[17] B. Brown and N. H. McCoy, Amer. J. Math. 69 (1947), 46.
[18] V. A. Andrunakievič, Mat. Sb. (N. S.) 39 (81) (1956), 447.

Translated by:
J. J. Sember

ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF A STATIONARY GAUSSIAN MARKOV PROCESS

M. ARATO

1. A continuous parameter stationary Gaussian Markov process is determined by three parameters μ, σ^2, λ:

$$\mu = \mathrm{M}\,\xi(t), \quad \sigma^2 = \mathrm{M}\,[\xi(t) - \mu]^2,$$
$$\mathrm{M}\,(\xi(t+\tau) - \mu)\,(\xi(t) - \mu) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|).$$

We shall consider the problem of estimating these parameters by means of a realization of the process on the segment $0 \leqslant t \leqslant T$. Of course the three parameters may be chosen in different ways. It is essential, however, that the parameter $a = 2\lambda\sigma^2$, interpreted as a "diffusion coefficient" $\mathrm{M}\,(d\xi)^2 = a \cdot dt$, be determined by exactly one realization (see for example [1]), so that our problem is essentially that of estimating two parameters. The case where μ is known is considered in [2].

We introduce the statistics

$$m_1 = {}^1/_2\,[\xi(0) + \xi(T)], \quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt, \quad m = \frac{m_1 + \varkappa m_2}{1+\varkappa}, \quad \varkappa = \lambda T,$$
$$s_{01}^2 = {}^1/_2\,\{[\xi(0) - \mu]^2 + [\xi(T) - \mu]^2\},$$
$$s_1^2 = {}^1/_2\,\{[\xi(0) - m_1]^2 + [\xi(T) - m_1]^2\} = {}^1/_4\,[\xi(T) - \xi(0)]^2,$$
$$s_{02}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t) - \mu]^2\,dt,$$
$$s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t) - m_2]^2\,dt.$$

We see that the four statistics m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 form a natural set of sufficient statistics for our problem. In the case where the value of the parameter μ is known, the set of two parameters s_{01}^2, s_{02}^2 is a natural set. Finally, in the case where σ^2 is known, the weighted mean m is a sufficient statistic. This case is elementary and well known: the ratio

$$\frac{m - \mu}{\sigma_1}, \quad \text{where } \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2(1+\kappa)^2}\,(4\kappa + 1 + e^{-\kappa}), \tag{1}$$

is (0, 1)-normally distributed.

The transformation

$$t = t'T, \quad \xi = \xi'\sqrt{Ta}$$

reduces the general problem to the case

$$T = 1, \quad a = 1. \tag{2}$$

Here $\lambda' = \lambda T = \kappa$, i.e., to within a choice of scales, the distribution of realizations of the process which is of interest to us, is characterized, for known μ, by the unique parameter κ. In §§2 and 3 we assume that a reduction to case (2) has already taken place and in place of λ, we write κ. Here $\sigma^2 = 1/2\kappa$.

2. The space of realizations R_ξ $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, may be considered as a product of lines $\xi(t)$ on the space of realizations of the process $\eta(t) = \xi(t) - \xi(0)$.

We introduce a measure $V = L \times W$ in the space R_ξ, where L is ordinary Lebesgue measure on the line and W is the well-known conditional measure of Wiener [1]. Then [2] the distribution P of the process ξ in the space R_ξ is absolutely continuous with respect to V and is given by the density

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \exp\left\{ -\kappa \left[s_{01}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa s_{02}^2 \right] \right\}. \tag{3}$$

Formula (3) shows that the statistics s_{01}^2 and s_{02}^2 form a sufficient set of statistics in the case where μ is known. Since

$$\log \frac{dP}{dV} = C + \frac{1}{2}\log\kappa - (s_{01}^2 - \frac{1}{2})\kappa - \frac{1}{2}\kappa^2 s_{02}^2,$$

then the maximum likelihood equation has the form

$$\frac{1}{2\kappa} - (s_{01}^2 - \frac{1}{2}) - \kappa s_{02}^2 = 0,$$

i.e.,

$$\sigma^4 - 2d\sigma^2 - \frac{1}{2}s_{02}^2 = 0, \quad d = \frac{1}{2}s_{01}^2 - \frac{1}{4}. \tag{4}$$

It is easy to verify that equation (4) always has a unique positive solution

$$\hat{\sigma}^2 = d + \sqrt{d^2 + s_{02}^2 \cdot \frac{1}{2}}. \tag{5}$$

It is not hard to show that, for $\kappa \to \infty$, the estimate $\hat{\sigma}^2$ is asymptotically normal and equivalent to the estimate s_{02}^2.

Theorem 1. *For known μ and $\kappa \to \infty$, the estimate*

$$\sigma^2 \sim s_{02}^2$$

is asymptotically effective and the distribution of the ratio

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma^2}{s_{02}^2/\sqrt{\kappa/2}} \tag{6}$$

tends to a (0, 1)*-normal.*

For $\kappa \to 0$, the statistics s_{01}^2 and s_{02}^2 are asymptotically equivalent so that we may restrict any of these. The distribution of the ratio

$$\frac{s_{02}^2}{\sigma^2}$$

tends to the χ^2 distribution with one degree of freedom as $\kappa \to 0$:

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{s_{02}^2}{\sigma^2} < t^2 \right\} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2}\, du. \tag{7}$$

For the mean value κ, the question of the use of the statistics s_{01}^2 and s_{02}^2 is more complicated. It is not considered in detail in [2]. It is conceivable that the single statistic s_{02}^2 may be used without a very great loss of information. A probable hypothesis seems: for any α, $0 < \alpha < 1$, and any $\sigma^2 > 0$, the equation $P(\hat{\sigma}^2 > y|\sigma^2) = \alpha$ has a unique solution $y = \phi(\sigma^2)$. If this is so, then the inverse function $\sigma^2 = \phi_\alpha^{-1}(y)$ is also uniquely determined and gives the confidence limit $\sigma_\alpha^2 = \phi_\alpha^{-1}(\hat{\sigma})$ satisfying the condition

$$P\{\sigma^2 \leq \sigma_\alpha^2 | \sigma^2\} = \alpha \text{ for any } \sigma^2. \tag{8}$$

For $\kappa \to \infty$ and $\kappa \to 0$, this confidence limit passes to a confidence limit given by an asymptotic approach.

3. Formula (3) is easily transformed to the following form:

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \exp\left\{-\kappa[s_1^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa s_2^2 + (\mu - m_1)^2 + \frac{1}{2}\kappa(\mu - m_2)^2]\right\}. \tag{9}$$

Formula (9) shows that the set of four statistics m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 is a sufficient set. The solution of the maximum likelihood equation here is complicated. We note only that the maximum likelihood estimate is connected with the relation

$$\hat{\mu} = \frac{2m_1 + \hat{\kappa} m_2}{2 + \hat{\kappa}}. \tag{10}$$

In estimating σ^2 (or κ), it is natural to limit oneself to statistics independent of the initial value on the axis. A sufficient set of such statistics may, for example, consist of the three statistics s_1^2, s_2^2, $(m_1 - m_2)^2$. The case of large κ does not present any difficulty since we have:

Theorem 2. *For $\kappa \to \infty$, the estimates*

$$\mu \sim m_2, \quad \sigma^2 \sim s_2^2$$

are jointly asymptotically effective, and the distributions of the ratios

$$\frac{m_2 - \mu}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma^2}{s_2^2\sqrt{2/\kappa}} \tag{11}$$

tend to a $\left(0, 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$*-normal distribution.*

For $\kappa \to 0$, the statistics m_1 and m_2 are asymptotically equivalent and the pair of statistics s_1^2 and s_2^2 are asymptotically independent of the parameters and of the statistics m_1 and m_2. This reduces to almost complete indefiniteness of the parameter a and to the impossibility of estimating the parameter κ from below (i.e., the parameter σ^2 from above).

Theorem 3. *Let $\alpha > 1/2$ and let $\underline{\mu}(\xi)$, $\overline{\mu}(\xi)$ be real-valued (including the values $\pm\infty$) functionals in R_ξ, continuous* in the metric of $C_{[0,1]}$ and satisfying the conditions*

$$P\{\mu \geq \underline{\mu}(\xi)\} \geq \alpha, \quad P\{\mu \leq \overline{\mu}(\xi)\} \geq \alpha$$

for all μ and κ.

Then

$$P\{\underline{\mu}(\xi) = -\infty\} \geq f(\kappa, \alpha), \quad P\{\overline{\mu}(\xi) = +\infty\} \geq f(\kappa, \alpha),$$

where the positive function f is independent of the choice of the functionals and

---

*Continuity for functionals taking infinite values is meant as continuity induced by the topology on the extended line, augmented by the points $\pm\infty$. $\underline{\mu}(\infty) > -\infty$, $\overline{\mu}(-\infty) < \infty$.

$$f(\kappa, \alpha) \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ for } \kappa \longrightarrow 0.$$

Theorem 4. *Let $\alpha > 0$ and let $\kappa(\xi)$ be a non-negative functional in R_ξ, continuous in the $C_{[0,1]}$ metric and satisfying the condition*

$$\mathrm{P}\{\kappa \geq \underline{\kappa}(\xi)\} \geq \alpha$$

for all μ and κ.

Then

$$\mathrm{P}\{\underline{\kappa}(\xi) = 0\} \geq g(\kappa, \alpha),$$

where the positive function g is independent of the choice of the functional and

$$g(\kappa, \alpha) \longrightarrow 1 \text{ for } \kappa \longrightarrow 0.$$

It is natural that the functions f and g tend to zero as $\kappa \longrightarrow \infty$ for any fixed $\alpha < 1$. This follows from the possibility of obtaining an asymptotically correct confidence limit for the parameters corresponding to Theorem 2.

We intend to return later to a method of constructing confidence limits for μ and $\kappa(\sigma^2)$ which involve no restrictions on the value of the parameter κ. The method of obtaining them is analogous to the method presented in §2 of constructing confidence limits for $\sigma^2(\kappa)$ when μ is known. But in the case of two unknown parameters, this construction naturally leads to the peculiarities noted in Theorems 3 and 4.

4. For applications it is convenient to return to the case of arbitrary T and a. We cite an example of such a formulation related to the problem of estimating the parameters μ and λ. This evidently is a consequence of Theorem 2 (the change of parameter from σ^2 to λ presents no difficulties).

Theorem 5. *For $\kappa = \lambda T \longrightarrow \infty$, the estimates*

$$\mu \sim m_2, \quad \lambda \sim b = \frac{a}{2s_2^2}$$

are jointly effective and the distribution of the ratios

$$\frac{m_2 - \mu}{\sqrt{2\sigma^2/\lambda T}}, \quad \frac{b - \lambda}{\sqrt{2\lambda/T}}$$

tend to a $\left(0, 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$*-normal distribution.*

5. In conclusion we note that our problem is closely connected with the problem of estimating the parameters of a Gaussian Markov process with discrete parameter. For such a process, let

$$\mathrm{M}\xi_n = \mu, \quad \mathrm{M}(\xi_n - \mu)^2 = \sigma^2, \quad \mathrm{M}(\xi_{n+1} - \mu)(\xi_n - \mu) = \sigma^2 \rho.$$

The five quantities (see [3])

$$m_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_N), \quad m_2 = \frac{1}{N}\sum_1^N \xi_n,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{4}(\xi_N - \xi_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N (\xi_n - m_2)^2,$$

$$R = \sum_1^{N-1} (\xi_{n+1} - m_2)(\xi_n - m_2),$$

are sufficient statistics for the three parameters μ, σ^2, ρ.

The passage to the limit to our problem is accomplished for $N \to \infty$, $\rho \to 1$. Here $\kappa = N(1-\rho^2)$ goes into the parameter κ of our problem. In this way we may hope to complete Luvsanceren's investigation [4].

I wish to thank A. N. Kolmogorov and Ja. G. Sinaĭ for their attention and help.

Moscow State University Received 20/FEB/62

BIBLIOGRAPHY

[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York, 1953.

[2] C. T. Striebel, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 559–567.

[3] Ju. V. Linnik, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 14 (1950), 501–522.

[4] Š. Luvsanceren, Dokl. Akad. Nauk SSSR 98 (1954), 723–726.

Translated by:
Eizo Nishiura

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES

E. A. BREDIHINA

1. Let $W^{(r)}$ be the class of all functions bounded in $(-\infty, \infty)$ that possess on the whole number axis a bounded derivative of order r; let $P^{(r)}$ and $P^{(r)}_{2\pi}$, respectively, be the classes of all periodic and of all 2π-periodic functions from $W^{(r)}$. We shall count the uniform almost periodic function $f(x)$ as belonging to the class A_s if $N_f(x, x+1) = O(1)$, where $N_f(x, x+1)$ is the number of Fourier exponents of the function $f(x)$ in the interval $(x, x+1)$. (The structural characteristic of the class A_s is given in [5].) Denote the intersection of the classes $W^{(r)}$ and A_s by $W^{(r)}_s$. It is obvious that $W^{(r)}_s \supset P^{(r)}_2$.

Let us put

$$C_{\sigma,r}(f) = \operatorname*{Inf}_{g_\sigma(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\operatorname*{Sup}_x |f^{(k)}(x) - g^{(k)}_\sigma(x)|}{E_\sigma(f^{(x)})},$$

where $g_\sigma(x)$ is an entire function of degree $\leq \sigma$ and $E_\sigma(f) = \operatorname*{Inf}_{g_\sigma(x)} \operatorname*{Sup}_x |f(x) - g_\sigma(x)|$;

$$C^*_{n,r}(f) = \operatorname*{Inf}_{T_n(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\operatorname*{Sup}_x |f^{(k)}(x) - T^{(k)}_n(x)|}{E^*_n(f^{(k)})},$$

where $T_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$ and $E^*_n(f) = \operatorname*{Inf}_{T_n(x)} \operatorname*{Sup}_x |f(x) - T_n(x)|$.

Let

$$C_{\sigma,r}(W^{(r)}) = \operatorname*{Sup}_{f \in W^{(r)}} C_{\sigma,r}(f);$$

the quantities $C_{\sigma,r}(W^{(r)}_s)$, $C_{\sigma,r}(P^{(r)})$, $C^*_{n,r}(P^{(r)}_{2\pi})$ are defined in a similar manner.

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 145, № 1

МАТЕМАТИКА

М. АРАТО

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 II 1962)

§ 1. Стационарный гауссовский марковский процесс с непрерывным временем определяется тремя параметрами μ, σ^2, λ:

$$\mu = \mathbf{M}\xi(t), \quad \sigma^2 = \mathbf{M}[\xi(t) - \mu]^2,$$
$$\mathbf{M}(\xi(t+\tau) - \mu)(\xi(t) - \mu) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|).$$

Мы будем рассматривать задачу оценки этих параметров по реализации процесса на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Естественно, что выбор трех параметров можно производить различными способами. Существенно, однако, что параметр $a = 2\lambda\sigma^2$, имеющий смысл «коэффициента диффузии» $\mathbf{M}(d\xi)^2 = a\,dt$, определяется по единичной реализации точно (см., например, (1)), так что по существу наша задача заключается в оценке двух параметров. Случай известного μ рассмотрен в (2).

Введем статистики

$$m_1 = {}^1/_2\,[\xi(0) + \xi(T)], \quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt, \quad m = \frac{m_1 + \varkappa m_2}{1+\varkappa}, \quad \varkappa = \lambda T,$$
$$s_{01}^2 = {}^1/_2\{[\xi(0) - \mu]^2 + [\xi(T) - \mu]^2\},$$
$$s_1^2 = {}^1/_2\{[\xi(0) - m_1]^2 + [\xi(T) - m_1]^2\} = {}^1/_4\,[\xi(T) - \xi(0)]^2,$$
$$s_{02}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t) - \mu]^2\,dt,$$
$$s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t) - m_2]^2\,dt.$$

Мы увидим, что четыре статистики m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 образуют естественный достаточный набор статистик нашей задачи. В случае известного значения параметра μ таким естественным набором является совокупность двух статистик s_{01}^2, s_{02}^2. Наконец, в случае известного σ^2 достаточной статистикой является взвешенное среднее m. Этот случай элементарен и хорошо известен: отношение

$$\frac{m-\mu}{\sigma_1}, \quad \text{где} \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2(1+\varkappa)^2}(4\varkappa + 1 + e^{-\varkappa}), \tag{1}$$

имеет (0,1)-нормальное распределение.

Преобразование

$$t = t'T, \quad \xi = \xi'\sqrt{Ta}$$

приводит общую задачу к случаю

$$T = 1, \; a = 1. \tag{2}$$

При этом $\lambda' = \lambda T = \varkappa$, т. е. с точностью до выбора масштабов распределение интересующих нас реализаций процесса характеризуется при известном μ единственным параметром $\varkappa$. В §§ 2 и 3 мы предполагаем, что приведение к случаю (2) уже сделано и вместо λ пишем $\varkappa$. При этом $\sigma^2 = 1/2\varkappa$.

§ 2. Пространство реализаций R_ξ $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, можно рассматривать как произведение числовой прямой $\xi(0)$ на пространство реализаций процесса $\eta(t) = \xi(t) - \xi(0)$.

Введем в пространстве R_ξ меру $V = L \times W$, где L — обычная лебеговская мера на прямой, а W — хорошо известная условная мера Винера ([1]). Тогда ([2]) распределение P процесса ξ в пространстве R_ξ абсолютно непрерывно относительно V и дается плотностью.

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp\left\{-\varkappa\left[s_{01}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varkappa s_{02}^2\right]\right\}. \tag{3}$$

Формула (3) и показывает, что в случае известного μ статистики s_{01}^2 и s_{02}^2 образуют достаточный набор статистик. Так как

$$\log\frac{dP}{dV} = C + {}^1/_2 \log\varkappa - (s_{01}^2 - {}^1/_2)\varkappa - {}^1/_2\,\varkappa^2 s_{02}^2,$$

то уравнение наибольшего правдоподобия имеет вид

$$\frac{1}{2\varkappa} - (s_{01}^2 - {}^1/_2) - \varkappa s_{02}^2 = 0,$$

т. е.

$$\sigma^4 - 2d\sigma^2 - {}^1/_2\, s_{02}^2 = 0, \quad d = {}^1/_2\, s_{01}^2 - {}^1/_4. \tag{4}$$

Легко проверить, что уравнение (4) всегда имеет единственное положительное решение

$$\hat{\sigma}^2 = d + \sqrt{d^2 + s_{02}^2 \cdot {}^1/_2}\,. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что при $\varkappa \to \infty$ оценка $\hat{\sigma}^2$ асимптотически нормальная и эквивалентна оценке s_{02}^2.

Теорема 1. *При известном* μ *и* $\varkappa \to \infty$ *оценка*

$$\sigma^2 \sim s_{02}^2$$

асимптотически эффективна и распределение отношения

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma^2}{s_{02}^2/\sqrt{\varkappa/2}} \tag{6}$$

стремится к (0,1)-*нормальному*.

При $\varkappa \to 0$ статистики s_{01}^2 и s_{02}^2 асимптотически эквивалентны, так что можно ограничиться любой из них. Распределение отношения

$$\frac{s_{02}^2}{\sigma^2}$$

при $\varkappa \to 0$ стремится к распределению χ^2 с одной степенью свободы:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{s_{02}^2}{\sigma^2} < t^2\right\} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2} du. \tag{7}$$

При средних значениях $\varkappa$ вопрос об использовании статистик s_{01}^2 и s_{02}^2 более сложен. В ([2]) он подробно не рассмотрен. Можно думать, что без очень большой потери информации можно пользоваться одной статистикой s_{02}^2. Нам кажется вероятной гипотеза: при любой α, $0 < \alpha < 1$, и любом $\sigma^2 > 0$ уравнение $\mathbf{P}(\hat{\sigma}^2 > y|\sigma^2) = \alpha$ имеет единственное решение $y = \varphi(\sigma^2)$. Если это так, то обратная функция $\sigma^2 = \varphi_\alpha^{-1}(y)$ тоже определена однозначно и доставляет доверительную границу $\sigma_\alpha^2 = \varphi_\alpha^{-1}(\hat{\sigma})$, удовлетворяющую условию

$$\mathbf{P}\{\sigma^2 \leqslant \sigma_\alpha^2 \mid \sigma^2\} = \alpha \quad \text{при любом } \sigma^2. \tag{8}$$

При $\varkappa \to \infty$ и при $\varkappa \to 0$ эта доверительная граница перейдет в доверительную границу, доставляемую асимптотическим подходом.

§ 3. Формула (3) легко преобразуется следующим образом:

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp\{-\varkappa\,[s_1^2 - {}^1/_2 + {}^1/_2\ \varkappa s_2^2 + (\mu - m_1)^2 + {}^1/_2\,\varkappa\,(\mu - m_2)^2]\}. \tag{9}$$

Формула (9) показывает, что набор четырех статистик m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 является достаточным набором. Решение уравнений наибольшего правдоподобия здесь сложнее. Отметим лишь, что оценки наибольшего правдоподобия связаны соотношением

$$\hat{\mu} = \frac{2m_1 + \hat{\varkappa} m_2}{2 + \hat{\varkappa}}. \tag{10}$$

При оценке σ^2 (или $\varkappa$) естественно ограничиваться статистиками, не зависящими от начала отсчета на оси ξ. Достаточный набор таких статистик можно составить, например, из трех статистик s_1^2, s_2^2, $(m_1 - m_2)^2$. Случай больших $\varkappa$ не представляет затруднений, так как имеет место:

Т е о р е м а 2. *При* $\varkappa \to \infty$ *оценки*

$$\mu \sim m_2, \quad \sigma^2 \sim s_2^2$$

совместно асимптотически эффективны, а распределение отношений

$$\frac{m_2 - \mu}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma^2}{s_2^2\sqrt{2/\varkappa}} \tag{11}$$

стремится к $\left(0, 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$*-нормальному.*

При $\varkappa \to 0$ статистики m_1 и m_2 асимптотически эквивалентны, а пара статистик s_1^2 и s_2^2 асимптотически независима от параметров и от статистик m_1 и m_2. Это приводит к почти полной неопределенности параметра a и к невозможности оценить параметр $\varkappa$ снизу (т. е. параметр σ^2 сверху).

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\alpha > {}^1/_2$ *и* $\underline{\mu}(\xi)$, $\bar{\mu}(\xi)$ — *действительные, или равные* $-\infty$, *или* $+\infty$, *непрерывные в метрике* $C_{[0,1]}$* *функционалы в пространстве* R_ξ, *удовлетворяющие при всех* μ *и* $\varkappa$ *условиям*

$$\mathbf{P}\{\mu \geqslant \underline{\mu}(\xi)\} \geqslant \alpha, \quad \mathbf{P}\{\mu \leqslant \bar{\mu}(\xi)\} \geqslant \alpha.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\underline{\mu}(\xi) = -\infty\} \geqslant f(\varkappa, \alpha), \quad \mathbf{P}\{\bar{\mu}(\xi) = +\infty\} \geqslant f(\varkappa, \alpha),$$

где положительная функция f *не зависит от выбора функционалов и*

$$f(\varkappa, \alpha) \to {}^1/_2 \text{ при } \varkappa \to 0.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\underline{\varkappa}(\xi)$ — *неотрицательный непрерывный в метрике* $C_{[0,1]}$ *функционал в пространстве* R_ξ, *удовлетворяющий при всех* μ *и* $\varkappa$ *условию*

$$\mathbf{P}\{\varkappa \geqslant \underline{\varkappa}(\xi)\} \geqslant \alpha.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\underline{\varkappa}(\xi) = 0\} \geqslant g(\varkappa, \alpha),$$

где положительная функция g *не зависит от выбора функционала и*

$$g(\varkappa, \alpha) \to 1 \text{ при } \varkappa \to 0.$$

---

* Непрерывность для функционалов, принимающих бесконечные значения, понимается как непрерывность, индуцированная топологией на расширенной прямой, пополненной точками $\pm\infty$. $\underline{\mu}(\infty) > -\infty$, $\bar{\mu}(-\infty) < \infty$.

Естественно, что при $\varkappa \to \infty$ функции f и g при любом фиксированном $\alpha < 1$ стремятся к нулю. Это вытекает из возможности получить асимптотически правильные доверительные границы для параметров в соответствии с теоремой 2.

Мы рассчитываем впоследствии вернуться к способам построения доверительных границ для μ и $\varkappa$ (σ^2), пригодных без всяких ограничений на значения параметра $\varkappa$. Метод их получения аналогичен изложенному в § 2 способу построения доверительных границ для σ^2 $(\varkappa)$ при известном μ. Но в случае двух неизвестных параметров это построение, естественно, приводит к особенностям, отмеченным в теоремах 3 и 4.

§ 4. Для применений удобно вернуться к случаю произвольных T и a. Приведем пример такой формулировки, отнесенный к вопросу об оценке параметров μ и λ. Это очевидное следствие теоремы 2 (переход от параметра σ^2 к λ не представляет затруднений).

Теорема 5. *При $\varkappa = \lambda T \to \infty$ оценки*

$$\mu \sim m_2, \quad \lambda \sim b = \frac{a}{2s_2^2}$$

совместно асимптотически эффективны, а распределение отношений

$$\frac{m_2 - \mu}{\sqrt{2\sigma^2/\lambda T}}, \quad \frac{b-\lambda}{\sqrt{2\lambda/T}}$$

стремится к $\left(0,\ 0;\ \left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\right)$*-нормальному.*

5. В заключение заметим, что наша задача тесно связана с задачей оценки параметров гауссовского марковского процесса с дискретным временем. Пусть для такого процесса

$$\mathbf{M}\xi_n = \mu, \quad \mathbf{M}(\xi_n - \mu)^2 = \sigma^2, \quad \mathbf{M}(\xi_{n+1} - \mu)(\xi_n - \mu) = \sigma^2\rho.$$

Параметров теперь три: μ, σ^2 и ρ, достаточных статистик — пять (см. ([3]))

$$m_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_N), \quad m_2 = \frac{1}{N}\sum_1^N \xi_n,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{4}(\xi_N - \xi_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N (\xi_n - m_2)^2,$$

$$R = \sum_1^{N-1} (\xi_{n+1} - m_2)(\xi_n - m_2).$$

Предельный переход к нашей задаче осуществляется при $N \to \infty$, $\rho \to 1$. При этом $\varkappa = N(1-\rho^2)$ переходит в параметр $\varkappa$ нашей задачи. На этом пути можно надеяться получить завершение исследований Лувсанцерена ([4]).

Выражаю благодарность моему руководителю акад. А. Н. Колмогорову и Я. Г. Синаю за внимание и помощь.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 II 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956. [2] Ch. T. Striebel, Ann. Math. Statistics, **30**, № 2, 559 (1959). [3] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 6, 501 (1950). [4] Ш. Лувсанцерен, ДАН, **98**, № 5, 723 (1954).