MEGJEGYZÉSEK A „KÉSÉS-FÜGGVÉNNYEL" KAPCSOLATBAN

ARATÓ MÁTYÁS

Néhány éve jelent meg E. ALTENKIRCH *Verzögerungsfunktion* című ...yve [1]. Jelen megjegyzés az e könyvben tárgyalt, az alkalmazások szem...tjából figyelemreméltó tárgykör matematikai tárgyalásmódjára vonat...ik és azt egyszerűsíti, ugyanakkor felhívja a figyelmet azokra az ismert ...ményekre melyek — úgy látszik — elkerülték a könyv szerzőjének a ...elmét.

A könyv által tárgyalt probléma a következő: meghatározandó explicit ...ban az $y'(x) = -\alpha y(x-1)$ retardált differenciálegyenlet megoldása azon ...eti feltétel mellett, hogy $y(x) = 1$, ha $-1 \leq x < 0$. Ezen egyenlet $\varphi(x, \alpha)$ ...oldásából nyert $f(x, \alpha) = 1 - \varphi(x, \alpha)$ függvényt nevezi a szerző „késés-...gvénynek." Ezen függvény fellép például olyan automatikus szabályozó ...ndezéseknél, melyeknél a visszacsatolás késéssel jár. A könyv példaként ...bszorpciós hűtőgép esetét tárgyalja.

A $f(x, \alpha)$ függvényre a következő explicit kifejezés nyerhető:

$$f(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{[x]} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1}$$

...$x < 0$, az üres összegen 0 értendő). $f(x, \alpha)$ tehát n és $n+1$ között $(n+1)$-ed-...d polinom. ($n = -1, 0, 1, 2, \ldots$) A könyv matematikai függeléke fog-...ozik az

$$U(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!}$$

...ral, amelynek N-edik részletösszege, $\varphi_N(x, \alpha)$, megegyezik $\{1 - f(x, \alpha)\}$-val, ...$N - 1 \leq x < N$; ugyanis

$$\sum_{k=0}^{N} (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!} = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1} = 1 - f(x, \alpha).$$

Az $U(x, \alpha)$ sor összege — mint alább megmutatjuk — explicite kiszá-...ható, mégpedig

$$U(x, \alpha) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$

ahol b a

(1) $$b = \alpha e^b$$

transzcedens egyenlet legkisebb abszolút értékű gyöke.

Ez a tény az $f(x, \alpha)$ függvény kiszámítását nagy x értékekre rendk… megkönnyíti, mivel N nagy értékeire, mint azt meg fogjuk mutatni, $\varphi_N(x$… gyakorlatilag $U(x, \alpha)$-val vehető egyenlőnek, vagyis $f(x, \alpha)$ a $f(x, \alpha) =$… $- U(x, \alpha)$ összefüggésből határozható meg közelítőleg. Az $U(x, \alpha)$-ra… natkozó explicit képlet az említett könyv szerzőjének figyelmét elker… pedig az az összefüggés régóta ismeretes.

Legutóbb O. Perron vizsgálta [2] dolgozatában az

(2) $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{(x-n)^n}{n!}$$

speciális Bruwier-féle sor explicit alakban való előállítását és bebizonyít… hogy

(3) $$F(x) = \frac{1}{1-b} e^{-bx},$$

ahol b definíciója ugyanaz mint fentebb az (1) egyenletnél. (O. Perron … zett [2] cikkében sokkal általánosabb feladattal foglalkozik, de nekünk … erre a speciális esetre van szükségünk, mely megtalálható a Pólya—Sze… [3] könyvben is.)

Az (1) egyenlettel már L. Euler [4] is foglalkozott, s megoldása me… található a Pólya—Szegő [3] könyvben is. Általánosabb formában él… meg a (1) egyenletet Rényi A. [5] cikkében. Annak bizonyítása, ho… $|\alpha| < 1/e$ esetén a (1) egyenletnek az egységkör belsejében pontosan … gyöke van, a Rouché-tétel segítségével történhet. Ezt a gyököt α h… ványsoraként a következőképpen állíthatjuk elő:

(4) $$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} \alpha^n}{n!}.$$

(4) közvetlenül a következőképpen bizonyítható be: legyen

(5) $$b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha^n;$$

akkor Cauchy tétele szerint

$$2\pi i c_n = \oint_{(l)} \frac{b}{\alpha^{n+1}} d\alpha = -\frac{1}{n} \oint_{(l)} b \, d(\alpha^{-n}) =$$

$$= \frac{1}{n} \oint_{(l')} \alpha^{-n} db = \frac{1}{n} \oint_{(l')} \frac{e^{nb}}{b^n} db = \frac{2\pi i n^{n-1}}{n!},$$

ahol (l) az α-sík, (l') pedig a b-sík origója körüli zárt görbe.

A b értéken kívül annak minden analitikus függvényét is kifejezhetjük
nt α hatványsorát. Tekintsük a bennünket érdeklő

$$\frac{1}{1-b}\, e^{-bx} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha^n$$

ggvényt. A β_n együtthatók meghatározhatók a Bürmann—Lagrange-mula segítségével, azonban ismét közvetlenül határozzuk meg őket a auchy-tétel segítségével:

$$2\pi i\, \beta_n = \oint_{(l)} \frac{1}{1-b}\, e^{-bx} \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}} = \oint_{(l')} \frac{1}{1-b}\, e^{-bx} \frac{d(be^{-b})}{(be^{-b})^{n+1}} =$$

$$= \oint_{(\Gamma)} \frac{e^{b(n-x)}}{b^{n+1}}\, db = 2\pi i\, \frac{(n-x)^n}{n!}.$$

Ezzel a (3) összefüggést igazoltuk. Megjegyezzük, hogy a (2) sor konvergens, $|\alpha| < 1/e$, és $|\alpha| > 1/e$ esetén divergens.

Az említett könyvben tárgyalt $U(x, \alpha)$ függvény a (2) összefüggés segítségével

$$U(x, \alpha) = F(x+1) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$

explicit alakba írható. Ha ezt az explicit formulát a szerző ismerte volna, könyvében közölt tárgyalást lényegesen egyszerűríthette volna.

Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy az $U(x, \alpha)$ függvény (komplex b esetében) annak valós része is kielégíti az

$$y'(x) = -\alpha\, y(x-1)$$

retardált differenciálegyenletet.

Az $\alpha = 1/e$ és $\alpha = \pi/2$ értékek ALTENKIRCH könyvében tárgyalt „szinguláris" volta a következőképpen magyarázható: az (1) egyenletnek

a) $0 < \alpha < 1/e$ esetén van pozitív valós gyöke. Ebben az esetben (3) exponenciális függvény;

b) $1/e < \alpha < \pi/2$ esetén komplex gyöke van, melynek valós része pozitív, és így (3) egy csillapodó rezgést ír le;

c) $\alpha = \pi/2$ esetén $b = i\pi/2$, és (3) egy állandó amplitudójú hullámvonal;

d) $\alpha > \pi/2$ esetén a komplex gyök valós része negatív, és (3) egy növő amplitudójú hullámvonal.

Megemlítjük a könyv függelékében szereplő lényegesebb matematikai [illegible]seket is, anélkül, hogy a hibák felsorolásában teljességre törekednénk. A könyv 51. oldalán a

$$b = \frac{A_1}{A_0} = \frac{1 + \alpha + \dfrac{(2\alpha)^2}{2!} + \dfrac{(3\alpha)^3}{3!} + \dots}{1 + \dfrac{\alpha^2}{2!} + \dfrac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots}.$$

[illegible]ezés számlálójáról és nevezőjéről azt állítja a szerző, hogy valószínűleg konvergálnak minden negatív α-ra. Könnyen belátható, hogy mindkét összeg $\alpha < -1/e$ esetén divergens, mivel a sor tagjai nem tartanak zérushoz. Ugyanez áll az 53. oldalon szereplő

$$A_\nu = 1 + \nu\alpha + \frac{[(\nu+1)\alpha]^2}{2!} + \dots$$

kifejezésre is. A 44. oldalon a szerző nem tudja eldönteni, hogy $U(x, \alpha)$ sorfejtése $\alpha < -1/e$ esetén divergens-e, ami az eddigiek alapján nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy a könyv részletes táblázatot közöl az $f(x, \alpha)$ késési függvényre az $\alpha = k \cdot 0{,}1$ $(k = 1, 2, \dots)$ és $x = l \cdot 0{,}1$ $(l = 1, 2, \dots)$ értékekre.

Tekintettel arra, hogy az $U(x, \alpha)$ függvényre a fentiekben explicit kifejezést adtunk, azért az említett táblázatok jórésze feleslegessé válik, illetve azok kiterjeszthetők. Adott $\alpha < 1/e$ mellett csak 5 értékét kell meghatározni (4) segítségével, és akkor $U(x, \alpha)$ és ezzel együtt $f(x, \alpha)$ értékei az exponenciális függvények táblázatai segítségével megkaphatjuk.

A (2) sor maradéktagjára és ezzel $f(x, \alpha)$-nak $U(x, \alpha)$-tól való eltérésére a következő becslést nyerjük az

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-\frac{\vartheta n}{12 n}} \qquad (\text{ahol } 0 < \vartheta < 1)$$

Stirling-formula felhasználásával:

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{n!}\alpha^n\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{\vartheta n}{12 n}}}\alpha^n\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\alpha e)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{(\alpha e)^N}{1 - \alpha e} e^{-x},$$

ha $x < N$. Tehát

$$|1 - f(x, \alpha) - U(x, \alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \alpha e)} \frac{\alpha^x}{\sqrt{x}}, \tag{9}$$

$$\text{ha} \quad N - 2 \leq x \leq N - 1 \quad \text{és} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{e}.$$

Közben felhasználtuk, hogy $(1 - x/n)^n < e^{-x}$, ha $0 < x < n$. Ez nyilvánvalóan következik az $e^z < 1/(1 - z)$, ha $z < 0$ egyenlőtlenségből, amely az e^z és $1/(1 - z)$ függvények hatványsorainak összehasonlításából leolvasható.

Az itt közölt megjegyzések lényegében ki is merítik a könyvben tárgyalt matematikai problémákat.

Ezúton mondok köszönetet Rényi Alfrédnek, aki felhívta a figyelmemet erre a problémára és értékes tanácsaival is segítségemre volt.

IRODALOM

E. ALTENKIRCH: *Verzögerungsfunktion*. Taschenausgabe Verlag Technik, Berlin, 1952.

O. PERRON: „Über Bruwiersche Reihen." *Mathematische Zeitschrift* **45** (1939) 127—141.

PÓLYA GY.—SZEGŐ G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, Berlin, 1954. (I., pp. 125—126).

L. EULER: „De seria Lambertiana." *Opera Omnia* (Seria 1. Vol. 6. p. 354). Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.

RÉNYI A.: „Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **1** (1952) 105—138.

(Beérkezett: 1956. II. 11).

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О „ФУНКЦИИ ОПОЗДАНИЯ"

М. АРАТО

Резюме

Автор дает некоторые замечания о математической трактовке книги Е. Альтен-рха: *Verzögerungsfunktion* [1]. Он показывает на то, что явная форма суммы (3) ряда хорошо известна в литературе. С помощью (3) функция $U(x, \alpha)$ играющая важную ль в упомянутой книге может быть представлена в явной форме; употребляя этим том мы можем приближенно определять „функцию опоздания" $f(x, \alpha)$. Дается кже оценка для отклонения функций $U(x, \alpha)$ и $1 - f(x, \alpha)$ (см. (9)).

A NOTE ON THE „RETARDATION FUNCTION"

M. ARATÓ

Summary

The author's note refers to the mathematical discussion in E. ALTENKIRCH's ok: *Verzögerungsfunktion* [1]. It is pointed out that the explicit form (3) for the m of the series (2) is well-known in the literature. By means of (3) the function (x, α) occurring in the book mentioned above may be expressed explicitely; using s we may determine the „retardation function" $f(x, \alpha)$ approximatively. For the viation of the functions $1 - f(x, \alpha)$ and $U(x, \alpha)$ the estimation (9) is given.