A T 047132 számú OTKA pályázat zárójelentése

A beszámolóra készülés során a kutatási tervet újra átnézve a témavezetőnek az a véleménye, hogy a résztvevők munkája a kitűzött célok felé haladva, a terveknek megfelelően folyt, amennyire persze egy kutatási tevékenységet 4-5 évre előre tervezni lehet.

A témavezető elsősorban az alábbi dolgozatokban elért eredmények továbbfejlesztéséhez kért – és kapott – támogatást:

On uniform convergence of sequences of certain linear operators, Acta Math. Hungar., **91(1–2)** (2001), 159–186 (társszerző: Vértesi P.).

On the summability of trigonometric interpolation processes, Acta Math. Hungar., **91(1–2)** (2001), 131–158.

On summability of weighted Lagrange interpolation I. (General weights), Acta Math. Hungar., **101** (2003), no. 4, 323–344 (társszerző: Vértesi P.)

On summability of weighted Lagrange interpolation II. (Freud-type weights), Acta Math. Hungar., **103** (2004), 1–17, (társszerző: Vértesi P.).

On summability of weighted Lagrange interpolation III. (Jacobi weights), Acta Math. Hungar., 104 (2004), no. 1-2, 39–62. (társszerző: Vértesi P.)

An Erdős-type convergence process in weighted interpolation. II (Exponential weights on $[-1, 1]$*)*, Acta Math. Hungar., **98** (2003), 129–162 (társszerző: Vértesi P.).

Necessary condition of the Turing instability, Physical Review E **48(1)**(1993) 183–186. (társszerző: Tóth J.)

Az első hat dolgozat jelzi a témavezető fő érdeklődési területét, ami az *approximációelmélet* témaköréhez kapcsolható. A 7. dolgozat feltüntetésével azt szándékoztam hangsúlyozni, egy másik érdeklődési területem a differenciálegyenletek elmélete és azok gyakorlati alkalmazásai.

Az **approximációelmélet** témakörével kapcsolatos eredményeink összefoglalásaként először azt emelem ki, hogy ezen a területen 31 dolgozat született. Különböző rendszerek szerinti Fourier-soroknak és diszkrét Fourier-soroknak, valamint ezek különböző típusú szummációinak a konvergenciájára publikáltunk új eredményeket. Itt jegyzem meg, hogy amikor én diszkrét Fourier-sorokról, illetve ezek szummációiról beszélek, akkor ebbe beleértek *mindenféle* interpolációs eljárást is. Kiderült ui. az, hogy több interpolációs eljárás felfogható úgy is, mint egy diszkrét Fourier-sor alkalmas szummációja. Az elért eredményeket a következő szűkebb témakörök köré csoportosítom.

Súlyozott polinomapproximáció a „folytonos”, illetve a „diszkrét” esetben. Az utóbbi évtizedekben a (többek között Erdős Pál és Freud Géza által kezdeményezett) súlyozott approximáció vizsgálata az approximációelméleti kutatások egyik meghatározó területe. Természetesen adódott az eddig ismert klasszikus tételek súlyozott változatának megfogalmazása és lehetőség szerinti belátása különböző súlyok esetén. Ebből a szempontból kiemelem Vértesi Péter *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twenteth Century* könyvben megjelent összefoglaló dolgozatát. Folytatódott a hosszú évek óta tartó jó kapcsolat az olasz approximációs iskola képviselőivel, elsősorban Bianca Della Vecchiaval és G. Mastroiannival. Ebben a témakörben 14 dolgozat született, amelyekben a szerzők a fentebb említett kutatók és/vagy a témavezető. Ide sorolom Chripkó Á. (a témavezető tanítványa) közlésre benyújtott dolgozatát is. Ezekben a dolgozatokban többek között az Hermite–Fejér-interpolációval, a paraortogonális polinomokkal kapcsolatos eredmények szerepelnek. Kétváltozós Lagrange-interpoláció Lebesgue-függvényének a pontos nagyságrendjét is igazoltuk bizonyos pontrendszer esetén. Többváltozós trigonometrikus projekciós operátorokat is vizsgáltunk „háromszögalakú” részletösszegek esetén. Ezzel kapcsolatos a Szili L., Vértesi P., 2008, JAT dolgozat.

Most a témavezető szívéhez legközelebb álló részproblémához: a **szummációs eljárásokhoz** szeretnék **megjegyzéseket** fűzni: Az approximációelmélet egyik fontos kérdése (például) folytonos függvények egyszerű szerkezetű függvényekkel való egyenletes megközelítésének a problémája. A trigonometrikus esetben a leggyakrabban használt egyszerű szerkezetű függvények a trigonometrikus Fourier-sor részletösszegei, amelyek viszont nem konvergálnak egyenletesen minden folytonos függvényre. Fejér Lipót alapvető jelentőségű szummációs tétele mutatta, hogy a részletösszegekből egyszerűen képezhető olyan trigonometrikus polinomsorozat, amely már minden folytonos függvényre egyenletesen konvergens lesz. Érdekes kérdés ezek után az, hogy milyen más módon lehet kosntruálni hasonló tulajdonságú polinomsorozatot. A 40-es években elsősorban az orosz approximációelmélet neves képviselői adtak meg ilyen általános eljárásokat, szummációs mátrixok segítségével. Történeti érdekességként említem meg, hogy Szőkefalvi-Nagy Béla 1943-ban mutatott rá először arra, hogy egyszerűbben megfogalmazható eredmények nyerhetők akkor, ha a szummációs mátrixot egyetlen függvénnyel generáljuk (ezt *szummációs függvénynek* fogjuk nevezni). G.M. Natanson és V.V. Zsuk 1983-ban igazolta a következő alapvető eredményt: *a trigonometrikus Fourier-sor egy szummációs függvénnyel generált összegzési eljárása pontosan akkor egyenletesen konvergens minden folytonos függvényre, ha a szummációs függvény Fourier-transzformáltja integrálható.* Ennek a tételnek a bizonyítását én csak a következő könyvben találtam meg: G. M. Natanson és V. V. Zuk, *Trigonometrikus Fourier-sorok és approximációelmélet*, Izdat. Leningrad Unta, Leningrad, 1983 (orosz nyelven). A bizonyítás csupán 3 oldal (168–170. oldalakon). Ez a tétel mutat rá a Fejér-féle szummációs tétel *igazi* lényegére: a számtani közepek egyenletes konvergenciája nem a magfüggvény nemnegativitásán múlik (bár éppen ez a tény teszi egyszerűvé a bizonyítást), hanem azon, hogy a számtani közepek szummációs függvényének Fourier-transzformáltja $\mathbb{R}$-en Lebesgue-integrálható. (Itt jegyzem meg, hogy a fent jelzett első dolgozat fő eredménye a Natanszon–Zsuk-tétel diszkrét változatának a bizonyítása.)

Ezek után persze természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy vajon hasonló jellegű *szükséges és elégséges* feltételt a szummációs függvényre meg lehet-e adni abban az esetben, ha a trigonometrikus polinomok helyett valamilyen súlyra ortogonális polinomokat veszünk. Kiderült, hogy az algebrai eset a trigonometrikusnál jóval bonyolultabb. Ennek egyik fő okát a trigonometrikus és az algebrai polinomokkal való közelítés közötti különbségben látom. Ismeretes az, hogy pl. a klasszikus ortogonális polinomok szerinti Fourier-sorok az ortogonalitási intervallum belső kompakt részintervallumain „nagyjából” a trigonometrikus Fourier-sorokhoz hasonlóan viselkednek, ugyanakkor az intervallum végpontjai körül az approximáció elromlik. Már Bernstein munkái is rámutattak azonban arra, hogy ezt a „rossz” viselkedést „javítani” lehet olyan súlyfüggvények alkalmazásával, amelyek a végpontok közelében nullához közeliek.

A nehézségeket egyre jobban tapasztalva azonban még most sem tartom reménytelennek azt, hogy a szummációs függvényre az algebrai esetben is megadható egy Natanszon–Zsuk-típusú egyszerű *szükséges és elégséges* feltétel; nekem/nekünk ilyet még nem sikerült megtalálni. (Itt jegyzem meg, hogy például a Jacobi esetben az ismert Fourier–Jacobi-transzformálttal nekem nem sikerült kapcsolatba hozni az egyenletes konvergenciára vonatkozó feltételt.) Az algebrai esetet tovább nehezíti a súlyok „alkalmas” megválasztása. Az általam ismert korábbi eredményekben egy-egy konkrét (pl. Jacobi-sorokkal kapcsolatos) problémához a szerzők *egy* konkrét súlyfüggvényt adtak meg. Kiderült persze az, hogy a súlyfüggvény többféle módon is megválasztható; ezért érdekesnek tartom annak vizsgálatát is, hogy milyen határok között lehet „jó” súlyfüggvényt választani egy adott konkrét problémánál. A zárójelentés elején felsorolt 5. dolgozatban (Vértesi Péterrel közös dolgozat) pl. adott α, β paraméterű Jacobi-polinomok diszkrét Fourier-sorát (ez a Lagrange-interpoláció), valamint ennek szummációját vizsgáltuk. Az egyenletes konvergenciát pedig γ, δ paraméterű Jacobi-súllyal képzett függvénytérben tekintettük. A szummációs mátrixra (a szummációs függvényre), valamint az α, β-tól függő γ, δ paraméterekre adtunk meg olyan *elégséges* feltételeket, amelyek biztosították a megfelelő közepek egyenletes konvergenciáját. Ezt azért tartottam fontosnak kiemelni, mert egyrészt én hasonló jellegű (γ, δ-típusú) vizsgálatokkal az irodalomban nem találkoztam, másrészt a további kutatásaimat ebben az irányban is folytattam. Kiderült (Chripkó Á., 2007), hogy a folytonos esetben is hasonló eredmények érvényesek. Sőt, a témavezető egy másik álma (???): a folytonos és diszkrét eset összekapcsolása. Mértékekkel megfogalmazni olyan (pl. szummációs) eredményeket, ami magában foglalja mind a két esetet. A trigonometrikus esetben erre van lehetőség (itt a beszámoló elején említett első dolgozat 169. oldalán leírtakra gondolok). Ilyen típusú eredmények haszna nyilvánvaló. A további kutatásaim ebben az irányban is folytatódnak .... (Elnézést kérek a kicsit hosszúra sikerült megjegyzésért.)

Más ortogonális rendszerek szerinti egy- és többdimenziós Fourier-sorokkal, valamint a Fourier-transzformálttal kapcsolatban elért eredményeit *Weisz Ferenc* 13 dolgozatban közölte. A trigonometrikus rendszer mellett a Walsh-, a Vilenkin-, valamint a Ciesielski-rendszerek szerint Fourier-sorok különböző szummációit vizsgálta. A súlyozott L^p-konvergenciára és a majdnem mindenütti konvergenciára bizonyított be több esetben szükséges és elégséges feltételt.

A Gábor és a wavelet transzformációkkal kapcsolatban (ezeket a jel- és képfeldolgozásban használják) Schipp Ferenc kapott új eredményeket (4 publikáció).

Az **alkalmazások** területén a reakciókinetika differenciálegyenleteivel (ezek általában polinomjobboldalú differenciálegyenletek!!!) kapcsolatos kutatásokat terveztünk. Tóth János igen aktív közreműködésével 12 dolgozat (ezek közül 1 TDK dolgozat, a többi folyóiratcikk) született. A kémiai reakciókinetika determinisztikus és sztochasztikus modelljeinek elméleti vizsgálatában (felrobbanás, összevonás, termodinamikai kapcsolatok), paramétereinek becslésében és biológiai alkalmazásaiban (farmakokinetika, gyógyszertervezés, szaglásmodellezés) értünk el új eredményeket. Megfogalmaztunk és numerikusan elemeztünk egy nyugdíjmodellt és a hiszterézis egy káoszra vezető modelljét is. Tóth János sok energiát fordít az utánpótlás nevelésére, Papp D. és Csijka R. a tanítványai; a közleményjegyzék Papp P; Vizvári

B. (2006), Csijka R. (2007) és Kirschner I., stb (2007) dolgozatainak elkészítésében is segédkezett.

Az alkalmazásokhoz a következő **megjegyzéseket** fűzöm. Egyik érdeklődési területem a differenciálegyenletek elmélete és azok gyakorlati alkalmazásai. Ebből adódik Tóth Jánossal a hosszú évek óta tartó együttműködésünk, amelynek „elszámolható" eredménye több közös dolgozat. A pályázat benyújtásakor az a cél lebegett a szemünk előtt, hogy sikerül olyan problémá(ka)t találni a fent jelzett területeken, ahol az approximációelmélet eredményeit fel lehet használni. Ebből publikáció nem született. Az elmúlt évben azonban Tóth Jánossal együtt egy mérnökkel igen sok konzultációt folytattunk. Egy egészen újszerű fogaskerékre már szabadalmaztatott találmánya van, ennek egy működő prototípusát is láttam. Az általa kitalált szerkezetre egy igen bonyolult, nemlineáris 3 egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert állított fel; ennek megoldása alapján határoz meg bizonyos profilokat. A numerikus megoldás szemléltetésekor igen érdekes dolgokat tapasztaltunk: belül elég sima görbéket kaptunk, a végpontok körül azonban nem. Ez engem a polinomokkal való approximációnál tapasztalt jelenségre emlékeztetett, aminek a „kezelését" éppen a súlyozott approximáció oldhatja meg. Ez talán egy olyan probléma lehet, amelyről a pályázat benyújtásakor álmodoztunk (???). Az ilyen irányú tervek megmaradtak, konzultációkat azóta is tartunk ...

Az utánpótlásnevelés szempontjából fontosnak tartom, hogy három tankönyvet is megjelentettünk: Tóth J., Simon L. P. (2005), Szili L. (2005), Szili L. (2007). Ez utóbbi a funkcionálanalízis alapjait tárgyalja; jelenleg a témavezető honlapján (numanal.inf.elte.hu/∼szili, itt az „Oktatási anyagok" linken található), hamarosan pedig az ELTE IK megújuló honlapjáról a Kar által tervezett, mindenki számára ingyenesen letölthető elektronikus könyvtárban lesz. Részt vettünk továbbá *Consice Oxford Dictionary, Mathematics* szótár fordításában is.

Budapest, 2008. február 28.

Szili László
témavezető