezen mátrixok ismeretében a (4) egyenletben felírt rendszer állapotvektorát kiterjesztve összecsatolható a sztochasztikus rendszerrel. Bevezetve az átviteli elv alap-

ján kapható $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{z} \quad \dot{\mathbf{z}}]^T$ állapotvektort, a (6) egyenlet a 4. ábra (9) képletben látható hipermátrixos alakra rendezhető.

Ez az alak már bővíthető a sztochasztikus átírással. A $\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2]^T$ jelölés bevezetésével a 4. ábra (10) számmal jelzett hipermátrixos egyenlet írható fel. Az ebben szereplő \mathbf{F} és \mathbf{Lg} mátrixok a két kernel közösen felírt SSM-SDE reprezentációjából kaphatók meg (lásd: 4. ábra (11) képlet). A \mathbf{Bg} mátrix pedig a (9) és (10) egyenletet összevetve áll elő (lásd: 4. ábra (12) pont).

Ismeretlen még a (10) egyenletből a \mathbf{w} Wiener-folyamat \mathbf{Q} diffúziós mátrixa, Ez könnyedén előáll, mint az egyes kernekhez tartozó $\mathbf{Q}_{1,2}$ diffúziós mátrixokból álló diagonális hipermátrix, a főátlóban rendre \mathbf{Q}_1 és \mathbf{Q}_2 mátrixokkal. A (10) egyenlet jelenti tehát a rendszer állapotegyenletét, ahol az előbbieket szerint minden ismeretlen mátrix meghatározásra került. A megfigyelésünk (mérésünk) modellezéséhez a kimeneti egyenlet felírása szükséges, ahol a mérési zajt a \mathbf{v} vektorral vesszük figyelembe – lásd: 4. ábra (13) egyenletet, melyben a \mathbf{C}_o és \mathbf{D} mátrixok egyértelműen következnek a mérési sémából. Az előbb leírtak szerint mi a gyorsuláskomponenseket mérjük. Az állapotegyenletben szereplő

$$[\dot{\mathbf{x}} \quad \ddot{\mathbf{g}}]^T$$

derivált állapotvektor harmadik és negyedik elemei a gyorsuláskomponensek (az általános koordináták gyorsuláskomponensei), azaz az $[\dot{\mathbf{x}} \quad \ddot{\mathbf{g}}]_{(3:4)}^T$ művelettel

4 ábra: A jelen tanulmányban hivatkozott (9)-(14) számú képletek. Forrás: a Szerzők

(9)

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_s} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_s} (\mathbf{U} - \mathbf{f})$$

(10)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{U} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_g \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \mathbf{w}$$

(11)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{h}}_1 \\ \dot{\mathbf{h}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_g} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$

A \mathbf{w}_1 és \mathbf{w}_2 a β_1 és β_2 Brown-mozgások formális deriválásával kapott Wiener-folyamatok (fehér zaj).

(12)

$$\mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_s(3,1) & 0 & \mathbf{B}_s(3,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_s(4,1) & 0 & \mathbf{B}_s(4,2) & 0 \end{bmatrix}$$

(13)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{U} + \mathbf{v}$$

(14)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{g}} \end{bmatrix}_{(3:4)} = \underbrace{\mathbf{A}_{(3:4,1:\text{end})}}_{\mathbf{C}_o} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} + \underbrace{\mathbf{B}_{(3:4,1:\text{end})}}_{\mathbf{D}} \mathbf{U}$$

megkaphatók. Az állapotvektort ezen módon csonkolva a 4. ábra (14) pontban bemutatott módon változik meg maga az állapotegyenlet, ami lényegében a kimeneti egyenlet mérési zaj nélkül. A \mathbf{C}_o és \mathbf{D} tehát adott, a v mérési zaj pedig két független, skaláris Wiener-folyamatból áll, melynek \mathbf{R} diffúziós mátrixa ezen folyamatok $r_{1,2}$ diffúziós együtthatóinak diagonális elrendezéséből adódik.

Gépi tanulás implementálása

Az előző szakaszban felírásra került a folytonos rendszer állapotegyenlete és kimeneti egyenlete. A gépi tanulás megvalósítása során Kálmán-szűrőt alkalmazunk, aminek használatához a rendszer diszkrétizálása szükséges. Ez T_s mintavételezési idővel az alábbi mátrixokhoz vezet:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_d &= \exp(\mathbf{A}T_s) \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C}_o \\ \mathbf{D}_d &= \mathbf{D} \\ \mathbf{R}_d &= \mathbf{R}/T_s\end{aligned}$$

A \mathbf{B}_d és \mathbf{Q}_d mátrixok az 5. ábra (15) képletben látható módon számíthatók ki.

A diszkrétizált rendszer mátrixainak levezetése megtalálható Särkkä és Solin (2019) művében. A Kálmán-szűrésre a számítási komplexitás csökkentése miatt van szükség. Hartikainen és Särkkä (2010) megmutatták ugyanis, hogy a GPR (Gauss Process Regression) problémák hagyományos megoldásoknál megszokott $\mathcal{O}(n^3)$

számítási komplexitása $\mathcal{O}(n)$ számítási komplexitásra csökkenthető bizonyos megfontolásokkal és Kálmán-szűrő alkalmazásával (a komplexitások a mérési minták számának függvényei). A gépi tanuláshoz használt hiperparaméterek vektora két szabadsági fokú esetre az 5. ábra (16) pontjában közölt 14-elemű vektor.

A megoldáshoz alkalmazott algoritmus (Rogers és tsai., 2020) a priori eloszlásokat (előzetes feltételezéseket) igényel a hiperparaméterekre. Ez látszólag egy nagyon erős megkötés, de valójában az eloszlásokban a szórást megnövelve beállítható a hiperparaméter teljes ismeretlensége is. Az algoritmus célja a posterior eloszlás meghatározása mérések alapján. Ez azért is hasznos, mert a futtatás után nem egy konkrét érték fog tartozni egy-egy paraméterhez, hanem egy eloszlás, és ebből adódóan becsülhető a bizonytalanság a szórásból. Erre a mintavételezésre gyakran használt megoldást jelentenek az MCMC (Markov Chain Monte Carlo) módszerek. Ezen módszerek esetén egy véletlen bolyongás során a lépések jelentik az eloszlás mintavételezését. A bolyongás során a magasabb sűrűségfüggvényű helyeken több lépés valósul meg, mint az alacsonyabbakon, ezáltal a bolyongás után kirajzolódik a kívánt a posteriori eloszlás. Cikkünkben az implementáció során Metropolis algoritmust használunk, mint MCMC módszert (lásd: Beichl és Sullivan, 2000). A posterior eloszlás kirajzolásához minden iterációban generálunk egy jelöltet, amelynek dimenziója a hiperparaméterek

5 ábra: A jelen tanulmányban hivatkozott (15)-(17) számú képletek. Forrás: a Szerzők

(15)

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}, \mathbf{Q}_d = \int_{\tau=0}^{T_s} \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{Q}\exp(\mathbf{A}^T\tau) d\tau$$

(16)

$$\Theta = [\mathbf{C}_{(1,1)}, \mathbf{C}_{(1,2)}, \mathbf{C}_{(2,1)}, \mathbf{C}_{(2,2)}, \mathbf{K}_{(1,1)}, \mathbf{K}_{(1,2)}, \mathbf{K}_{(2,1)}, \mathbf{K}_{(2,2)}, \sigma_1^2, l_1, \sigma_2^2, l_2, r_1, r_2]$$

(17)

$$\varphi_k(\Theta) = \varphi_{k-1}(\Theta) + \frac{1}{2} \log(2\pi\mathbf{S}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{r}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k,$$

ahol \mathbf{r}_k és \mathbf{S}_k a Kálmán-szűrő segédvektora és segédmátrixa.

vektorával egyezik meg, és azáltal egy lehetséges paraméter kombinációt jelöl. Ebből kiszámíthatók a folytonos rendszer mátrixai, melyeken ezek után elvégezhető az előbb bemutatott diszkretizáció. A Kálmán-szűrés ekkor már elvégezhető, a Kálmán-szűrő pontos megvalósítása és részletes levezetése megtalálható Sárkká (2013) vagy Murphy (2012) művében.

Ezzel tehát redukálható az algoritmus számítási komplexitása. Ehhez használható az ún. energiafüggvény, amely egy hiperparaméter-kombináció (ún. jelölt) jóságával áll arányosságban. Az energiafüggvény az 5. ábra (17) pontban közölt iterációval közelíthető (Rogers és tsai, 2018). Az energiafüggvény iteráció végén kapott értéke szolgál alapjául a jelölt elfogadásának vagy elutasításának. Minél

alacsonyabb az érték az előző elfogadott jelölthöz képest, annál magasabb az elfogadás valószínűsége. Az előző értékkel való összehasonlítás miatt ez tulajdonképpen egy gradiens módszernek is tekinthető. Több szabadsági fokú esetben a (17) egyenletben az energiafüggvény visszatérési értéke mátrix, ekkor a jelölt elfogadásának vizsgálatakor valamilyen mátrix invariáns használata lehet célravezető. A ciklus akkor fejeződik be, ha az előírt számú jelölt elfogadásra került. Utóbbi érték a ténylegesen a posterior eloszlásból mintavételezni kívánt elemszám és az ún. burn-in elemszám értékek összege. A véletlen bolyongás igen sok lépésbe is kerülhet, mire a mintavételezett tagok valóban a posterior eloszlásból kerülnek ki. Ez tipikusan akkor fordulhat elő, ha a

bolyongás kezdő lépése (inicializálás) távol van a posterior eloszlástól, ráadásul a bolyongás lépésköze (a lépéseket reprezentáló eloszlás szórása) is kicsi. Az így kapott eloszlás lényegében a posterior eloszlás, valamely irányban igen hosszú, nem elhanyagolható farokeloszlással. Az eloszlás átlaga és szórása emiatt rendkívül nagy mértékben eltér a posterior átlagtól és szórástól.

Ezen probléma kiküszöbölésére használható a burn-in fázis: ekkor az első néhány tagja a Markov-láncnak nem kerül felhasználásra a posterior eloszlás rekonstrukciójához. Ezzel a módszerrel már használható az átlag és szórás, ami egyben definiálja is a normális eloszlásúnak tekintett posterior eloszlást.

A levezetett módszer elvileg alkalmas a fél járműmodell identifikációjához, azonban a megvalósításhoz további vizsgálatok szükségesek, például, hogy melyik mátrix invariáns alkalmazása a legcélravezetőbb.

Konklúziók

Cikkünkben az egy szabadsági fokú negyed járműmodellen keresztül demonstráltuk a GP-LFM módszer hatékonyságát. A szakirodalomban a módszer döntő többségben nemlineáris rendszereken keresztül kerül megvalósításra, viszont csak egy szabadsági fokú rendszerek esetén. Mi az eddig egy szabadsági fokú rendszerekre használt módszert általánosítottuk két szabadsági fokú rendszerre. Rámutattunk a módszer előnyeire, külön kitérve a járműiparban is rendkívül

fontos megbízhatósági szintekre és bővítettük a témakör magyar nyelvű szakirodalmát. A módszer elméletének általánosításával kijelöltük az irányt a több szabadsági fokú rendszerek GP-LFM módszerrel történő identifikációjához.

Az eredmények alapján a módszerben komoly potenciál van a nemlineáris és/vagy magasabb dimenziójú rendszerek identifikálására, mindazonáltal figyelembe kell venni, hogy ezekben az esetekben a módszer számítási komplexitása jóval magasabb lehet. Erre javaslatunk egy adaptív lépésközüválasztó algoritmus, melylyel az ún. exploitation-exploration dilemma optimális megoldása várható el. Véleményünk szerint ez nagy mértékben redukálhatja az identifikáláshoz szükséges időt.

Az eljárás kiválóan alkalmazható lehet identifikációs feladatokra. Az előbbieken alapján gyorsítható az algoritmus, így egyszerűbb rendszerek és nagy számítási kapacitás esetén akár a folyamatos, real-time identifikáció is lehetséges lehet, de ehhez további és mélyebb kutatások szükségesek.

Köszönetnyilvánítás

Ezt a kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal NKFI K-128422 számú projektje, valamint a Kulturális és Innovációs Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által a TKP2021-NVA keretből finanszírozott TKP-6-6/PALY-2021 projekt támogatta.

Irodalom

- Alvarez, M., Luengo, D. és Lawrence, N. D. (2009, April). Latent force models. In *Artificial Intelligence and Statistics* (pp. 9-16). PMLR.
- Beichl, I. és Sullivan, F. (2000). The metropolis algorithm. *Computing in Science & Engineering*, 2(1), 65-69.
- Csernák, G. (2018). *Dinamika*. Akadémiai Kiadó DOI: 10.1556/9789630599245
- Csernák, G. és Stépán, G. (2019). *Rezgésstan*. Akadémiai Kiadó DOI: [10.1556/9789634544739](https://doi.org/10.1556/9789634544739)
- Genta, G. (2009). *Vibration dynamics and control* (Vol. 616). New York: Springer. DOI: [10.1007/978-0-387-79580-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-79580-5)
- Hartikainen, J. és Särkkä, S. (2010, August). Kalman filtering and smoothing solutions to temporal Gaussian process regression models. In *2010 IEEE international workshop on machine learning for signal processing* (pp. 379-384). IEEE. DOI: [10.1109/MLSP.2010.5589113](https://doi.org/10.1109/MLSP.2010.5589113)
- Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Enke, K., ... és Walden, H. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A*.
- Kolassa, J. E. (2020). *An introduction to nonparametric statistics*. CRC Press. DOI: [10.1201/9780429202759](https://doi.org/10.1201/9780429202759)
- MacKay, D. J. (1998). Introduction to Gaussian processes. *NATO ASI series F computer and systems sciences*, 168, 133-166.
- Marino, L. és Cicirello, A. (2023). A switching Gaussian process latent force model for the identification of mechanical systems with a discontinuous nonlinearity. *arXiv preprint arXiv:2303.03858*. DOI: [10.48550/arXiv.2303.03858](https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.03858)
- Murphy, K. P. (2012). *Machine learning: a probabilistic perspective*. MIT press.
- Net1: Rendkívül fontos Magyarország számára az autóiipar. Letöltés: 2023.03.23. Web: <https://e-cars.hu/2022/09/09/rendkivul-fontos-magyarorszag-szamara-az-autoipar/>
- Rogers, T. J. és Friis, T. (2022). A latent restoring force approach to nonlinear system identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 180, 109426. DOI: [10.1016/j.ymssp.2022.109426](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109426)
- Rogers, T. J., Worden, K. és Cross, E. J. (2020). On the application of Gaussian process latent force models for joint input-state-parameter estimation: With a view to Bayesian operational identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 140, 106580. DOI: [10.1016/j.ymssp.2019.106580](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106580)
- Rogers, T. J., Worden, K., Manson, G., Tygesen, U. T. és Cross, E. J. (2018). A Bayesian filtering approach to operational modal analysis with recovery of forcing signals. In *Proceedings of ISMA* (pp. 5181-5194). DOI: [10.3390/vibration3030020](https://doi.org/10.3390/vibration3030020)

- Russell, S. és Norvig, P. (2005). *Mesterséges intelligencia modern megközelítésben*, Második, átdolgozott, bővített kiadás. Panem Könyvkiadó, Budapest, <https://mialmanach.mit.bme.hu/aima/index>
- Särkkä, S. (2013). *Bayesian filtering and smoothing* (No. 3). Cambridge university press. DOI: [10.1017/CBO9781139344203](https://doi.org/10.1017/CBO9781139344203)
- Särkkä, S. és Solin, A. (2019). *Applied stochastic differential equations* (Vol. 10). Cambridge University Press. DOI: [10.1017/9781108186735](https://doi.org/10.1017/9781108186735)
- Stubnya, B. (2020). Egyre finomabb morzsák juthatnak Magyarországnak az autóiipari tortából. Letöltés: 2023.03.23. Web: <https://g7.hu/vallalat/20200131/egyre-finomabb-morzsak-juthatnak-magyarorszag-nak-az-autoipari-tortabol/>
- Wigren, T. és Schoukens, J. (2013, July). Three free data sets for development and benchmarking in nonlinear system identification. In *2013 European control conference (ECC)* (pp. 2933-2938). IEEE. DOI: [10.23919/ECC.2013.6669201](https://doi.org/10.23919/ECC.2013.6669201)