6

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР

M. ARATÓ[1]

Пусть заданы на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$ две вероятностные меры $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, и обозначим $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$, если мера $\mathbf{P}_1$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}_2$. Если последовательность σ-алгебр $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$ такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$ и $\mathbf{P}_i^n (i = 1, 2;\ n = 1, 2, 3 \ldots)$ обозначает меру $\mathbf{P}_i$ на $\mathfrak{A}_n$, то $\{p_n(\omega), \mathfrak{A}_n\}$ образует мартингал в пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_2\}$, где $p_n(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}_1^n(d\,\omega)}{\mathbf{P}_2^n(d\,\omega)}$, при предположении $\mathbf{P}_1^n \ll \mathbf{P}_2^n (n = 1, 2, \ldots)$. Хороши известно (см. например *CH.* STRIEBEL [1]), что $p_n(\omega) \to p(\omega)$ почти всюду по мере $\mathbf{P}_2$, и мера $\mathbf{P}_1$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}_2$, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2} |p_n(\omega) - p(\omega)| = 0 \tag{1}$$

(где $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}$ обозначает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_2$), и в этом случае $p(\omega) = \dfrac{\mathbf{P}_1(d\,\omega)}{\mathbf{P}_2(d\,\omega)}$.

В том частном случае, когда $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \ldots \times \mathfrak{L}_n$ и $\mathbf{P}_i^n = \overline{\mathbf{P}}_1^i \times \overline{\mathbf{P}}_i^2 \times \ldots \times \overline{\mathbf{P}}_i^n \,(i = 1, 2)$, где $\overline{\mathbf{P}}_i^k \,(i = 1, 2)$ обозначает меру $\mathbf{P}_i$ на $\mathfrak{L}_k$ и назовем этот случай прямыми произведениями мер, известна теорема KAKUTANI [2], что $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2} \left(\sqrt{p_n(\omega)}\right) > 0\,. \tag{2}$$

J. HÁJEK [3] доказал, что если выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_1} \log p_n(\omega) < \infty\,, \tag{3}$$

то $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$.

---

[1] Москва.

В недавней статье P. Révész [4] доказал, что $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$, если $\mathbf{P}_2^n = \overline{\mathbf{P}}_2^1 \times \ldots \times \overline{\mathbf{P}}_2^n$, $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{L}_1 \times \ldots \times \mathfrak{L}_n$, и выполняется условие

$$\left| \frac{\mathbf{P}_1^n(A)}{\mathbf{P}_1^{n-1} \times \overline{\mathbf{P}}_2^n(A)} - 1 \right| < \delta_n \text{ (для } A \in \mathfrak{A}_n \text{ равномерно)}, \tag{4}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < \infty . \tag{5}$$

(В статье Révész-а вместо $\overline{\mathbf{P}}_2^n$ используется $\overline{\mathbf{P}}_1^n$, но доказательство его без изменения переносится на этот случай.)

В этой заметке я хочу показать эквивалентность условия (1) и (2) при условии теоремы Kakutani, и доказать теорему Révész-а, кроме того показать примеры, в которых имеет место абсолютно непрерывность, но не выполняется условия Hájek и Révész-а.

1. Из неравенств

$$\int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\,\omega) \leqq \int |p_n(\omega) - p_m(\omega)| \, \mathbf{P}_2(d\,\omega)$$

и (по неравенству Коши-Буняковского)

$$\int |p_n(\omega) - p_m(\omega)| \, \mathbf{P}_2(d\,\omega) = \int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right| \left| \sqrt{p_n(\omega)} + \sqrt{p_m(\omega)} \right| \mathbf{P}_2(d\,\omega) \leqq$$
$$\leqq 2 \int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\,\omega)$$

следует, что $p_n(\omega)$ сходится в среднем тогда и только тогда, когда $\sqrt{p_n(\omega)}$ сходится в среднем квадратичном. Используя, что $\prod_{k=1}^{\infty} a_k < 0$ $(0 < a_n \leqq 1)$ тогда и только тогда, когда $\prod_{k=n+1}^{m} a_k \to 1$, при $n, m \to \infty$, и

$$\int \left| \sqrt{p_m(\omega)} - \sqrt{p_n(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\,\omega) = \int \left| \prod_{k=n+1}^{m} \sqrt{\overline{p}_k(\omega)} - 1 \right|^2 p_n(\omega) \, \mathbf{P}_2(d\,\omega) =$$
$$= \int \left| \prod_{k=n+1}^{m} \sqrt{\overline{p}_k(\omega)} - 1 \right|^2 \mathbf{P}_2(d\,\omega) = 2 - 2 \int \prod_{k=n+1}^{m} \sqrt{\overline{p}_k(\omega)} \, \mathbf{P}_2(d\,\omega)$$

$\left(\text{где } \overline{p}_k(\omega) = \dfrac{\overline{\mathbf{P}}_1^k(d\,\omega)}{\overline{\mathbf{P}}_2^k(d\,\omega)}\right)$ следует, что при условии теоремы Kakutani $\sqrt{p_n(\omega)}$ сходится в среднем квадратичном, т. е. в среднем сходится $p_n(\omega)$. Наоборот, если $p_n(\omega)$ сходится в среднем, то $\sqrt{p_n(\omega)}$ в среднем квадратичном и второй член последнего равенства стремится к 0, т. е. выполняется условие (2).

2. Теорема RÉVÉSZ-а следует из следующего ряда равенств и неравенств

$$\left(\int |p_m(\omega) - p_n(\omega)|\, \mathbf{P}_2(d\,\omega)\right)^2 = \left(\int \left|\frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)} - 1\right| p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega)\right)^2 \leqq$$

$$\leqq \int \left|\frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)} - 1\right|^2 p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) = \int \left(\frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)}\right)^2 p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) - 1 \leqq$$

$$\leqq \prod_{j=n+1}^{m} (1 + \delta_j^2) - 1 .$$

Последнее неравенство доказывается следующим образом:

$$\int \frac{p_m^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) = \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} \left(\frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1 + 1\right)^2 p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) =$$

$$= \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} \left[\left(\frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1\right)^2 + 1\right] p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) \leqq$$

$$\leqq (1 + \delta_m^2) \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} p_n(\omega)\, \mathbf{P}_2(d\,\omega) \leqq (1 + \delta_{n+1}^2) \ldots (1 + \delta_m^2) .$$

Мы использовали, что

$$\int \frac{p_{m-1}^2}{p_n^2} (p_m - p_{m-1}) \frac{p_n}{p_{m-1}} \mathbf{P}_2(d\,\omega) = 0$$

и по условии (4)

$$\left(\frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1\right)^2 \leqq \delta_m^2 .$$

Таким образом, $p_n(\omega)$ сходится в среднем и поэтому $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ по условии (1).

3. Легко показать, что, если независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимают значения 0, 1 с вероятностью α_n, $1 - \alpha_n$ по мере $\mathbf{P}_1$ и β_n, $1 - \beta_n$ о мере $\mathbf{P}_2$, то условие (2) равносильно тому, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\beta_n})^2 + (\sqrt{1-\alpha_n} - \sqrt{1-\beta_n})^2\right\} < \infty . \tag{6}$$

В том случае, когда

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$$

выполняется условие (6), но (3) нет. В том случае, когда

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} + \frac{1}{n^{\delta}}\right)^2, \quad \beta_n = \frac{1}{n^{2\delta}} \quad (\varepsilon > 0,\ \delta > 1/2,\ \delta - \varepsilon > 1/4)$$

выполняется условие (6), но (5) нет.

(Поступила: 25 августа 1960 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] STRIEBEL, CH.: "Densities for stochastic processes." *Annals of Mathematical Statistics* **30** (1950) 559—567.
[2] KAKUTANI, S.: "On equivalence of infinite product measures." *Annals of Mathematical Statistics* **49** (1948) 214—224.
[3] HÁJEK, J.: "A property of I-divergence of marginal probability distributions." *Чехословацкий Математический Журнал* **8** (1958) 460—464.
[4] RÉVÉSZ, P.: „A limit distribution theorem for sums of dependent random variables." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 125—131.

SOME REMARKS ON THE ABSOLUTE CONTINUITY OF MEASURES

by

M. ARATÓ

Abstract

The following question was considered already by many authors: Let $(\Omega, \mathfrak{A})$ be a measurable set, let $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$ denote a sequence of σ-algebras such that

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}\,.$$

Let be defined two sequences $\mathbf{P}_i^{(1)}, \mathbf{P}_i^{(2)}, \ldots$ $(i=1, 2)$ of probability measurse on the σ-algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ resp. and two probability measures $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ on $\mathfrak{A}$. We assume, that the sequences

$$\mathbf{P}_i^{(1)}, \mathbf{P}_i^{(2)}, \ldots, \qquad (i = 1, 2)$$

are compatible, and

$$\mathbf{P}_1^{(n)} \ll \mathbf{P}_2^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

We may ask: under what conditions does

$$\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$$

hold.

The aim of this paper is to consider the connections between the different results on this question.