A pályázat feladatainak megvalósításában minden szereplő tevékenyen részt vett. A kutatási program legfőbb sikerét az a 31 tudományos publikáció igazolja, amik a kutatási tervben megjelölt feladatokkal kapcsolatosan elért eredményeket tartalmazzák. Simon Péter, a pályázat résztvevője, 2005-ben védte meg sikeresen Akadémiai Doktori Értekezését a pályázati tervben szereplő kutatási témában, így ez az eredmény is részben a pályázathoz köthető.
A pályázatban végzett munka hasznosságát illetően fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy az itt elvégzett elméleti kutatások teremtették meg az alapot két alkalmazott projektbe való bekapcsolódáshoz is. Ezek egyike *„A szaruhártya új, nagypontosságú, a klinikai szemészeti gyakorlatban alkalmazható topográfiai vizsgálati módszerek kidolgozása”* című, a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Programok Információs és Kommunikációs Technológiák Alprogram keretében elnyert, 2/020/2004. sz. pályázat, 2004-2007. Ennek résztvevői: MTA SZTAKI, Semmelweis Egyetem Szemészeti Klinika, ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék, Contware KFT. A másik, az ELTE Informatikai Kar, a Pannon GSM és az IQMed részvételével létrejött projektben pedig az EKG jelek analízisében tudtuk alkalmazni kutatási eredményeinket.
A pályázat által biztosított támogatás lehetőséget adott arra, hogy nemzetközi konferenciákon vegyünk részt és a kutatási programban elért eredményeinket ismertethessük. A résztvevők által tartott konferencia előadások listája a beszámoló végén található. Lehetőségünk volt továbbá a szakterület néhány nemzetközileg is elismert szakértőjét (J. Daly, U. Goginava, V. Ivanov, A. Siddiqi, P. Manchanda) meghívni és így több területen is közös kutatási munkát végezni. Ennek eredményeképpen közös publikációk születtek.

A kutatási tevékenységet a munkatervben vállalt témakörökben végeztük. Az elért és publikált eredményeket témakörök szerint az alábbiakban röviden összefoglalom.

A Hörmander-Mihlin-féle multiplier feltételt megvizsgáltuk a Walsh-transzformáltra és a diadikus $H^p[0,\infty]$ ($0<p\leq 1$) terekre vonatkozóan. Hasonló eredményeket sikerült elérni, mint a trigonometrikus esetben. A multiplier operátorokat nemcsak a Walsh, hanem annak általánosítására, a Vilenkin rendszerre is vizsgáltuk. Konstruáltunk egy általános, az operátor magjára vonatkozó feltételt. Megmutattuk, hogy az eddig ismert feltételek ennek speciális esetei, majd ezt alkalmazva kiterjesztettük a Marcinkiewicz-féle multiplier tételt a Vilenkin-rendszerek által generált Hardy típusú terekre. A klasszikus Hardy-térrel ($H_{2\pi}$) kapcsolatban igazoltuk, hogy a Hörmader-Mihlin-féle feltételnek megfelelő multiplier operátorok korlátosak $H_{2\pi}$-n, ezzel az L^p-terekre ismert eredményt sikerült kiterjeszteni a $H_{2\pi}$ térre. Azt is megmutattuk, hogy a Marcinkiewicz-féle feltétel nem elégséges a multiplier operátornak a $H_{2\pi}$ téren való korlátosságához. A Hörmander-Mihlin feltétellel többdimenziós diadikus esetben is foglalkoztunk. Megmutattuk, hogy ha multiplier eleget tesz q kitevővel a feltételnek, akkor az operátor korlátos a $H^{p,r}$ Hardy-Lorentz térből az L^{pr} Lorentz térbe. Ebből a H^p-n való korlátosság és a gyenge L^1-L^1 tulajdonság is következik. Megemlítjük, hogy a többdimenziós esethez új technikát kellett kidolgozni, ami magában foglal egy újszerű Sidon-típusú egyenlőtlenség alkalmazását is. A bizonyításban a terek atomos jellemzését használtuk ki, és azt igazoltuk, hogy az operátor úgynevezett p kvázi lokális tulajdonságú. A kapott eredmények mind a szokásos, mind pedig a diagonális Hardy térre érvényesek.

A Walsh-rendszerrel szoros kapcsolatban álló Ciesielski rendszerre vonatkozóan igazoltuk a Paley-Littlewood-egyenlőtlenséget, valamint a Marcinkiewicz –féle multiplier tételt. Ez utóbbit a megfelelő Hardy terekre is kiterjesztettük. A spline- és a Ciesielski-Fourier-sorokkal kapcsolatosan egy, az eddigi eredményeket összefoglaló cikk is született. Az úgynevezett θ-szummációs eljárások körében egy olyan általános eljárást dolgoztunk ki, amelyik örökli a Fejér-szummáció előnyös tulajdonságait. Számos rendszerre, közöttük a trigonometrikus, Walsh, Walsh-Kaczmarcz, Vilenkin, Ciesielski rendszerekre vonatkozóan igazoltuk a maximáloperátor korlátosságát az L^p és a megfelelő Hardy terekben. Ennek következményeként m.m. való konvergencia eredmények adódtak. Megjegyezzük, hogy a szóban forgó eljárás speciális esetként magában foglalja a klasszikus Weierstrass, Picar, Bessel, de la Vallée-Poussin, Rogosinski és Riemann összegzéseket.

Az adott problémához illeszkedő ortogonális rendszer konstruálásának problémaköre kapcsán a Malmquist-Takenaka, a gömbfüggvények és a Zernike rendszer területén értünk el eredményeket. Bevezettük a Malmquist-Takenaka rendszereket a kvaterniók halmazában. Igazoltuk, hogy ezen kvaternió változójú és kvaternió értékű függvények is rendelkeznek folytonos és diszkrét ortogonalitási tulajdonsággal. Korábban már igazoltuk, hogy a folytonos Haar-mértéket alkalmasan megválasztott diszkrét mértékkel helyettesítve a gömbfüggvények diszkrét ortonormált rendszert alkotnak. Most de la Valée-Poussin típusú folytonos és diszkrét approximációs eljárásokat szerkesztettünk a gömbön, majd megmutattuk, hogy ezek az approximációs eljárások alkalmasak a háromdimenziós Dirichlet-probléma megoldásainak approximálására. A Zernike függvények esetében is sikerült igazolni, hogy megadható olyan diszkrét mérték, melyre nézve a diszkrét rendszer ortogonális. Kimutattuk hogy a diszkrét mérték határértéke a megfelelő folytonos mérték az egységkörön. A diszkrét mérték segítségével approximációs eljárást definiáltunk a Zernike együtthatók meghatározására. Ezen együtthatók fontos szerepet játszanak a látási aberrációk meghatározásában. Tovább folytatva az optikában alkalmazható ortonormált rendszerek szerinti sorfejtéseket vizsgálatát az előzőekben már vizsgált a Zernike-rendszer helyett más, a felületről rendelkezésre álló ismeret alapján szerkesztett rendszereket vezettünk be a Csebisev-polinomokból kiindulva. A konstrukció alapjául szolgáló argumentum transzformáció megfelelő választásával a sorfejtés már kevés tag figyelembevételével is jó közelítést ad. Az eljárás a trigonometrikus Fourier analízis és a jelfeldolgozás eszközeinek és módszereinek alkalmazását teszi lehetővé. Többek között foglalkoztunk a szűrés (a szummáció) problémájával, folytonos és diszkrét ortonormált rendszerek szerkesztésével, a diszkrét Fourier-együtthatók kiszámításával és az FFT-hez hasonló gyors algoritmusok szerkesztésével.

A klasszikus Fourier-sorokkal kapcsolatban olyan, a szummációelméletben eddig még nem vizsgált terekkel foglalkoztunk, amelyek a Gábor analízisben nagy szerepet játszanak, pl. a súlyozott Wiener amalgám terek, Feichtinger algebra, Herz, Besov terek. Igazoltuk, hogy a θ-szummáció pontosan akkor konvergál L^1 normában (minden integrálható függvényre), egyenletesen vagy minden pontban (minden folytonos függvényre), ha a θ függvény Fourier-transzformáltja integrálható. A pontonkénti konvergenciára is sikerült szükséges és elégséges feltételt adni. Tehát, a θ-közepek minden Wiener amalgám térbeli (vagy integrálható) függvény minden Lebesgue-pontjában konvergálnak akkor és csak akkor, ha θ egy bizonyos Herztérben van. Folytatva a θ-szummációval kapcsolatos konvergencia kérdések vizsgálatát Herz térbeli függvények körében, θ függvényre vonatkozóan olyan feltételt találtunk, amely szükséges és elégséges arra vonatkozóan, hogy Herz térbeli függvények θ közepei minden Lebesgue pontban konvergáljanak. Ez természetesen egyben majdnem mindenütt való konvergencia feltétel is. Az erős szummációs tételt általánosítottuk d-dimenziós Fourier sorokra és Fourier transzformáltakra tetszőleges $f \in L^p(\log L)^{d-1}$ és $f \in L^p$ $(1<p<\infty)$ függvényekre illetve tetszőleges θ-szummációs eljárásokra.

A Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatban sikerült karakterizálni azokat a súlyfüggvényeket, amelyekre vonatkozóan a maximál Dirichlet- és Fejér féle magfüggvények integráljai végesek. Megvizsgáltuk a Vilenkin csoportra vonatkozó korlátossági feltétel szerepét is. Vizsgálatokat végeztünk vektor értékű Vilenkin-Fourier sorokra, mégpedig több szempontból is. Sikerült norma konvergencia típusú tételeket igazolni, továbbá a Carleson-tétel megfelelőjét, valamint a hézagos sor majdnem mindenütt való konvergenciáját. A majdnem mindenütt való konvergenciával kapcsolatos kutatásokat kiterjesztettük Banach tér értékű függvényekre is.

Sikerült valós-értékű martingálokra vonatkozó eredményeket általánosítani Banach tér értékű martingálokra, úgymint a dualitási tételeket és az atomos felbontást. Ennek segítségével új eredményeket nyerhetők vektor-értékű Fourier sorok konvergenciájára vonatkozóan. Ezek közé tartozik például a híres Carleson tétel megfelelője is.

A Walsh-Fourier sorokra vonatkozóan úgynevezett gyenge típusú egyenlőtlenségeket igazoltunk diadikus Hardy és Lebesgue terek között a Riesz és a (C,α) Cesáro szummáció maximál operátoraira. Jól ismert ui., hogy ezek az operátorok korlátosak H^p-ből L^p-be minden $1/(\alpha+1)<p<\infty$ esetén. Egyrészt most megmutattuk, hogy ez az erős korlátosság nem teljesül, ha $p\leqslant 1/(\alpha+1)$. Másrészt az is kiderült, hogy a $p=1/(\alpha+1)$ határesetben az emltett operátorok korlátosak maradnak $H^{1/(\alpha+1)}$ –ből a gyenge $L^{1/(\alpha+1)}$ térbe. A bizonyításhoz szükség volt néhány korábbi, a Cesaro, ill. Riesz-közepekre ismert egyenlőtlenség javítására is. Walsh-Fourier sorok Nörlund közepeinek approximációs rendjével kapcsolatban egyrészt az eddig ismert feltételeket enyhíthettük, másrészt megmutattuk, hogy az L^p $(1\leq p<\infty)$ terekre igazolt eredmények általánosíthatók homogén Banach terekre. Hasonló eredményeket igazoltunk a nem homogén diadikus H^p $(0<p<1)$ Hardy terekre is.

A diadikus testtel és a Walsh-transzformációval kapcsolatosan bevezettük a a Cesaro operátor általánosításának tekinthető ún. diadikus Hausdorff operátort. Beláttuk, hogy bármilyen $L^1[0,\infty]$-beli függvény által generált diadikus Hausdorff operátor korlátos a diadikus H^1 Hardy-téren. Megmutattuk továbbá, hogy ha a függvény eleget tesz néhány egyszerű feltételnek, akkor az említett operátor korlátos az $L^p[0,\infty]$ $(1\leq p<\infty)$ tereken.

A matematikai fizikában, a jel- és képfeldolgozásban elterjedten használják a Gábor- és a wavelet transzformációt. A csoportreprezentációból kiindulva származtatható úgynevezett voice transzformáció egy közös általánosítása a Gábor- és a wavelet transzformációnak. A racionális függvények Blaschke-féle csoportját felhasználva bevezettünk a voice transzformáció 3 változatát. Ezekben a transzformáció alapjául szolgáló reprezentációkat az L^2-tér, a H^2-Hardy-tér, ill. a Bergman-tér unitér operátoraival adjuk meg. Tisztáztuk a leképezések legfontosabb tulajdonságait, az injektivitást, a csoportművelet és a transzformáció kapcsolatát, megtaláltuk a Plancherel formula megfelelőjét és foglalkoztunk a transzformáció inverziójának problémájával. A konstrukcióban felhasznált unitér reprezentációkat alapul véve, ill. az ezekből származtatott voice-transzformációkat felhasználva ortogonális rendszerek egy igen széles osztályához juthatunk el. A trigonometrikus rendszerből kiindulva többek között megkapjuk a tóruszon ortogonális diszkrét Laguerre függvényéket és a diszken ortogonális Zernike függvényeket. Az előbbieket rendszerek identifikációjában, az utóbbiakat optikai rendszerek és a szem aberrációinak leírásában használják. Ezzel a szóban forgó rendszerek számos fontos tulajdonsága (ortogonalitás, addíciós képletek, stb.) egységes formában származtatható. Reményeink szerint ez a voice transzformáció ugyanazt a szerepet játszhatja az átviteli függvények vizsgálatában mint a Fourier- és wavelet transzformáció a frekvencia analízisben.

Olyan wavelet konstrukciókkal foglalkoztunk, ahol a dilatáció műveletét kétrétű leképezéssel helyettesítettük. Az ily módon szerkesztett ortogonális és biortogonális rendszerek szerinti sorfejtések a Haar-rendszerhez hasonlóan gyors algoritmusokkal végezhető el. A Rademacher-, Haar-, és Walsh-rendszer közti kapcsolatot mintául véve szerkesztettünk diszkrét ortogonális szorzatrendszereket és Haar-típusú rendszereket. Ezekben a konstrukciókban Rademacher-rendszerek szerepét kétrétű leképezések iterációjával származtatott rendszerek veszik át. Az ezekből adódó Haar-típusú rendszerek olyan waveleteknek tekinthetők, amelyekben a dilatáció szerepét a függvénykompozició veszi át. Ezzel az eljárással többek között olyan diszkrét polinom és racionális Walsh- és Haar-típusú rendszereket konstruálhatunk, amelyekkel effektív algoritmusok szerkeszthetők a Fourier-együtthatók kiszámítására és a függvény rekonstrukciójára.
A fenti kutatási téma egy része a cornea rekonstrukcióval foglalkozó NKF pályázatban és az EKG görbék analízisével és tömörítésével összefüggő pályázatban felvetődött problémákkal kapcsolatos.

Több összefoglaló cikk is született. Az egyik egy- és több-dimenziós Walsh-Fourier sorok összegzési kérdései és a diadikus derivált témakörében három összegzési eljárást (Fejér, Cesáro és Riesz eljárások) és háromféle konvergenciát (kúpban való konvergenciát, az R^d-beli konvergenciát és a Marcinkiewicz-félét) vizsgál. Egy másik összefoglaló cikk a harmonikus analízis és a waveletek közötti kapcsolatról szól, egy harmadik pedig az úgynevezett Sidon-típusú egyenlőtlenségek alkalmazási lehetőségeit összegzi.

Tudományos előadások

Daly, J., Fridli, S., Multipliers in Hardy spaces, Fejér-Riesz Conference, Eger, 2005

Eisner, T., Wavelets on dyadic field, Fejér-Riesz Conference, Eger, 2005

Eisner, T., Wavelets on arithmetic and logical fields, 6th Joint Conf. On Math. And Comp. Sci., July 12-15, 2006, Pécs, Hungary

Fridli, S., Ont he Walsh system, 8th Conference of Indian Society of Industrial & Applied Mathematics, University of Jammu, Jammu, India, March 31- April 3, 2007 (invited llecture)

Fridli, S., Strong approximation, integrability conditions, multipliers, Workshop on Walsh and Dyadic Analysis, Nis, Serbia, 2007

László, I., Kozaitis, S. A., Schipp, F., Construction of wavelets and applications, Informatika a felsőoktatásban 2005 Konferencia, Debrecen, 2005. augusztus 24-26, Konferenci absztrakt, 170. oldal, DE Informatikai Kar, ISBN 963 472 909 6

László, I., Schipp, F., Construction of rational Haar-like functions, Proc. 10th Symposium on Programming Languages and Software Tools, Dobogókő, Hungary, June 14-16, 2007, ELTE, Eötvös Kiadó, 2007 (ISBN 978-963-463-925-1)

Pap,M., Schipp,F., Malmquist-Takenaka systems over the set of quaternions, 5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen, June, 2004

Pap, M., Schipp,F., Rational wavelet transforms, Fejér-Riesz Conference, Eger, June 2005

Pap, M., Diszkrét ortogonális rendszerek és alkalmazásaik, Magyar Tudomány Napja, Pécs, PTE TTK, November 2-4, 2005

Pap, M., Discrete rational systems and equlibrium conditions, Fourier analysis Workshop, Rényi Alfréd Mathematical Institut, Budapest, September 2005

Pap, M., Schipp, F., Voice Transform of the Blaschke group, Conference in Fourier and Complex Analysis, May, 2006 Protaras, Cyprus

Pap, M., Schipp, F., The matrixelements of the representation of the Blaschke group, 6th Joint Conf. on Math. And Comp. Sci, (MACS), July 12-15, 2006, Pécs

Schipp, F., Waveletek és harmonikus analízis, MTA III. Osztály, Tudományos ülésszak, 2006. május 2.

Schipp, F., Construction of Orthogonal Systems, 6th Joint Conf. on Math. And Comp. Sci, (MACS), July 12-15, 2006, Pécs (invited lecture)

Schipp, F., Construction of discrete orthogonal systems, 8th Conference of Indian Society of Industrial & Applied Mathematics, University of Jammu, Jammu, India, March 31- April 3, 2007

Schipp, F., Walsh-like systems, Haar-like wavelets, Workshop on Walsh and Dyadic Analysis, Nis, Serbia, 2007, Oktober 18-19

Weisz, F., Wiener amalgams and summability of Fourier series, Fejér-Riesz Conference', Eger, 2005

Weisz, F., Inversion formulas and multipliers for STFT, University of Vienna, Numerical Harmonic Analysis Group, Faculty of Mathematics, 2006

Weisz, F., Some convergence theorems for Gábor series. 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Pécs, 2006

Weisz, F., Some summability results for Gabor series. Trends in Harmonic Analysis, Strobl, 2007

Weisz, F., Summability of Walsh-Fourier series and the dyadic derivative, Workshop on Walsh and Dyadic Analysis, Nis, Serbia, 2007