Á. SZABÓ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΊΖΕΙΝ

(PLATON, THEAIT. 148 A 6 ff.)

Es ist mir nicht bekannt, ob Philologen oder Historiker sich jemals gefragt hatten, was eigentlich Sinn und Bedeutung des im Titel angegebenen Wortes in der Antike war. Die meistgebrauchten Wörterbücher, wie z. B. Passow und Menge-Güthling, registrieren für das Verbum *τετραγωνίζειν* nur solche Bedeutungen, wie 'quadrieren', 'auf's Quadrat bringen'. Aber was diese letzteren Bezeichnungen lateinischen Ursprungs in einem antiken Text genau heißen sollen, wird gewöhnlich nicht mehr erklärt. Man findet auch unter *τετραγωνισμός* meistens nur die schlichte Mitteilung: 'Quadratur'. Ebenso liest man im Standard-Wörterbuch von Liddel & Scott: 'to make square, square, of lines and numbers', bzw. *τετραγωνισμός* 'a squaring, quadrature'.

Soviel ich weiß, hat man bisher nicht einmal jene Tatsachen klar und eindeutig festgelegt, von denen ich in meinen folgenden Erörterungen überhaupt ausgehen möchte. Diese sind:

1. Sowohl das genannte Verbum, wie auch das entsprechende Hauptwort wurden *in der mathematischen Fachsprache* geprägt, und sie wurden nur als *technische Ausdrücke* gebraucht.

2. Ursprünglich bezeichnete man mit diesen Worten gewisse Konstruktionen von *geradlinigen Figuren*; genauer: *man hat Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelt.* Das Verbum bezeichnet an erster Stelle eben diese Handlung. Und dementsprechend ist *τετραγωνισμός* 'das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat'. (Man vergesse auch nicht: *alle* geradlinigen Figuren wurden *über das Rechteck hindurch* 'quadriert'. Das heißt: will man eine beliebige geradlinige Figur in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, dann wird zunächst die betreffende Figur — wenn sie kein Dreieck ist — in *Dreiecke* aufgelöst; dann sucht man zu den Dreiecken flächengleiche *Rechtecke,* und erst im letzten Schritt können die Rechtecke 'quadriert', d. h. in flächengleiche *Quadrate* verwandelt werden.)

3. Die Versuche der *Kreisquadratur* zur Zeit der Sophistik, und ebenso auch die *Möndchenquadratur* des Hippokrates von Chios — die ebenfalls mit unseren Worten bezeichnet werden — sind historisch zweifellos *später* als das 'Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat'. — Wichtig ist

diese Feststellung auch darum, weil dadurch eine *relative Chronologie* von vornherein gegeben ist. Alles, was ich weiter unten im Zusammenhang mit *τετραγωνίζειν* darstelle, ist auf die Zeit *vor* der Sophistik, und *vor* Hippokrates von Chios zu datieren.

Doch ermöglicht die Kenntnis der eben aufgezählten drei Punkte noch keineswegs das Erklären der angegebenen Platon-Stelle. Im Gegenteil. Diese Stelle mag ein schlagendes Beispiel dafür sein, daß man einen griechischen Text manchmal grammatikalisch und sprachlich so gut wie tadellos übersetzen kann, ohne daß dabei auch der wahre Sinn erfaßt worden wäre. Ja, es wird in solchen Fällen meistens auch gar nicht bewußt, daß der Sinn des Textes nur halbwegs verstanden wurde. Auch ich habe für die fragliche Platon-Stelle vor kurzem noch eine solche nur grammatikalisch und sprachlich einwandfreie Übersetzung geliefert, die den tieferen Sinn der Stelle im unklaren läßt. Darum möchte ich hier das damals versäumte nachholen.

I

Man findet in meinem Buch «Anfänge der griechischen Mathematik» (Budapest, 1969) auf S. 51 den folgenden griechischen Text mit der danebengestellten deutschen Übersetzung:[1]

ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ'ἐπιπέδοις, ἃ δύνανται.

Diejenigen Strecken nun, die eine gleichseitige Quadratzahl *viereckig machen*, bezeichneten wir mit dem Wort *μῆκος*; diejenigen Strecken dagegen, die eine Rechteckzahl *in Quadrat verwandeln*, bezeichneten wir als *δυνάμεις*, nachdem diese letzteren der Länge nach zwar inkommensurabel zu den anderen sind, doch sind dieselben kommensurabel nach jenen Flächen (*ἐπιπέδοις*), die sie in Quadrat ausmachen (*ἃ δύνανται*).[2]

[1] Man vgl. mit meiner Übersetzung z.B. diejenige von O. APELT (Platon, Sämtliche Dialoge, Bd. 4. S. 39, Leipzig,[4] 1923): «Alle Linien nun, die *die Seiten* eines nach Seiten und Fläche *kommensurablen Quadrates bilden*, bestimmten wir als L ä n g e n, alle, welche eine inkommensurable *Quadratseite bilden*, nannten wir (im engeren Sinne) Q u a d r a t e etc.» (die Hervorhebungen von mir — Á. SZABÓ). Diese Übersetzung, und ebenso auch diejenige von R. RUFENER (Platon, Spätdialoge, ed. O. GIGON, Artemis, Zürich – Stuttgart, 1965, S. 13), *verschleiert allerdings noch mehr die Schwierigkeit*, als die meinige. Vgl. dazu auch die weiteren Ausführungen oben im Text.

[2] Die Hervorhebungen hier im deutschen Text sind *nicht* genau dieselben wie im Buch. Aber es kommt mir diesmal nur auf das hervorgehobene Verbum an; darum habe ich hier nicht nur die übrigen Hervorhebungen, sondern auch die hinzugefügten Bemerkungen fortgelassen. Es sei übrigens betont: der vorliegende Aufsatz ist eher als eine *Ergänzung*, und nicht etwa als eine Korrektur meiner früheren Erörterungen gemeint.

Ähnlich ist auch die englische Übersetzung von T. L. Heath:[3] «Such straight lines then as *square* the equilateral and plane number I defined as . . .μῆκος, and such as *square* the oblong . . .δυνάμεις, as not being commensurable with the others in length but only in plane areas to which their squares are equal.»

In allen von mir bekannten Übersetzungen wird das Verbum τετραγωνίζειν zweimal wiedergegeben — bei mir einmal: 'viereckig machen', und das zweite Mal: 'in Quadrat verwandeln' —, wo es im griechischen Original nur einmal gebraucht wird. Aber man kann gegen diese sinngemäße Wiederholung des Ausdruckes an der zweiten Stelle doch nichts einwenden. Ich finde es viel schlimmer, daß dieses Wort eigentlich sogleich an der ersten Stelle jeden denkenden Menschen *befremden müßte*. Da es jedoch bisher merkwürdigerweise noch niemanden befremdet hatte, muß ich zunächst scharf nachweisen, was eigentlich daran doch so unklar ist. Man überlege sich den Textzusammenhang.

Der junge Theaitetos berichtet über eine Mathematikstunde (147 D ff.). Theodoros habe seinen Schülern etwas über Quadrate (δυνάμεις) gezeigt; daß nämlich die Seiten mancher Quadrate — wie z. B. diejenige des Quadrats mit drei Quadratfuß-Fläche, oder die andere des Quadrats mit fünf Quadratfuß-Fläche — zur Seite des Einheitsquadrats der Länge nach inkommensurabel sind. Der Nachweis ging im einzelnen fort bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß-Fläche. Bei diesem habe Theodoros aufgehört. Darauf versuchten nun Theaitetos und sein Freund eine beachtenswerte Klassifizierung, nachdem es doch 'unendlich viele solche Quadrate gibt' — wie es im Bericht heißt.

Die Klassifizierung besteht aus zwei verschiedenen, voneinander klar und eindeutig auseinanderzuhaltenden Schritten. Der erste Schritt ist die Einteilung aller *Zahlen* in zwei Gruppen, und dann der zweite: eine ähnliche Zweiteilung der den Zahlen entsprechenden *Segmente* (oder *Stecken*). Der zweite Schritt — die Klassifizierung der *Segmente* — wird dadurch vorbereitet, daß schon im ersten Schritt die Zahlen — *geometrisch* illustriert — entweder als *Quadratzahlen* oder als *Rechteckzahlen* gedacht werden. Diese geometrische Illustrierung der Zahlen erinnert den modernen Leser daran, daß in der Tat auch bei Euklid das Wort πλευρά sowohl die *Seite* einer geradlinigen Flächenfigur (z. B. in den Definitionen 19, 20 und 21 des Buches I der 'Elemente'), wie auch den *Faktor* einer sog. 'Flächenzahl' oder 'Körperzahl' (s. die Definitionen 16 und 17 des VII Buches) bezeichnen kann. Aber bleiben wir noch beim Platon-Text. Die 'Quadratzahlen' sind — wie Theaitetos erklärt — Produkte gleichmal gleicher Faktoren, während die 'Rechteckzahlen' sich niemals in gleichmal gleiche Faktoren zerlegen lassen; diese letzteren sind immer Produkte zweier ungleicher Faktoren.

[3] T. L. Heath: The thirteen Books of Euclid's Elements (Dover Publication) vol. III p. 3.

Dies alles wäre noch vollkommen in Ordnung, wie auch Sokrates sich mit dem Bericht des jungen Mannes einverstanden erklärt. Aber dann kommt plötzlich der Satz, den ich oben schon in mehreren Varianten zitiert habe: «Wir haben dann die Segmente, *die eine Quadratzahl viereckig machen*, als μῆκος bezeichnet, etc.» Was soll man nun unter dieser merkwürdigen Wendung verstehen? Man möchte sich eine *Quadratzahl* — geometrisch illustriert — doch als ein *Quadrat* denken, wie dies auch im Text selbst gesagt wird. Aber wie kann man das *Quadrat* noch weiter *'viereckig machen'* (= *quadrieren*)? Man muß zugeben, daß dieser Ausdruck — wenn man ihn wörtlich und genau nimmt — im vorliegenden Zusammenhang der reinste Unsinn ist. Das griechische Wort für 'viereckig machen' (*τετραγωνίζειν*) paßt eigentlich nur auf R e c h t e c k e, nachdem in der Geometrie nur diese 'viereckig gemacht', 'quadriert werden' (vgl. Euklid, 'Elemente' II 14). Aber ein *Quadrat* wird nicht weiter *quadriert.*

Oder dürfte man die Schwierigkeit nicht dadurch eliminieren, daß man das Verbum *τετραγωνίζειν* im obigen Zitat in einem nur abgeschwächteren Sinne versteht? Wäre es nicht möglich, dieses Zeitwort auf ein sog. 'inneres Objekt' zu beziehen? Warum könnte man den Text nicht etwa folgendermaßen übersetzen: «Diejenigen Strecken nun, die *Seite* je einer Quadratzahl *bilden* (*τετραγωνίζουσι*), bezeichneten wir mit dem Wort μῆκος etc.»? Allerdings würde eine solche Übersetzungskosmetik die Schwierigkeit vertuschen.[4] Aber wir wären damit doch nicht besser daran. Nachdem man nämlich den scharfen und prägnanten Sinn des Wortes *τετραγωνίζειν* (= 'viereckig machen') in der ersten Hälfte des Satzes hinweginterpretiert hatte, müßte man denselben Sinn in der zweiten Hälfte des Satzes wieder zurückverlangen. Denn es ist ja in demselben Satz doch auch über Strecken die Rede, *'die eine Rechteckzahl in Quadrat verwandeln'*. Und hier ist der prägnante Sinn des Verbums völlig am Platze. Doch damit es noch schlimmer sei: hier, an der zweiten Stelle — in der prägnanten Verwendung — *wird das griechische Wort gar nicht mehr gebraucht.* Nur *sinngemäß* haben wir es in der Übersetzung wiederholt. Aber man kann eine sprachliche Wendung sinngemäß in der Übersetzung nur dann wiederholen, wenn man denselben Sinn von ihr nicht früher schon aufgegeben hatte.

Man kann also — meiner Ansicht nach — die gewöhnliche Bedeutung des Verbums *τετραγωνίζειν*: 'viereckig machen', 'quadrieren' an unserer Stelle *nicht* anwenden. Man kann weder ein *Quadrat*, noch eine *Quadratzahl* 'viereckig machen', 'quadrieren'. Dieses Verbum wird im untersuchten Textzusammen-

[4] Eben in diesem Sinne vertuschen die Schwierigkeit jene Übersetzungen, die ich oben in Anm. 1 namhaft gemacht habe. Ja, man findet dasselbe Vertuschen des Problems — mit Hilfe einer bloß sprachlich 'einwandfreien Übersetzung' — auch im Wörterbuch von LIDDEL & SCOTT, wo man (s.v.) liest, die griechische Wendung *ὅσαι γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον . . . ἀριμὸν τετραγωνίζουσι,* hieße: «all line which *form* an equilateral number *as their square*».

hang wohl eine *spezielle Bedeutung* haben, und wir müssen hier eben diese nachweisen.

Nun hätte ich den fraglichen Wortsinn eigentlich auch damals schon präzis angeben können, als ich die oben zitierte Textübersetzung versuchte — wenn ich nur der Schwierigkeit voll bewußt geworden wäre.[5] Denn man liest ja in meinem angeführten Buch — allerdings nicht unmittelbar auf die hier wieder behandelte Platon-Stelle bezogen:[6] Aristoteles sagt in der Metaphysik wörtlich das folgende:[7] «Was ist τετραγωνίζειν? — Das Auffinden der Mittleren Proportionale» (τί ἐστιν τετραγωνίζειν . . . μέσης εὕρεσις). Der Sinn und Textzusammenhang dieser bündigen Aristotelischen Behauptung werden im trefflichen Kommentar von W. D. Ross folgendermaßen erklärt:[8] «The definition, *the squaring of a rectangle is the finding of a geometrical mean between the sides*, is an abbreviated form of the syllogism: *a rectangle can be squared because a mean can be found between its sides.*»

Aber auch Aristoteles selber erklärt denselben Gedanken ein anderes Mal ausführlicher:[9] «Gewöhnlich sind die Definitionen Schlußsätzen ähnlich, wie z. B.: *Was ist der tetragonismos? Die Konstruktion eines einem Rechteck* (ἑτερόμηκες) *flächengleichen Quadrats.* Eine solche Definition ist ein Schlußsatz. Derjenige aber, der behauptet, daß *der tetragonismos das Auffinden der Mittleren Proportionale ist*, der macht auch den Grund der Sache namhaft (ὁ δὲ λέγων ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμὸς μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον).

Denkt man nun an diese Worte, so wird man versuchen, das Zeitwort τετραγωνίζειν auch an unserer Platon-Stelle mit 'Auffinden der Mittleren Proportionale' zu übersetzen. Und diese Übersetzung erleichtert in der Tat aufeinmal überraschend die Interpretation der ganzen Stelle. Denn es handelt sich ja doch um folgendes.

II

Theaitetos und sein Freund fassen *alle* Zahlen als Produkte von je zwei Faktoren auf. Das ist gar nichts anderes als das Umkehren der Definition 16. im Buch VII der Euklidischen 'Elemente':[10]

> «Wenn zwei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, wird die entstehende eine *ebene Zahl* genannt, und die einander vervielfältigenden Zahlen ihre *Seiten.*»

[5] Anm. 26 auf S. 51 ('Anfänge etc.') verrät, daß ich auch damals nicht völlig befriedigt war.
[6] 'Anfänge etc.' S. 58—59.
[7] Met. 996 b 18—21.
[8] 'Aristotle's Metaphysics', Oxford 1924, II 229.
[9] De anima II 2, 413a 13- 20.
[10] Die Übersetzung nach C. Thaer: 'Die Elemente von Euklid', I—V (in: Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften). Leipzig 1933—1937.

Die Zahlen werden nun als 'ebene Zahlen' — oder nach einer in der Fachliteratur heute üblicheren Terminologie als '*Flächenzahlen*' — gedacht, indem man sie als Produkte von zwei Zahlen auffaßt. (Dies ist selbstverständlich auch im Falle der Primzahlen möglich; z. B. $7 = 1 \times 7$.) Als solche Produkte lassen sie sich dann in zwei Gruppen einteilen: *Quadratzahlen* und *Rechteckzahlen*. Man beachte auch die umsichtige Formulierung des Theaitetos, wie er die 'Quadratzahl' definiert: τὸν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι = 'diejenige, die gleichmal gleich *sein kann*'. Denn er weiß doch, daß man *jede* Quadratzahl nicht nur als 'gleichmal gleich' auffassen, sondern mindestens auch noch auf eine andere Weise in zwei Faktoren zerlegen kann. Die 9 ist z. B. nicht nur 3×3, sondern auch 1×9; oder im Falle der 36: $1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$. Es ist also nicht unbedingt notwendig, daß die Quadratzahl in 'gleichmal gleiche Faktoren' zerlegt werde; auch in einer anderen Faktorenzerlegung bleibt sie Quadratzahl. Nur die *Möglichkeit* einer solchen Faktorenzerlegung muß da sein. Auch den Rechteckzahlen gegenüber besteht der wesentliche Unterschied darin, daß die Rechteckzahlen *nie* 'Produkte gleichmal gleicher Faktoren' sein können. Aber gewöhnlich denkt man sich die Flächenzahlen doch als 'Rechtecke', d. h. als 'Produkte *nicht* gleichmal gleicher Faktoren', da eine solche Faktorenzerlegung für *jede* ganze Zahl ausnahmslos vorhanden ist. Außerdem hat der naive Beobachter leicht auch den Eindruck, als gäbe es *mehr* Rechteckzahlen als Quadratzahlen.[11] Auch darum ist es also naheliegend, die Zahlen — wenn sie schon als Produkte von *zwei* Faktoren aufgefaßt werden — zunächst als 'Rechtecke' illustriert zu denken. Die Quadratzahlen sind dann jene praktisch selteneren Ausnahmen — unter den übrigen zwangsläufig *nur* als Rechtecke darstellbaren Flächenzahlen —, bei denen *auch* eine Zerlegung in 'gleichmal gleiche Faktoren' möglich ist.

Es muß nun hier — bevor wir die Interpretation der Theaitetos-Stelle fortsetzten — die allgemeinere Frage gestellt werden: was überhaupt Zweck und Ziel jener ganzen Theorie der 'Flächenzahlen' gewesen sein mag, der man nicht nur an unserer Platon-Stelle, sondern auch bei Euklid im Buch VII der 'Elemente' begegnet. Ich muß vor allem an zwei wohlbekannte Tatsachen erinnern.

(1) Die Pythagoreer haben die Zahlen ursprünglich aus *Steinchen* (ψῆφοι) ausgelegt.[12] Aus dieser 'Arithmetik der Steinchen' läßt sich nicht nur die alte Lehre vom Geraden und Ungeraden ableiten,[13] sondern auch die Beschäftigung

[11] Je weiter man zählt, umso seltener werden die Quadratzahlen: *1*, 2, 3, *4*, . . . 9, . . . 16 . . . Aber es gibt in Wirklichkeit *ebenso viele* (d. h. *abzählbar unendliche*) Quadratzahlen wie Rechteckzahlen. Doch es scheint, daß diese Tatsache (bzw. eine noch paradoxere Form derselben) erst durch *Galileo Galilei* klar und eindeutig ausgesprochen wurde.

[12] O. BECKER: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen ²1966, 40 ff.

[13] O. BECKER: Quellen und Studien z. Gesch. d. Math., Astronomie und Physik. B 3 (1936) 533–553.

der Pythagoreer mit den sog. Polygonalzahlen.[14] Man fragte sich nämlich: aus welchen (mit Steinchen dargestellten) Zahlen lassen sich regelmäßige Polygone — z. B. Dreiecke, Fünfecke, Siebenecke etc. — auslegen. Diese Untersuchungen ergaben zunächst einige interessante arithmetische Reihen. Um hier nur das allereinfachste zu erwähnen, die Reihe der sog. Dreieckszahlen sieht folgendermaßen aus: 3, 6, 10, 15, ..., d. h. *nur* aus diesen mit Steinchen dargestellten Zahlen lassen sich immer größere gleichseitige Dreiecke auslegen.

Ursprünglich hat man auch die Quadratzahlen und Rechteckzahlen zweifellos mit Steinchen ausgelegt.[15] Aber von dieser ganzen 'Arithmetik der Steinchen' findet man bei Euklid — von der Lehre vom Geraden und Ungeraden abgesehen, die bei ihm *auch nicht* mit Steinchen illustriert wird — überhaupt nichts. Die Seiten der 'Flächenzahlen' (d. h. die beiden Faktoren einer als Produkt aufgefaßten Zahl) werden bei Euklid *nicht* aus Steinchen ausgelegt, sondern als *Streckensegmente* gedacht. Natürlich hätte man die interessanten arithmetischen Reihen der verschiedenen Polygonalzahlen *nicht* finden können, hätte man die Zahlen von Anfang an als Streckensegmente dargestellt. Doch brachte das Umschalten von 'Steinchen' auf 'Segmente' in der Illustrierung der Zahlen zwei solche große Vorteile mit sich, die ich hier nachdrücklich hervorheben möchte.

Der Begriff der 'Zahl' wurde dadurch — daß man *nicht* irgendeinen 'konkreten' Fall von ihr mit mehr oder weniger Steinchen vorzeigte, sondern daß man die Zahl selbst als ein *Segment* in der Tat nur 'illustrierte' — *abstrakter*. Denn von nun an konnte *jedes* Segment je nach Belieben *jede* Zahl vertreten, ohne sie irgendwie 'greifbar' zu machen. Außerdem hat das Illustrieren der Zahlen mittels Streckensegmente auch einen epochemachenden Wandel in der Geschichte der Mathematik sozusagen vorbereitet.

(2) Es war ein außerordentlich wichtiges Problem in der frühgriechischen Arithmetik, wie ich darauf schon mehrmals hingewiesen hatte:[16] *die Mittlere Proportionale*. Man muß sich vor allem gefragt haben: wann findet man überhaupt eine mittlere proportionale Zahl zwischen zwei gegebenen Zahlen. Und wohl frühzeitig wurde die Antwort auf diese Frage gefunden: es gibt eine mittlere proportionale *Zahl* (x) zwischen zwei Zahlen — a und b — *nur dann, wenn beide Zahlen* (a und b) *sich in je zwei solche Faktoren zerlegen lassen, die Seiten von zwei ähnlichen Rechtecken sind*. Das ist der Sinn der beiden Sätze: *Elem. VIII, 18* und *VIII, 20* — wie ich dies bei einer anderen Gelegenheit schon ausführlicher entwickelt hatte.[17]

[14] Vgl. dazu P.-H. Michel: De Pythagore à Euclide. Paris 1950.
[15] S. oben Anm. 12.
[16] Zuletzt z. B. im Aufsatz: 'Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie', Hermes 98 (1970) 405 ff.
[17] Siehe die vorige Anmerkung. Im Aufsatz werden beide Sätze auch zitiert (auf S. 410).

Der Begriff der 'Flächenzahlen' ermöglicht also zunächst das Beantworten eines grundlegenden Problems der *arithmetischen* Proportionenlehre — auch davon unabhängig, ob die Zahlen mit *Steinchen* ausgelegt, oder nur mit *Streckensegmenten* abstrakter illustriert werden. Doch hat das Umschalten von 'Steinchen' auf 'Segmente' eben in diesem Zusammenhang sogleich auch eine neue und überraschende Perspektive eröffnet.

Solange man nämlich die Zahlen mit Steinchen 'konkret' sichtbar gemacht hatte, hat man nur mit dem vorhin charakterisierten exakten Gesetz der *Arithmetik* die Frage beantworten können: warum man in der Praxis so 'selten'[18] jenem Fall begegnet, in dem es zu zwei gegebenen Zahlen auch eine mittlere proportionale Zahl gibt: Aber sogleich hat man dasselbe Problem der Mittleren Proportionale in einem neuen Sinne formulieren können, als man die Zahlen nicht mehr 'konkret' ausgelegt, sondern nur noch als Streckensegmente illustriert hatte. Denn es war ja doch aus der (arithmetischen) Porportionenlehre der Satz bekannt:

> *Elem. VII, 19:* «Stehen vier Zahlen in Proportion, dann muß das Produkt aus der ersten und vierten dem Produkt aus der zweiten und dritten gleich sein; und wenn das Produkt aus der ersten und vierten Zahl dem aus der zweiten und dritten gleich ist, dann müssen die vier Zahlen in Proportion stehen.»

Dieser Satz besagt also: gilt für vier Zahlen — a, b, c und d — die Proportion $a : b = c : d$, dann muß auch die Gleichung der Produkte gelten:

$$ad = bc. \tag{I}$$

Oder hat man nur drei Zahlen — a, b und x —, und gilt für diese $a : x = x : b$, dann auch

$$ab = x^2. \tag{II}$$

Die Gleichungen (I) und (II) verwandeln also die ursprünglichen Proportionen (= Verhältnisgleichheiten) in Gleichheiten von Produkten, wobei alle benutzten Buchstaben (a, b, c, d und auch x) einstweilen *ganze Zahlen* bezeichnen.

Man denke sich nun die beiden Zahlen a und b (in der Proportion $a : x = x : b$) *mit Steinchen ausgelegt*. Es ist dann leicht einzusehen — ja man kann dies mit den Steinchen auch illustrieren —, daß in manchen Fällen für die vorige Proportion die Zahl x sich leicht angeben läßt, während in anderen Fällen dieselbe Zahl *gar nicht zu existieren scheint*. Sind z. B. $a = 2$ und $b = 8$, dann ist $x = 4$; denn in der Tat $2 : 4 = 4 : 8$. Wählt man dagegen $a = 2$ und $b = 7$, dann gibt es gar keine Zahl x für die Proportion

$$2 : x = x : 7.$$

[18] Das Wort «selten» darf uns wieder nicht irreführen. S. oben Anm. 11.

In der Tat legen die oben schon angedeuteten Euklidischen Sätze *Elem. VIII, 18* und *VIII, 20* eben die Tatsache fest: in welchen Fällen ist es überhaupt möglich, eine mittlere proportionale Zahl zwischen zwei gegebenen Zahlen zu finden; nur dann nämlich, wenn die gegebenen Zahlen sich in solche Faktoren zerlegen lassen, die *Seiten von ähnlichen Rechtecken sind.*

Denkt man sich dagegen die Zahlen nicht mehr als aus Steinchen ausgelegt, sondern bloß als *Segmente* angedeutet, so kann man die obige Gleichung (II) auch in einem *rein geometrischen Sinne* auffassen; d. h. man sieht in der Gleichung $ab = x^2$ nicht mehr eine andere Form der Proportion $a : x = x : b$, und man denkt auch nicht daran, daß in diesem Fall x die Mittlere Proportionale zwischen a und b sein soll. Man faßt anstatt dessen das Produkt ab als ein gegebenes Rechteck auf, das in ein flächengleiches Quadrat (x^2) verwandelt werden soll. Wohl bleibt auch in diesem Fall das Quadrieren des Rechtecks (im Sinne unserer obigen Aristoteles-Zitate) dem Auffinden der Mittleren Proportionale zwischen seinen beiden Seiten gleichwertig. Aber man kann nun dieselbe Aufgabe auch so lösen, daß man dabei zunächst gar nicht an eine Proportion denkt.

Nun habe ich in meinem zuletzt veröffentlichten Hermes-Aufsatz[19] u. a. eben das grundlegende Problem behandelt: wie verwandelt man, unter Anwendung der Euklidischen Sätze *Elem. II 5* und *II 14* ein beliebiges Rechteck ab in ein flächengleiches Quadrat — *ohne jegliche Berücksichtigung der Proportionenlehre.* (Wohl eben diese schöne geometrische Errungenschaft wird — im Sinne meiner Interpretation — an der Platon-Stelle: *Epinomis 990 D 1—6* gefeiert.) Ich kann hier den einschlägigen Teil meines zuletzt entwickelten Gedankenganges natürlich nur in einigen Zügen wiederholen.

Man konstruiert aus den beiden Seiten des Rechtecks, a und b, ein größeres Quadrat: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ und ein kleineres: $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Die Differenz der beiden Quadrate ist natürlich das Rechteck: $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Faßt man nun das eben konstruierte größere Quadrat als Quadrat auf der *Hypotenuse*, und das kleinere als Quadrat auf der *einen Kathete* eines rechtwinkligen Dreiecks auf, so wird die Differenz der beiden vorigen Quadrate nicht nur dem Rechteck ab, sondern (im Sinne des sog. Pythagoreischen Lehrsatzes) auch dem Quadrat auf der *anderen Kathete* gleich: $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = x^2$ (wobei x die andere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet). So quadriert man ein beliebiges Rechteck, auch wenn die Seiten solche Zahlen sind, *zwischen denen es keine mittlere proportionale Zahl gibt.*

[19] S. oben Anm. 16.

(In diesem letzteren Fall ist nämlich die Mittlere Proportionale *keine* zu den beiden Seiten des Rechtecks *linear kommensurable Größe*.)

Ich glaube nun einige wichtige Ergebnisse der vorangestellten Untersuchung in den folgenden Punkten zusammenfassen zu dürfen.

1. Zweck und Ziel der Theorie der 'Flächenzahlen' war zunächst, ein arithmetisches Gesetz zu finden: wann gibt es eine mittlere proportionale *Zahl* zwischen zwei Zahlen. (Vgl. *Elem. VIII 18* und *VIII 20*.) Es war natürlich möglich, dieses Ziel zu verwirklichen, auch in jener Zeit schon, in der die Zahlen noch *konkret mit Steinchen* ausgelegt wurden.

2. Das Illustrieren der Zahlen in der Form von *Streckensegmenten* hat die Lösung jener verwandten Aufgabe gefördert: wie verwandelt man ein beliebiges Rechteck in ein flächengleiches Quadrat (das Quadrieren des Rechtecks). Diese Aufgabe — die ihrem Wesen nach dem Problem der Mittleren Proportionale zwischen zwei Zahlen oder Größen gleichwertig ist — wurde ursprünglich mit Hilfe jener Methode gelöst, die wir aus den Sätzen *Elem. II 5* und *II 14* kennen.

3. Das Quadrieren des Rechtecks und die Erkenntnis, daß die Seite des zu einem Rechteck flächengleichen Quadrats *immer* die Mittlere Proportionale zwischen den beiden Rechteckseiten sein muß — einerlei, was für Zahlen die Seiten sein mögen —, führten zu jener epochemachenden Entdeckung, daß man verhältnismäßig leicht solche Segmente gewinnen kann, die man der Länge nach mit einer im voraus gegebenen Einheit (oder auch mit dem Bruchteil einer Einheit) überhaupt nicht messen kann, deren Quadrate jedoch *zahlenmäßig* bestimmbare Größen sind.

III

Man wird also die anfangs zitierte Platon-Stelle (und darin das fragliche Verbum) dem Sinne nach *genauer* folgendermaßen paraphrasieren: «Diejenigen Segmente nun, die *der Mittleren Proportionale zwischen zwei beliebigen Faktoren einer Quadratzahl entsprechen* (*τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι*), bezeichneten wir als 'm e k o s'; diejenigen Segmente dagegen, die *der Mittleren Proportionale zwischen den beiden Faktoren einer Rechteckzahl entsprechen* (*ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη . . .*), bezeichneten wir als 'd y n a m e i s', nachdem diese letzteren der Länge nach zwar inkommensurabel zu den anderen sind, doch sind sie kommensurabel nach jenen Flächen, die sie in Quadrat ausmachen.»[20]

Ich würde den Gedanken an zwei Beispielen etwa folgendermaßen illustrieren: Das Segment, das der Zahl *6* entspricht, wird als 'mekos' bezeichnet,

[20] Natürlich sind die beiden Bezeichnungen («mekos» und «dynamis») den sprachlich vollständigeren technischen Ausdrücken im Buch X der «Elemente» — *μήκει σύμμετρος* und *δυνάμει σύμμετρος* gleichwertig. Vgl. dazu in meinem Buch «Anfänge etc.» 83 ff.

da die *6* die Mittlere Proportionale zwischen zwei beliebigen Faktoren der Quadratzahl *36* — also zwischen den je zwei Zahlen: 1—36, 2—18, 3—12, 4—9 oder auch 6—6 — ist. Dagegen bekommt jenes andere Segment, das *der Mittleren Proportionale zwischen den Zahlsegmenten 2 und 7 entspricht,* die Bezeichnung 'dynamis', nachdem dieses letztere sich der Länge nach zwar gar nicht messen läßt,[21] aber das Flächenmaß jenes Quadrats, dessen Seite es bildet, doch wohlbekannt (14) ist.

Ich muß nun hier — um klar und eindeutig herauszustellen, warum die eben vorgeschlagene Paraphrase meiner früheren Übersetzung vorzuziehen ist — die wesentlichen und neuen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung in den weiter unten aufzuzählenden 5 Punkten zusammenfassen. Denn ich bin mir dessen voll bewußt, daß der Leser, der das Problem nur von der sprachlichen Seite her beurteilt, leicht den Eindruck haben könnte: es bestünde 'kein wesentlicher Unterschied' zwischen der früheren Übersetzung und der neuen Paraphrase; als ob die Paraphrase nur umständlicher dasselbe besagen könnte, wie die frühere schlichte Übersetzung. Doch steht für mich das sprachliche Interpretieren im Dienste einer *historischen Perspektive,* die ich schon hier andeuten möchte. Ich erblicke nun die wichtigsten Ergebnisse dieser ausführlicheren Erklärung zunächst im folgenden:

1. Es wurde diesmal eindeutiger als früher betont, daß das Wesen des 'tetragonismos' — *auch im Platonischen Dialog 'Theaitetos'* — in der Lösung des Problems der *Mittleren Proportionale* bestand. Man kann die mathematische Stelle des Dialogs — ohne die Berücksichtigung des historischen Problems der Mittleren Proportionale — auch gar nicht befriedigend erklären. Ich glaube nun zwar, daß die Spuren dieser Erkenntnis auch in meinen früheren diesbezüglichen Arbeiten schon vorhanden sind,[22] aber diese Tatsache wurde, nach meinem heutigen Beurteilen, bisher nicht genügend in den Vordergrund gerückt.

2. Offenbar ist auch der wichtige Begriff der griechischen Mathematik: 'dynamis' = *'Quadratwert eines Rechtecks'*[23] vom Problem der Mittleren Proportionale, und vom Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat ('tetragonismos') untrennbar. Man bekommt ja solche *'dynameis'*, wie diejenigen des Theodoros — d. h. also Quadrate von *drei, fünf* etc. Quadratfuß-Flächen — eben auf dem Wege, daß man Rechtecke mit entsprechenden Zahl-Seiten (also 1×3, 1×5, 2×3 etc. etc.) in flächengleiche Quadrate verwandelt

[21] Die «*Mittlere Proportionale zwischen 2 und 7*» wird nach der heute üblichen Bezeichnungsart als $\sqrt{14}$ angegeben. Aber $\sqrt{14}$ ist nach antiker Denkweise *keine Zahl,* weil man *weder diese, noch irgendein Mehrfaches von ihr aus Einheiten herstellen kann.* Auch wir können heute über $\sqrt{14}$ nur soviel feststellen, daß sie *größer als 3, und kleiner als 4 ist, aber ihr exakter Wert durch Brüche sich nur approximieren läßt.*

[22] S. besonders den ganzen I. Teil meines Buches «Anfänge etc.» 38—130.

[23] Vgl. Á. Szabó: «Der mathematische Begriff dynamis», Maia N.S. XV (1963) 219—256.

3. Ein neues Motiv der gegenwärtigen Interpretation ist auch das folgende. Wie hat die frühgriechische Mathematik jene drei Probleme gelöst, die man mit den Schlagworten bezeichnen könnte: (a) 'Mittlere Proportionale zwischen zwei beliebigen Zahlen oder Größen'; (b) 'Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat' ('tetragonismos'); (c) 'Quadratwert eines Rechtecks' ('dynamis')? Man beachte, daß alle diese drei Probleme an der mathematischen Stelle des Dialogs 'Theaitetos' zweifellos berührt werden. Man kann nun die vorige Frage, nachdem die Quellen keinen unmittelbaren Hinweis enthalten, nur mit einer *Vermutung* beantworten. Denkt man jedoch an die Platon-Stelle: *Epinomis 990 D 1—6*, so ist die Vermutung naheliegend: wohl mit Hilfe der Euklidischen Sätze: *Elem. II 5 und II 14.*[24]

4. Der vorige Punkt (3) erhärtet auch meine Ansicht in bezug auf das historische Problem: «Wie mag wohl Theodoros solche *dynameis* konstruiert haben, deren Seiten der Länge nach inkommensurabel waren?» Ich brauche wohl nicht wieder zu betonen, wie scharf ich jene Irrwege ablehne, die die gesamte frühere Forschung in der Beantwortung dieser Frage eingeschlagen hatte.[25] Denkt man an die Sätze *Elem. II 5* und *II 14*, so wird viel wahrscheinlicher jene Vermutung, wonach Theodoros zunächst *Rechtecke* (mit entsprechenden Zahl-Seiten) in flächengleiche Quadrate verwandelt hatte — *ohne Berücksichtigung der Proportionenlehre.*[26] Dann im nächsten Schritt mag sein vielbehandelter 'Beweis' für die Inkommensurabilität der betreffenden Quadratseiten einfach darin bestanden haben, daß er — unter Hinweis auf Sätze *Elem. VIII 18* und *VIII 20* — darauf aufmerksam gemacht hatte: es gibt *keine* zahlenmäßige Mittlere Proportionale zwischen den Zahl-Seiten jener Rechtecke, die eben in Quadrate verwandelt wurden.[27]

5. Und zum Schluß: die vorgelegte Interpretation erhärtet auch meinen Standpunkt in der sog. 'Theaitetos-Frage der Mathematikgeschichte'. Mit anderen Worten: auch die hier dargestellte Interpretation des terminus technicus 'tetragonizein' spricht dafür, daß die mathematische Stelle im Dialog 'Theaitetos' *nicht* als ein historischer Beleg für irgendwelche neue mathematische Erkenntnisse des jungen Theaitetos, oder auch seines Lehrers Theodoros gelten kann.[28] Allein die Tatsache, daß hier eine ganze Reihe von mathematischen Fachausdrücken — wie '*dynamis*', '*symmetros*', '*asymmetros*', '*dynamei*

[24] Der vorliegende Beitrag hängt also *unmittelbar mit meinem in Anm. 16 genannten Aufsatz zusammen.*

[25] Vgl. «Anfänge etc.» 70 ff.

[26] In diesem Punkt k o r r i g i e r e ich in der Tat meine frühere Auffassung. Denn ich dachte ja früher (z. B. «Anfänge etc.» S. 77), daß Theodoros etwa den Satz *Elem. VI 13* benutzt haben mag. Erst in der Zwischenzeit, seit dem Veröffentlichen des Buches (1969) bin ich dahintergekommen, daß der Satz *Elem. II 14* (und natürlich auch *II 5*) *zweifellos älter und altpythagoreisch sein muß.* (Dasselbe gilt *nicht unbedingt* für Elem. VI 13.) In diesem Sinne schrieb ich schon den Hermes-Aufsatz; vgl. oben Anm. 16.)

[27] S. auch «Anfänge etc.» 77—78.

[28] Es sei hier wiederholt betont: wie ich nachträglich erfuhr, hat H. CHERNISS dieselbe Tatsache *unabhängig von meinen Gedankengängen, ja auch vor mir schon erkannt.*

symmetros', '*mekei symmetros*', '*tetragonizein*' etc. — mit überraschender Selbstverständlichkeit gebraucht wird, bezeugt, daß hier nur über solche Dinge die Rede sein kann, die damals, mindestens in Fachkreisen, schon allgemein bekannt waren. Dies schließt natürlich nicht aus, daß dieselbe Platon-Stelle in historischem Sinne schon in der späteren Antike leicht mißverstanden werden konnte, und so entstand die 'Theaitetos-Legende'.[29]

Stanford, California (USA).

[29] Vgl. «Anfänge etc.» 100 ff.