

TETŐPONTJÁBAN SUGÁRIRÁNYÚ KONCENTRÁLT ERŐVEL TERHELT HETEROGÉN ANYAGÚ SÍKGÖRBE RÚD REZGÉSEI

Kiss László Péter¹, Szeidl György²

¹Doktorandusz, ²Professor Emeritus, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros,
e-mail:¹mechkiss@uni-miskolc.hu, ²gyorgy.szeidl@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A cikk heterogén anyagú síkgörbe rudak rezgéseit vizsgálja, feltéve, hogy a teher merev és merőleges a középvonalra. Feltételezzük, hogy (a) a görbületi sugár állandó, (b) a rugalmassági modulus és a Poisson szám csak a keresztmetszeti koordináták függvénye. Célkitűzéseink: (1) a vonatkozó Green-féle függvénymátrixok előállítására csuklós meg támasztású rúdra, amennyiben a rúd terhelése sugárirányú koncentrált erő, (2) annak tisztázására, hogyan hat a terhelés a sajátfrekvenciákra, (3) olyan numerikus modell kidolgozása, amely lehetővé teszi a sajátfrekvenciák számítását a terhelés függvényében. A számítási eredményeket grafikus formában kívánjuk megjeleníteni.

Kulcsszavak: síkgörbe rúd, heterogén anyag, sajátfrekvencia a terhelés függvényében, Green-féle függvénymátrix

Abstract

This paper is concerned with the vibrations of heterogeneous curved beams under the assumption that the load on the beam is a dead one which is perpendicular to the centerline. It is assumed that (a) the radius of curvature is constant and (b) the Young modulus and Poisson number depend on the cross sectional coordinates only. We have the following objectives: (1) to determine the Green function matrices for pinned-pinned beams provided that the beam is subjected to a radial load; (2) to clarify how the load affects the natural frequencies if the beam is subjected to a radial force (a vertical force) at the crown point; (3) to develop such a numerical model which makes it possible to determine how the natural frequencies are related to the load. We shall present the computational results in a graphical format.

Keywords: curved beam, heterogenous material, natural frequency as a function of the load, Green function matrix

1. Bevezetés

Napjainkban igen gyakori a görbült középvonalú rudak mérnöki alkalmazása. Gondoljunk például az ívelt kialakítású hídszerkezetekre, egyes tetőszerkezetekre vagy a repülőgépek bizonyos merevséget növelő alkatrészeire. Az ilyen rudak mechanikai viselkedésével kapcsolatos vizsgálatok már a 19. században megkezdődtek – lásd pl. Love [1] könyvét. Számos dolgozat témája a síkgörbe rudak szabadrezgéseinek vizsgálata. Ide sorolható,

eredményeket összegező jellege miatt Márkus és Nánási [2] cikke, valamint Chidampram és Lessia [3] műve is. Érdemes továbbá megemlíteni Szeidl [4] PhD értekezését is, amelyben a szerző a lineáris elmélet keretein belül azt vizsgálja, hogyan befolyásolja a középvonal hosszváltozása az állandó nagyságú, iránytartó megoszló erővel terhelt körivalakú síkgörbe rudak szabadrezgéseit és stabilitását. A sajátkörfrekvenciák meghatározására különböző numerikus módszerek segítségével került sor. Ezek egyike a vonatkozó peremérték feladatok Green-féle függvénymátrixainak megkonstruálásán alapul. Sajnálatosan ezen eredmények angol nyelvű publikálására annak idején nem került sor. Lawther [5] cikke a terhelés frekvenciákra gyakorolt hatására fordítja a figyelmét. Véges szabadságfokú, többparaméteres sajátérték feladatok vizsgálatai alapján arra a következtetésre jut a szerző, hogy az ilyen jellegű problémáknál a megoldás sajátértékre vonatkozó részét egymással kölcsönhatásban álló görbék írják le a sajátértékek terében és minden ilyen sajátérték feladatnak van vonatkozó sajátvektora is. Ha egy görbe mentén minden egyes ponthoz ugyanaz a sajátvektor tartozik, akkor az szükségszerűen egy egyenes vonal, de ha ez nem áll fenn, akkor a kérdés sokkal bonyolultabbá válik.

Lawther eredményeinek fényében felvetődik a kérdés, hogyan változnak a sajátfrekvenciák, ha a görbe rudat a koronapontban működő sugárirányú koncentrált erő terheli. Vizsgálataink során feltételezzük, hogy a rúd anyaga heterogén, izotrop és lineárisan rugalmas. A rugalmassági modulus tetszőlegesen változhat a rúd síkjára szimmetrikus és állandónak tekintett keresztmetszet felett, de az eloszlás nem függhet az (E -vel súlyozott) középvonal mentén mért koordinátától – azonos minden keresztmetszetben. Megjegyezzük, hogy ez esetben keresztmetszeti heterogenitásról van szó. E fogalom bevezetése pl. a [6] tanulmányhoz kötődik.

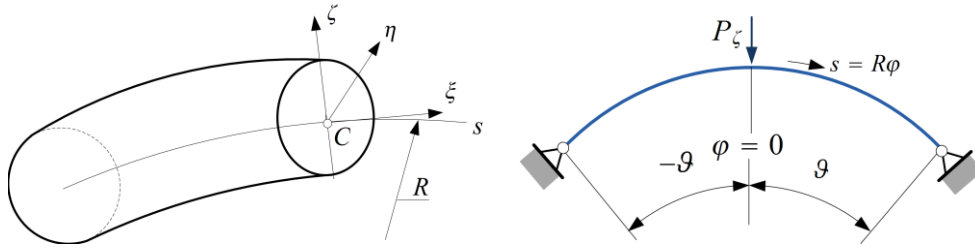
A fenti rövid áttekintés alapján az alábbi célkitűzéseket fogalmazzuk meg: (1) a sugárirányú merev terhelés rezgésekre gyakorolt hatásának figyelembevételére alkalmas modell előállítás – ez egy sajátérték feladat, melynek megoldása természetesen függ a peremfeltételektől. (2) A sajátérték feladatot meghatározó differenciál-egyenletrendszer (továbbiakban DER) Green-féle függvénymátrixának megkonstruálása két végén csuklóval megtámasztott görbe rúd esetén, mert ennek segítségével az eredeti sajátérték feladat Fredholm-féle integrálegyenletekkel (röviden IE) meghatározott sajátérték feladattá alakítható át. (3) Az utóbbi sajátérték feladat véges szabadságfokú algebrai sajátérték feladattal történő helyettesítése és ennek a feladatnak megoldása alkalmas numerikus eljárással. (4) Az eredmények részint grafikus, részint közelítő polinomok segítségével történő megjelenítése, illetve előállítása.

A cikk szövege tíz szakaszra van tagolva. A 2. szakasz az alapvető összefüggések ismertetése. A Green-féle függvénymátrix definíciója után áttekintjük azt is a 3. szakaszban, hogyan helyettesíthető egy homogén DER-rel kapcsolatos sajátérték feladat egy homogén Fredholm-féle integrálegyenletekkel kapcsolatos sajátérték feladattal. A megoldási algoritmusról a 4. szakasz nyújt egy rövid összefoglalást. A Green-féle függvénymátrixokra vonatkozó számítások az 5. szakaszban olvashatók. A középvonal menti fajlagos nyúlás és a koronapontbeli erő között fennálló összefüggés 6. fejezetben található, amely a kritikus nyúlás formuláját is tartalmazza. A számítási eredményeket a 7. szakasz ismerteti. A tanulmányt az eredmények rövid összegzése, köszönetnyilvánítás és végül az irodalomjegyzék zárja le.

2. Alapvető összefüggések

2.1. Megoszló erőrendszerrel terhelt rúd alapegyenletei

Jelen szakaszban a [7] cikk alapján foglaljuk össze a legfontosabb összefüggéseket. Az 1.a. ábrán a vizsgált rúd egy szakasza, valamint az alkalmazott görbevonalú ($\xi = s, \eta, \zeta$) koordináta-rendszer látható. Az 1.b. ábra egy csuklóval megtámasztott és a koronapontban nyomott rúdat szemléltet. A Young modulus, amint arra fent rámutattunk, csak a keresztmetszeti koordináták függvénye: $E(\eta, \zeta) = E(-\eta, \zeta)$.



1. ábra. (a) A koordináta rendszer (b) Csuklós megtámasztású rúd

A $\xi = s$ tengely egybeesik az úgynevezett (E -vel súlyozott) középvonallal, amely a C pontban dőfi a kiragadott keresztmetszetet. A középvonal helyzete az $(1)_1$ feltételei egyenletből származtatható: Itt zérus kell legyen a keresztmetszet $S_{e\eta}$ E -vel súlyozott stati-

$$S_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta dA = 0, \quad A_e = \int_A E(\eta, \zeta) dA, \quad I_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA \quad (1)$$

kai nyomatéka az η tengelyre. A későbbiek kedvéért kerültek bevezetésre az $(1)_{2,3}$ mennyiségek, melyek rendre az E -vel súlyozott területet, valamint az E -vel súlyozott másodrendű nyomatékot értelmezik.

A továbbiakban megkülönböztetjük a terhelés okozta és egyébként időtől független mechanikai mennyiségeket, azoktól, amelyek a rúd rezgéséhez tartoznak. Utóbbiak valójában az időtől függő növekmények és ezeket b alsó index-szel különböztetjük meg. Legyen továbbá u_o , w_o és R rendre a rúd középvonalának érintő-, sugárirányú elmozdulása és a középvonal állandó nagyságú görbületi sugara. Az s ívkoordináta és a φ szögkoordináta között az $s = R\varphi$ összefüggés érvényes. A középvonal tengelyirányú fajlagos nyúlása, valamint ugyanitt a szögelfordulás megadható az u_o , w_o elmozduláskoordinátákkal:

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{du_o}{ds} + \frac{w_o}{R}, \quad \psi_{o\eta} = \frac{u_o}{R} - \frac{dw_o}{ds}. \quad (2)$$

A virtuális munka elv segítségével (itt terjedelmi okok miatt nem részletezett átalakítások eredményeképpen) a

$$\frac{dN}{ds} + \frac{1}{R} \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] + f_i = 0, \quad \frac{d}{ds} \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] - \frac{N}{R} + f_n = 0 \quad (3)$$

egyensúlyi egyenleteket vezethetjük le az N rúderő és az M hajlítónyomaték vonatkozásában. A megoszló terhelés tangenciális és normál irányú sűrűségét f_i , illetve f_n

jelöli.

A belső erők és az alakváltozások közötti kapcsolat a Hooke törvénnyel adható meg [7]:

$$N = \frac{I_{e\eta}}{R^2} m \varepsilon_{o\xi} - \frac{M}{R} \approx A_{e\eta} \varepsilon_{o\xi} - \frac{M}{R}, \quad M = -I_{e\eta} \left(\frac{d^2 w_o}{ds^2} + \frac{w_o}{R^2} \right), \quad \text{ahol } m = \frac{A_e R^2}{I_{e\eta}} - 1. \quad (4)$$

Későbbi megfontolásokból vezessük be a nagy betűvel szedett dimenziómentes elmozdulásokat és egy, a deriváltak tömörebb kifejezésére alkalmas írásmódot:

$$U_o = \frac{u_o}{R}, \quad W_o = \frac{w_o}{R}; \quad (\dots)^{(n)} = \frac{d^n(\dots)}{d\varphi^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

A (4) Hooke-törvény és a (2) kinematikai mennyiségek (3) egyensúlyi egyenletekbe való helyettesítésével a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 - m \varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + m(1 - \varepsilon_{o\xi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix} = \frac{R^3}{I_{e\eta}} \begin{bmatrix} f_t \\ f_n \end{bmatrix}$$

DER-re jutunk. Amennyiben elhanyagoljuk a nyúlás egyensúlyi helyzetre gyakorolt hatását (azaz élünk az $\varepsilon_{o\xi} = 0$ egyszerűsítéssel) akkor kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix} = \frac{R^3}{I_{e\eta}} \begin{bmatrix} f_t \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2.2 A növekményekre vonatkozó alapegyenlet

A nyúlás és a szögelfordulás növekménye a (2) egyenletekhez hasonló

$$\varepsilon_{mb} = \varepsilon_{o\xi b} + \psi_{o\eta} \psi_{o\eta b}, \quad \psi_{o\eta b} = \frac{u_{ob}}{R} - \frac{dw_{ob}}{ds}, \quad \varepsilon_{o\xi b} = \frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{R} \quad (7)$$

képletekkel számítható. Igazolható az is, hogy a rúderő és a hajlítónyomaték megváltozására a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(N_b + \frac{M_b}{R} \right) - \frac{1}{R} \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta b} + f_{tb} &= 0, \\ \frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{R} - \frac{d}{ds} \left[\left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta b} + \left(N_b + \frac{M_b}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] + f_{nb} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

egyensúlyi egyenletek érvényesek. Mivel a növekményekkel kapcsolatos folyamat dinamikai jellegű (feltételezve, hogy az eredeti terhelés – jelen esetben a P_ζ erő – maga változatlan), az f_{tb} és f_{nb} terhelésnövekmények tehetetlenség erők, azaz

$$f_{tb} = -\rho_a A \frac{\partial^2 u_{ob}}{\partial t^2}, \quad f_{nb} = -\rho_a A \frac{\partial^2 w_{ob}}{\partial t^2}, \quad (9)$$

ahol A a keresztmetszet területe, ρ_a pedig a keresztmetszet átlagos sűrűsége. Ezen felül a növekményekkel kapcsolatos Hooke-törvény

$$N_b = \frac{I_{e\eta}}{R^2} m \varepsilon_{o\xi b} - \frac{M_b}{R}, \quad M_b = -I_{e\eta} \left(\frac{d^2 w_{ob}}{ds^2} + \frac{w_{ob}}{R^2} \right), \quad N_b + \frac{M_b}{R} = \frac{I_{e\eta}}{R^2} m \varepsilon_{o\xi b} \quad (10)$$

alakú. A (7), (8) és (10) egyenletek egymásba történő helyettesítésével a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2-m\varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(1)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+m(1-\varepsilon_{o\xi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix} = \frac{R^3}{I_{e\eta}} \begin{bmatrix} f_{ib} \\ f_{nb} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

mozgásegyenletek adódnak. Vegyük észre, hogy a formális deriválások során linearizáltuk a feladatot: (a) elhanyagoltuk a kvadrátikus $\varepsilon_{o\xi}\varepsilon_{o\xi b}$ tagot a (8)₁ kifejezésben; (b) éltünk az $\varepsilon_{o\xi b} \gg (\varepsilon_{o\xi b}\psi_{o\eta})^{(1)}$ és $1 \gg \varepsilon_{o\xi}$ egyenlőtlenségek adta egyszerűsítési lehetőségekkel (8)₂-ben. Amennyiben feltételezzük, hogy harmonikus rezgéseket végeztünk a rúd, a dimenziómentes \hat{U}_{ob} és \hat{W}_{ob} elmozdulás amplitúdókra nézve írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2-m\varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(1)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+m(1-\varepsilon_{o\xi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ahol $\lambda = (\rho_a AR^3 \alpha^2) / I_{e\eta}$ a keresett sajátérték és α az ismeretlen sajátfrekvencia.

Terheletlen rúdra – tehát ha $\varepsilon_{o\xi} = 0$ – visszakapjuk a vonatkozó rúd szabadrezgéseit leíró mozgásegyenleteket – vesd össze a [8] cikkben közölt (11) képlettel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} \\ \hat{W}_{ob} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

A (12) (avagy (13)) DER-ek a vonatkozó homogén peremfeltételekkel együtt egy, a λ -ra vonatkozó sajátérték feladatot határoznak meg. A (12) egyenlet átírható a

$$\mathbf{K}[\mathbf{y}(\varphi), \varepsilon_{o\xi}] = \mathbf{P}\mathbf{y}^{(4)} + \mathbf{P}\mathbf{y}^{(2)} + \mathbf{P}\mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{P}\mathbf{y}^{(0)} = \lambda\mathbf{y} \quad \mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ob} & \hat{W}_{ob} \end{bmatrix} \quad (14)$$

tömör alakba. Megjegyezzük, hogy az i -edik ($i=1,2,3,\dots$) α_i sajátfrekvencia az $\varepsilon_{o\xi}$ nyúláson keresztül függ a koncentrált P_ζ , vagy ami lényegében ugyanaz, a dimenziómentes $\mathcal{P} = P_\zeta R^2 \mathcal{G} / (2I_{e\eta})$ erőttől: $\varepsilon_{o\xi} = \varepsilon_{o\xi}(\mathcal{P})$. Azt is megemlítjük, hogy a heterogenitás az m , $I_{e\eta}$ és ρ_a mennyiségeken keresztül jelenik meg a (12) egyenletben.

3. A Green-féle függvénymátrix értelmezése

Vegyük észre, hogy elfajuló a (14) DER, mivel nem invertálható a \mathbf{P} mátrix. Tekintsük a

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}) = \sum_{v=0}^4 \mathbf{P}(\varphi)\mathbf{y}^{(v)}(\varphi) = \mathbf{r}(\varphi), \quad \mathbf{P}(\varphi) = 0 \quad (15)$$

inhomogén DER-t (a jobb oldalt alkotó $\mathbf{r}(\varphi)$ a középvonalon megoszló terhelésnek felel meg), valamint a csuklós megtámasztás esetén érvényes

$$\hat{U}_{ob}(-\mathcal{G}) = \hat{U}_{ob}(\mathcal{G}) = \hat{W}_{ob}(-\mathcal{G}) = \hat{W}_{ob}(\mathcal{G}) = \hat{W}_{ob}^{(2)}(-\mathcal{G}) = \hat{W}_{ob}^{(2)}(\mathcal{G}) = 0 \quad (16)$$

homogén peremfeltételek által meghatározott peremértékfeladatot. A $\mathbf{K}(\mathbf{y})=0$ homogén DER megoldása függ az $\varepsilon_{o\xi}$ nyúlás előjelétől, vagyis a terhelő erő irányától. Legyen

$$\chi^2 = \begin{cases} 1 - m\varepsilon_{o\xi} & \text{ha } \varepsilon_{o\xi} < 0 \\ m\varepsilon_{o\xi} - 1 & \text{ha } \varepsilon_{o\xi} > 0 \text{ és } m\varepsilon_{o\xi} > 1 \end{cases}. \quad (17)$$

A homogén egyenletnek

$$\mathbf{y} = \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{Y}_i \mathbf{C}_i \right]_{(2 \times 1)} \mathbf{e} \quad (18)$$

alakú a megoldása, ahol

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} \cos \chi \varphi & \mathcal{M} \varphi \\ \chi \sin \chi \varphi & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} -\sin \chi \varphi & 1 \\ \chi \cos \chi \varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ha $\varepsilon_{o\xi} < 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy \mathbf{Y}_3 és \mathbf{Y}_4 megváltozik, ha $\varepsilon_{o\xi} > 0$ és $m\varepsilon_{o\xi} > 1$:

$$\mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} \cosh \chi \varphi & \mathcal{M} \varphi \\ \chi \sinh \chi \varphi & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} -\sinh \chi \varphi & 1 \\ \chi \cosh \chi \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A (18) alatti megoldásban tetszőleges állandó a \mathbf{C}_i mátrix és ugyancsak tetszőleges állandó az \mathbf{e} oszlop mátrix. Emellett $\mathcal{M} = (m+1)/[m(1+\varepsilon_{o\xi})]$.

A (15), (16) peremérték feladat megoldását az

$$\mathbf{y}(\varphi) = \int_a^b \mathbf{G}(\varphi, \psi) \mathbf{r}(\psi) d\psi, \quad \mathbf{G}(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} G_{11}(\varphi, \psi) & G_{12}(\varphi, \psi) \\ G_{21}(\varphi, \psi) & G_{22}(\varphi, \psi) \end{bmatrix} \quad (21)$$

alakban keressük, ahol a $\mathbf{G}(\varphi, \psi)$ Green-féle függvénymátrixot az alábbi tulajdonságok határozzák meg [4]:

1. A Green-féle függvénymátrix folytonos függvénye φ -nek és ψ -nek a $-\vartheta \leq \varphi \leq \psi \leq \vartheta$ és $-\vartheta \leq \psi \leq \varphi \leq \vartheta$ háromszög tartományokon. A

$$(G_{11}(\varphi, \psi), G_{12}(\varphi, \psi)) [G_{21}(\varphi, \psi), G_{22}(\varphi, \psi)] \quad (22)$$

függvények (2-szer) [4-szer] differenciálhatók φ szerint. Maguk a

$$\frac{\partial^v \mathbf{G}(\varphi, \psi)}{\partial x^v} = \mathbf{G}^{(v)}(\varphi, \psi) \quad v=1,2, \quad \frac{\partial^\mu G_{2i}(\varphi, \psi)}{\partial x^\mu} = G_{2i}^{(\mu)}(\varphi, \psi) \quad \mu=1, \dots, 4; i=1,2 \quad (23)$$

deriváltak pedig folytonos függvényei φ -nek és ψ -nek.

2. Legyen φ a $[-\vartheta, \vartheta]$ tartományban. Annak ellenére, hogy a

$$G_{11}(\varphi, \psi), \quad G_{12}^{(1)}(\varphi, \psi), \quad G_{21}^{(v)}(\varphi, \psi) \quad (v=1,2,3), \quad G_{22}^{(v)}(\varphi, \psi) \quad (v=1,2) \quad (24)$$

függvények és deriváltak folytonosak $\varphi = \psi$ esetén, a $G_{11}^{(1)}(\varphi, \psi)$ és $G_{22}^{(3)}(\varphi, \psi)$ deriváltaknak ugyanitt véges szakadása van:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_{11}^{(1)}(\varphi+0, \varphi) - G_{11}^{(1)}(\varphi-0, \varphi)] = 1/P_{11}(\varphi),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_{22}^{(3)}(\varphi+0, \varphi) - G_{22}^{(3)}(\varphi-0, \varphi)] = 1/P_{22}(\varphi). \quad (25)$$

3. Legyen α egy tetszőleges állandó vektor. Rögzített $\psi \in [-\vartheta, \vartheta]$ mellett a $\mathbf{G}(\varphi, \psi)\alpha$ vektor, mint φ ($\varphi \neq \psi$) függvénye ki kell elégítse a homogén differenciálegyenletet:

$$\mathbf{K}[\mathbf{G}(\varphi, \psi)\boldsymbol{\alpha}] = 0.$$

4. A $\mathbf{G}(\varphi, \psi)\boldsymbol{\alpha}$ vektor, mint φ függvénye köteles teljesíteni a (16) peremfeltételeket. Igazolható a Green-féle függvénytárcsa egzisztenciája, ami ha fennáll, akkor a (21) vektor kielégíti a (15) DER-t és a vonatkozó peremfeltételeket.

Tekintsük a

$$\mathbf{K}[\mathbf{y}] = \lambda \mathbf{y} \quad (26)$$

DER-t, ahol $\mathbf{K}[\mathbf{y}]$ -t a (14) képlet értelmezi, a λ pedig egy skalárparaméter. A (26) DER, valamint a homogén lineáris (16) peremfeltételek egy, a λ paraméterre, mint sajátértékre vonatkozó sajátérték feladatot határoznak meg.

Az $\mathbf{u}^T = [u_1 | u_2]$ és $\mathbf{v}^T = [v_1 | v_2]$ vektorok komparatív vektorok, ha különböznek zérustól, kielégítik a (16) peremfeltételeket és kellő rendben folytonosan deriválhatók. Önadjungált a (26), (16) sajátérték feladat, ha kommutatív az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_K = \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{v} d\varphi$ szorzat, vagyis ha a komparatív vektorokra nézve teljesül az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_K = (\mathbf{v}, \mathbf{u})_K$ reláció. Pozitív definit a sajátérték feladat, ha emellett az $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_K > 0$ egyenlőtlenség is fennáll tetszőleges \mathbf{u} mellett. Ha önadjungált a (26), (16) sajátérték feladat, akkor keresztszimmetrikus a Green-féle függvénytárcsa: $\mathbf{G}(\varphi, \psi) = \mathbf{G}^T(\psi, \varphi)$.

4. A sajátérték feladat numerikus megoldása

Helyettesítsünk $\lambda \mathbf{y}$ -t a megoldást adó (21) képletben \mathbf{r} helyére. Az

$$\mathbf{y}(\varphi) = \lambda \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \mathbf{G}(\varphi, \psi) \mathbf{y}(\psi) d\psi \quad (27)$$

eredmény egy homogén Fredholm típusú integrálegyenlet rendszer (továbbiakban IER). A fenti IER numerikus megoldására a numerikus integrálási eljárások segítségével nyílik lehetőség [9]. Tekintsük a

$$J(\phi) = \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \phi(\psi) d\psi \equiv \sum_{j=0}^n w_j \phi(\psi_j) \quad \psi_j \in [-\vartheta, \vartheta] \quad (28)$$

integrál formulát, ahol a $\psi_j(\varphi)$ vektor és a w_j súlyok ismertek. Az integrál formula alkalmazásával a

$$\sum_{j=0}^n w_j \mathbf{G}(\varphi, \psi_j) \tilde{\mathbf{y}}(\psi_j) = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{y}}(\varphi) \quad \tilde{\kappa} = 1 / \tilde{\lambda} \quad (29)$$

egyenletet kapjuk a (27) IE-ből. Az utóbbi egyenlet megoldásával adódnak a $\tilde{\lambda} = 1 / \tilde{\kappa}$ közelítő sajátértékek és a hozzájuk tartozó $\tilde{\mathbf{y}}(\varphi)$ közelítő sajátfüggvények. Az eljárás a következő: ha a fenti egyenletben φ helyére rendre ψ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)-et írunk, akkor a

$$\sum_{j=0}^n w_j \mathbf{G}(\psi_i, \psi_j) \tilde{\mathbf{y}}(\psi_j) = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{y}}(\psi_i) \quad \tilde{\kappa} = 1 / \tilde{\lambda} \quad \psi_i, \psi_j \in [-\vartheta, \vartheta] \quad i = 1, \dots, n, \quad (30)$$

vagy ami ugyanaz a

$$\mathcal{GD}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{y}}$$

alakú homogén, lineáris egyenletrendszerre jutunk, ahol

$\mathcal{D} = \text{diag}(\underbrace{w_0, \dots, w_0}_i | \dots | \underbrace{w_n, \dots, w_n}_i)$, a $\mathcal{G} = \mathbf{G}(\psi_i, \psi_j)$ szimmetrikus, ha a probléma önadjungált és $\tilde{\mathcal{Y}}^T = [\tilde{\mathbf{y}}^T(\psi_0) | \tilde{\mathbf{y}}^T(\psi_1) | \dots | \tilde{\mathbf{y}}^T(\psi_n)]$. A (30) algebrai sajátérték feladat megoldása után megkapjuk a $\tilde{\lambda}_r$ közelítő sajátértékeket és \mathcal{Y}_r sajátvektorokat, míg a vonatkozó sajátfüggvények a sajátértékek és sajátvektorok (29)-be történő helyettesítésével adódnak:

$$\tilde{\mathbf{y}}_r(\varphi) = \tilde{\lambda}_r \sum_{j=0}^n w_j \mathbf{G}(\varphi, \psi_j) \tilde{\mathbf{y}}_r(\psi_j) \quad r = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

Osszuk fel a $[-g, g]$ intervallumot egyforma hosszúságú részintervallumokra és alkalmazzuk az integrál formulát minden egyes részintervallumra. Megismételve a (31)-re vezető gondolatmenetet könnyen belátható, hogy az így kapott algebrai sajátérték feladat azonos szerkezetű, mint (31).

Az is lehetséges, hogy a (27) IE-et úgy kezeljük, mint egy peremintegrál egyenletet és izoparametrikus közelítést alkalmazzunk a részintervallumok felett. Ez esetben az e -edik elem felett

$$\mathbf{y}^e = \mathbf{N}_1(\eta) \mathbf{y}_1^e + \mathbf{N}_2(\eta) \mathbf{y}_2^e + \mathbf{N}_3(\eta) \mathbf{y}_3^e \quad (32)$$

a sajátfüggvények közelítése (az e -edik részintervallumot az $\eta \in [-1, 1]$ tartományra képezzük le és az utóbbit \mathcal{E}_e -vel jelöljük a továbbiakban.) Kvadratikus approximáció esetén $\mathbf{N}_i = \text{diag}(N_i)$, $N_1 = 0.5\eta(\eta-1)$, $N_2 = 1-\eta^2$, $N_3 = 0.5\eta(\eta+1)$, az \mathbf{y}_i^e , ($i=1, 2, 3$) pedig az \mathbf{y} sajátfüggvény a részintervallum kezdő, középső és végpontjában vett értékeit jelöli - ezek az ismeretlenek. A (32) közelítést helyettesítve a (27) IE-be az

$$\tilde{\mathbf{y}}(\varphi) = \tilde{\lambda} \sum_{e=1}^{n_{be}} \int_{\mathcal{E}_e} \mathbf{G}(x, \eta) [\mathbf{N}_1(\eta) | \mathbf{N}_2(\eta) | \mathbf{N}_3(\eta)] d\eta \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^e \\ \mathbf{y}_2^e \\ \mathbf{y}_3^e \end{bmatrix} \quad (33)$$

összefüggést kapjuk, ahol n_{be} az elemek (részintervallumok) száma. A (33) egyenlettől megismételve a (31)-re vezető gondolatmenetet, ismét egy algebrai sajátérték feladatot kapunk.

5. A Green-féle függénymátrix számítása

5.1. Bevezető megjegyzések

A 3. szakaszban részletezett definíció alapján tekintjük át ebben a szakaszban a Green-féle függénymátrix meghatározását. Tételezzük fel, hogy a Green-féle függénymátrix

$$\mathbf{G}(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^4 \mathbf{Y}_j(\varphi) [\mathbf{A}_j(\psi) \pm \mathbf{B}_j(\psi)] \quad (34)$$

(2×2)

alakú – ezzel a választással teljesül a 3. alatti tulajdonság – ahol (a) az előjel

[pozitív](negatív), ha $[\varphi \leq \psi](\varphi \geq \psi)$; (b) az \mathbf{A}_j és \mathbf{B}_j mátrixok pedig az alábbi szerkezetűek:

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} A_{11}^j & A_{12}^j \\ A_{21}^j & A_{22}^j \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_{j1} \quad \mathbf{A}_{j2}], \quad \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} B_{11}^j & B_{12}^j \\ B_{21}^j & B_{22}^j \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{j1} \quad \mathbf{B}_{j2}] \quad j=1, \dots, 4; \quad (35)$$

(c) a \mathbf{B}_j együtthatók függetlenek a peremfeltételektől. Mivel (ahogyan az már a 3. szakaszban is szerepelt) az \mathbf{Y}_3 és \mathbf{Y}_4 mátrixok eltérőek ha $\varepsilon_{o\xi} > 0$ (negatív a P_ζ) és ha $\varepsilon_{o\xi} > 0, m\varepsilon_{o\xi} > 1$ (pozitív a P_ζ), ezért ezt a két esetet külön-külön kell áttekinteni.

5.2. A Green-féle függvénymátrix, ha $\varepsilon_{o\xi} < 0$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az

$$a = B_{1i}^1, b = B_{1i}^2, c = B_{1i}^3, d = B_{2i}^3, e = B_{1i}^4, f = B_{2i}^4$$

jelöléseket. Nem nehéz belátni továbbá, hogy $B_{21}^1 = B_{21}^2 = B_{22}^1 = B_{22}^2 = 0$. Az a, \dots, f ismeretlenekre vonatkozó egyenletrendszer a Green-féle függvénymátrix 1. és 2. alatti tulajdonságainak (folytonossági és szakadási feltételek) felhasználásával adódik. Valóban, ha $\varphi = \psi$ a (22)-(25) képletek alapján $i = 1$ esetén írhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & \cos(\chi \psi) & \mathcal{M} \psi & -\sin(\chi \psi) & 1 \\ \sin \psi & \cos \psi & \chi \sin(\chi \psi) & -1 & \chi \cos(\chi \psi) & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & -\chi \sin(\chi \psi) & \mathcal{M} & -\chi \cos(\chi \psi) & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & \chi^2 \cos(\chi \psi) & 0 & -\chi^2 \sin(\chi \psi) & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & -\chi^3 \sin(\chi \psi) & 0 & -\chi^3 \cos(\chi \psi) & 0 \\ -\cos \psi & \sin \psi & -\chi^4 \cos(\chi \psi) & 0 & \chi^4 \sin(\chi \psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} a = B_{11}^1 &= \frac{\chi^2}{(1-\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\sin \psi}{2}, & b = B_{11}^2 &= \frac{\chi^2}{(1-\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\cos \psi}{2}, \\ c = B_{11}^3 &= -\frac{\chi^2}{(1-\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\sin \chi \psi}{2\chi^3}, & d = B_{21}^3 &= -\frac{1}{2(1-\mathcal{M})m}, \\ e = B_{11}^4 &= -\frac{1}{\chi(1-\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\cos \chi \psi}{2}, & f = B_{21}^4 &= \frac{1}{2} \mathcal{M} \frac{\psi}{m(1-\mathcal{M})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Ha $i = 2$, akkor pedig

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \cos(\chi\psi) & \mathcal{M}\psi & -\sin(\chi\psi) & 1 \\ \sin\psi & \cos\psi & \chi\sin(\chi\psi) & -1 & \chi\cos(\chi\psi) & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & -\chi\sin(\chi\psi) & \mathcal{M} & -\chi\cos(\chi\psi) & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & \chi^2\cos(\chi\psi) & 0 & -\chi^2\sin(\chi\psi) & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & -\chi^3\sin(\chi\psi) & 0 & -\chi^3\cos(\chi\psi) & 0 \\ -\cos\psi & \sin\psi & -\chi^4\cos(\chi\psi) & 0 & \chi^4\sin(\chi\psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

a megoldandó egyenletrendszer, a megoldások pedig

$$\begin{aligned} a = B_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\cos\psi}{(1-\chi^2)}, & b = B_{12}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\sin\psi}{(1-\chi^2)}, & c = B_{12}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\cos\chi\psi}{(1-\chi^2)\chi^2}, \\ d = B_{22}^3 &= 0, & e = B_{12}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\sin\chi\psi}{(1-\chi^2)\chi^2}, & f = B_{22}^4 &= \frac{1}{2\chi^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Az \mathbf{A}_j állandók közül

$$A_{1i}^1(\psi), A_{1i}^2(\psi), A_{1i}^3(\psi), A_{2i}^3(\psi), A_{1i}^4(\psi), A_{2i}^4(\psi) \quad i=1,2; \quad \psi \in [-\vartheta, \vartheta]$$

az ismeretlenek (mivel $A_{21}^1 = A_{21}^2 = A_{22}^1 = A_{22}^2 = 0!$). A 4. tulajdonság szerint teljesülne kell (16) peremfeltételeknek. Innen a

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & \cos(\chi\vartheta) & -\mathcal{M}\vartheta & \sin(\chi\vartheta) & 1 \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & \cos(\chi\vartheta) & \mathcal{M}\vartheta & -\sin(\chi\vartheta) & 1 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & -\chi\sin(\chi\vartheta) & -1 & \chi\cos(\chi\vartheta) & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & \chi\sin(\chi\vartheta) & -1 & \chi\cos(\chi\vartheta) & 0 \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta & \chi^3\sin(\chi\vartheta) & 0 & -\chi^3\cos(\chi\vartheta) & 0 \\ -\sin\vartheta & -\cos\vartheta & -\chi^3\sin(\chi\vartheta) & 0 & -\chi^3\cos(\chi\vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i}^1 \\ A_{1i}^2 \\ A_{1i}^3 \\ A_{2i}^3 \\ A_{1i}^4 \\ A_{2i}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\cos\vartheta - b\sin\vartheta - c\cos(\chi\vartheta) + d\mathcal{M}\vartheta - e\sin(\chi\vartheta) - f \\ a\cos\vartheta - b\sin\vartheta + c\cos(\chi\vartheta) + d\mathcal{M}\vartheta - e\sin(\chi\vartheta) + f \\ a\sin\vartheta - b\cos\vartheta + c\chi\sin(\chi\vartheta) + d - e\chi\cos(\chi\vartheta) \\ a\sin\vartheta + b\cos\vartheta + c\chi\sin(\chi\vartheta) - d + e\chi\cos(\chi\vartheta) \\ -a\sin\vartheta + b\cos\vartheta - c\chi^3\sin(\chi\vartheta) + e\chi^3\cos(\chi\vartheta) \\ -a\sin\vartheta - b\cos\vartheta - c\chi^3\sin(\chi\vartheta) - e\chi^3\cos(\chi\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

egyenletrendszer következik. Legyen

$$C_{11} = (1-\chi^2)\sin\vartheta, \quad C_{12} = \chi(1-\chi^2)\sin\chi\vartheta, \quad (41)$$

$$D_{11} = \cos\vartheta\sin\chi\vartheta - \chi^3\sin\vartheta\cos\chi\vartheta - \mathcal{M}\chi\vartheta(1-\chi^2)\cos\vartheta\cos\chi\vartheta$$

két alkalmas állandó. Ezekkel a megoldások:

$$\begin{aligned}
 A_{1i} &= \frac{1}{C_{11}} [b(1-\chi^2)\cos\vartheta + d\chi^2], \\
 A_{2i} &= \frac{1}{D_{11}} [a\chi^3\cos\vartheta\cos\chi\vartheta - a\chi\vartheta(1-\chi^2)\mathcal{M}\sin\vartheta\cos\chi\vartheta + a\sin\vartheta\sin\chi\vartheta + c\chi^3 + \chi^3f\cos\chi\vartheta], \\
 A_{3i} &= -\frac{1}{C_{12}} (d - e\chi(1-\chi^2)\cos\chi\vartheta), \quad A_{2i} = -\frac{\chi}{D_{11}} (1-\chi^2)\chi(a\cos\chi\vartheta + c\cos\vartheta + f\cos\vartheta\cos\chi\vartheta), \\
 A_{4i} &= -\frac{1}{D_{11}} (a + c(1-\chi^2)\mathcal{M}\chi\vartheta\cos\vartheta\sin\chi\vartheta + c(\chi^3\sin\vartheta\sin\chi\vartheta + \cos\vartheta\cos\chi\vartheta) + f\cos\vartheta), \\
 A_{2i} &= -\frac{1}{C_{12}\sin\vartheta} (b\chi(1-\chi^2)\sin\chi\vartheta - dM\vartheta\chi(1-\chi^2)\sin\vartheta\sin\chi\vartheta + d\chi^3\cos\vartheta\sin\chi\vartheta - \\
 &\quad - d\sin\vartheta\cos\chi\vartheta + e\chi\sin\vartheta - e\chi^3\sin\vartheta).
 \end{aligned}$$

5.3. A Green-féle függvénymátrix, ha $\varepsilon_{o\xi} > 0$ és $m\varepsilon_{o\xi} > 1$

A B_{1i}, \dots, B_{2i} állandókat ugyanúgy kell számolni, mint az előző esetben, de most a (20) képlet adja B_3 és B_4 értékét. Ha $i = 1$ kapjuk hogy

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \cosh(\chi\psi) & \mathcal{M}\psi & \sinh(\chi\psi) & 1 \\ \sin\psi & \cos\psi & -\chi\sinh(\chi\psi) & -1 & -\chi\cosh(\chi\psi) & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & \chi\sinh(\chi\psi) & \mathcal{M} & \chi\cosh(\chi\psi) & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & -\chi^2\cosh(\chi\psi) & 0 & -\chi^2\sinh(\chi\psi) & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & -\chi^3\sinh(\chi\psi) & 0 & -\chi^3\cosh(\chi\psi) & 0 \\ -\cos\psi & \sin\psi & -\chi^4\cosh(\chi\psi) & 0 & -\chi^4\sinh(\chi\psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
 a = B_{11} &= -\frac{\chi^2}{(1+\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\sin\psi}{2}, & b = B_{11} &= -\frac{\chi^2}{(1+\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\cos\psi}{2}, \\
 c = B_{11} &= -\frac{1}{\chi(1+\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\sinh\chi\psi}{2}, & d = B_{21} &= -\frac{1}{2(1-\mathcal{M})m}, \\
 e = B_{11} &= \frac{1}{\chi(1+\chi^2)(1-\mathcal{M})m} \frac{\cosh\chi\psi}{2}, & f = B_{21} &= \frac{1}{2(1-\mathcal{M})m} \mathcal{M}\psi
 \end{aligned} \quad (43)$$

a keresett megoldás. Ha $i = 2$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & \cosh(\chi \psi) & \mathcal{M} \psi & \sinh(\chi \psi) & 1 \\ \sin \psi & \cos \psi & -\chi \sinh(\chi \psi) & -1 & -\chi \cosh(\chi \psi) & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & \chi \sinh(\chi \psi) & \mathcal{M} & \chi \cosh(\chi \psi) & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & -\chi^2 \cosh(\chi \psi) & 0 & -\chi^2 \sinh(\chi \psi) & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & -\chi^3 \sinh(\chi \psi) & 0 & -\chi^3 \cosh(\chi \psi) & 0 \\ -\cos \psi & \sin \psi & -\chi^4 \cosh(\chi \psi) & 0 & -\chi^4 \sinh(\chi \psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

a megoldandó egyenletrendszer. A megoldások pedig

$$\begin{aligned} a &= B_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{\cos \psi}{(1+\chi^2)}, & b &= B_{12}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\sin \psi}{(1+\chi^2)}, & c &= B_{12}^3 = \frac{1}{2} \frac{\cosh \chi \psi}{(1+\chi^2) \chi^2} \\ d &= B_{22}^3 = 0, & e &= B_{12}^4 = -\frac{1}{2} \frac{\sinh \chi \psi}{\chi^2 (1+\chi^2)}, & f &= B_{22}^4 = -\frac{1}{2 \chi^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Az \mathbf{A}_j mátrixok elemei a (16) peremfeltételek felhasználásával adódó

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & \cosh(\chi \vartheta) & -\mathcal{M} \vartheta & -\sinh(\chi \vartheta) & 1 \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & \cosh(\chi \vartheta) & \mathcal{M} \vartheta & \sinh(\chi \vartheta) & 1 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & \chi \sinh(\chi \vartheta) & -1 & -\chi \cosh(\chi \vartheta) & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & -\chi \sinh(\chi \vartheta) & -1 & -\chi \cosh(\chi \vartheta) & 0 \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta & \chi^3 \sinh(\chi \vartheta) & 0 & -\chi^3 \cosh(\chi \vartheta) & 0 \\ -\sin \vartheta & -\cos \vartheta & -\chi^3 \sinh(\chi \vartheta) & 0 & -\chi^3 \cosh(\chi \vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i}^1 \\ A_{1i}^2 \\ A_{1i}^3 \\ A_{2i}^3 \\ A_{1i}^4 \\ A_{2i}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cos \vartheta - b \sin \vartheta - c \cosh(\chi \vartheta) + d \mathcal{M} \vartheta + e \sinh(\chi \vartheta) - f \\ a \cos \vartheta - b \sin \vartheta + c \cosh(\chi \vartheta) + d \mathcal{M} \vartheta + e \sinh(\chi \vartheta) + f \\ a \sin \vartheta - b \cos \vartheta - c \chi \sinh(\chi \vartheta) + d + e \chi \cosh(\chi \vartheta) \\ a \sin \vartheta + b \cos \vartheta - c \chi \sinh(\chi \vartheta) - d - e \chi \cosh(\chi \vartheta) \\ -a \sin \vartheta + b \cos \vartheta - c \chi^3 \sinh(\chi \vartheta) + e \chi^3 \cosh(\chi \vartheta) \\ -a \sin \vartheta - b \cos \vartheta - c \chi^3 \sinh(\chi \vartheta) - e \chi^3 \cosh(\chi \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

egyenletrendszer megoldásai. A

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1+\chi^2) \sin \vartheta, & C_{12} &= \chi (1+\chi^2) \sinh \chi \vartheta \\ D_{11} &= -\cos \vartheta \sinh \chi \vartheta - \chi^3 \sin \vartheta \cosh \chi \vartheta + \mathcal{M} \vartheta \chi (1+\chi^2) \cos \vartheta \cosh \chi \vartheta \end{aligned} \quad (47)$$

állandók bevezetésével

$$\begin{aligned}
 A_{1i} &= \frac{1}{C_{11}} [b(1 + \chi^2) \cos \vartheta - d\chi^2], \\
 A_{2i} &= \frac{1}{D_{11}} [a\chi^3 \cos \vartheta \cosh \chi\vartheta + a\vartheta\chi(1 + \chi^2) \mathcal{M} \sin \vartheta \cosh \chi\vartheta - \\
 &\quad - a \sin \vartheta \sinh \chi\vartheta + c\chi^3 + f\chi^3 \cosh \chi\vartheta], \\
 A_{3i} &= \frac{1}{C_{12}} (d + e\chi(1 + \chi^2) \cosh \chi\vartheta), \\
 A_{2i} &= \frac{\chi}{D_{11}} (1 + \chi^2) (a \cosh \chi\vartheta + c \cos \vartheta + f \cos \vartheta \cosh \chi\vartheta), \\
 A_{4i} &= -\frac{1}{D_{11}} [a - c(1 + \chi^2) \mathcal{M} \chi \vartheta \cos \vartheta \sinh \chi\vartheta + \\
 &\quad + c(\chi^3 \sin \vartheta \sinh \chi\vartheta + \cos \vartheta \cosh \chi\vartheta) + f \cos \vartheta], \\
 A_{2i} &= -\frac{1}{C_{12} \sin \vartheta} (b\chi(1 + \chi^2) \sinh \chi\vartheta - d\mathcal{M} \vartheta \chi(1 + \chi^2) \sin \vartheta \sinh \chi\vartheta - \\
 &\quad - d\chi^3 \cos \vartheta \sinh \chi\vartheta + d \sin \vartheta \cosh \chi\vartheta + e\chi(1 + \chi^2) \sin \vartheta)
 \end{aligned} \tag{48}$$

a megoldások alakja.

6. Az $\varepsilon_{o\xi} = \varepsilon_{o\xi}(\mathcal{P})$ függvény. A fajlagos nyúlás kritikus értéke

6.1. Fajlagos nyúlás az erő függvényében

A későbbiek miatt ismernünk kell a középvonalon mért fajlagos nyúlás és a terhelő erő közötti kapcsolatot. Megjegyezzük, hogy a jelen tanulmányban megmaradunk a lineáris elmélet keretei között. A keresett összefüggés ez esetben a (6) DER megoldását igényli, ha $f_i = f_n = 0$. A $[-\vartheta, 0)$ és $(0, \vartheta]$ intervallumokra vonatkozó megoldásokat azonban illeszteni kell – az $\varepsilon_{o\xi}$ fajlagos nyúlás azonban állandó és ugyanaz mindkét intervallum felett. Az

$U_o|_{\pm\vartheta} = W_o|_{\pm\vartheta} = M|_{\pm\vartheta} = 0$ peremfeltételek, valamint a $\varphi = 0$ helyre vonatkozó

$$\begin{aligned}
 U_o|_{\varphi=0} &= U_o|_{\varphi=+0}, & W_o|_{\varphi=0} &= W_o|_{\varphi=+0}, & \psi_{o\eta}|_{\varphi=0} &= \psi_{o\eta}|_{\varphi=+0}, \\
 N|_{\varphi=0} &= N|_{\varphi=+0}, & M|_{\varphi=0} &= M|_{\varphi=+0}, & \frac{dM}{ds}|_{\varphi=+0} - \frac{dM}{ds}|_{\varphi=0} - P_\zeta &= 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

kontinuitási és diszkontinuitási feltételek felhasználásával – a részleteket illetően a [10] MSc diplomatervre utalunk – kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{o\xi} = -\frac{\mathcal{P} \cos \vartheta [\vartheta \tan \vartheta + 2(\cos \vartheta - 1)]}{\vartheta 2(m+1) \vartheta \cos^2 \vartheta + \vartheta m - 3m \sin \vartheta \cos \vartheta}, \quad \mathcal{P} = \frac{P_\zeta P_o^2 \vartheta}{2I_{e\eta}}, \tag{50}$$

ahol \mathcal{P} a dimenziómentes erő – ha \mathcal{P} [negatív] (pozitív), akkor $\varepsilon_{o\xi}$ is [negatív] (pozitív).

6.2. A fajlagos nyúlás kritikus értéke

Ha növeljük $|\mathcal{P}|$, értékét ($\mathcal{P} < 0$), akkor előbb, vagy utóbb elveszti a rúd a stabilitását. Tegyük fel, hogy a stabilitásvesztéshez tartozó (sugárirányú) [érintőirányú] elmozdulásnövekmény (páratlan)[páros] függvénye a φ -nek. Ez esetben a kritikus fajlagos nyúlás számítása a χ -re, mint sajátértékre vonatkozó és a

$$\mathbf{K}[\mathbf{y}(\varphi), \varepsilon_{o\xi}] = 0, \quad \chi^2 = 1 - m\varepsilon_{o\xi} \quad (51)$$

DER, valamint az

$$U_{ob}|_{\pm\vartheta} = W_{ob}|_{\pm\vartheta} = W_{ob}^{(2)}|_{\pm\vartheta} = 0 \quad (52)$$

homogén peremfeltételek által meghatározott sajátérték feladat megoldását igényli. Figyelembe véve, hogy a megoldások

$$\begin{aligned} W_{ob} &= -A_2 - A_3 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi - \chi A_5 \cos \chi\varphi + \chi A_6 \sin \chi\varphi, \\ U_{ob} &= A_1 + A_2 \mathcal{M}\varphi + A_3 \sin \varphi + A_4 \cos \varphi + A_5 \sin \chi\varphi + A_6 \cos \chi\varphi \end{aligned} \quad (53)$$

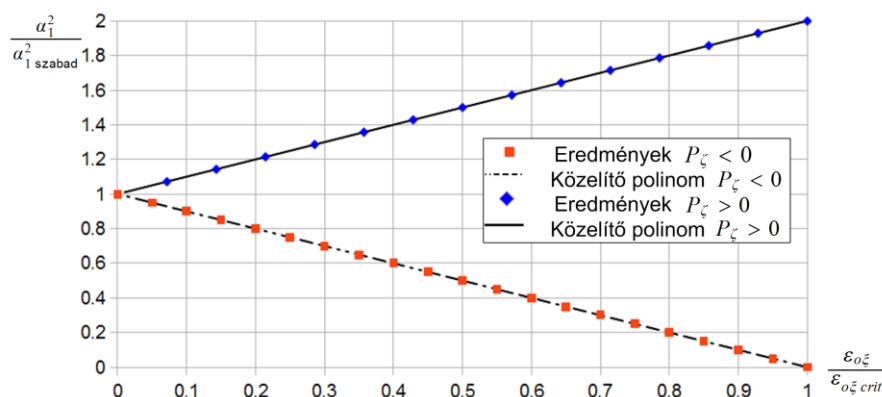
alakúak az A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) integrációs állandók számítására a peremfeltételek alapján felírt homogén lineáris ER-nek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha zérus a determinánsa. Ebből a feltételből kapjuk (a részleteket ismét elhagyva), hogy $\chi\vartheta = \pi$. Következésképp

$$\varepsilon_{o\xi}^{\text{crit}} = -\frac{1}{m}(\chi^2 - 1) = -\frac{1}{m} \left[\left(\frac{\pi}{\vartheta} \right)^2 - 1 \right] \quad (54)$$

a kritikus fajlagos nyúlás értéke.

7. Számítási eredmények

Fortran90 nyelven program készült a Fredholm IER-rel meghatározott sajátérték feladat megoldására. Az így kapott numerikus eredményeket ugyanazon rúd szabadrezgéseinek sajátfrekvenciáival hasonlítjuk össze – utóbbiakkal kapcsolatos eredményeket illetően ismét a [10] munkára utalunk.



2. ábra. Számítási eredmények csuklós rúdra

A 2. ábra az $\alpha_1^2 / \alpha_{1szabad}^2$ hányadost ábrázolja az $\varepsilon_{o\xi} / \varepsilon_{o\xi crit}$ hányados, mint független változó függvényében két végén csuklóval megtámasztott rúdra és mindkét terhelési esetre. Tegyük fel, hogy $\vartheta \in [0, 2; 1, 5]$ és $m \geq 10000$. A számítási eredmények szerint ilyenkor független az $\alpha_1^2 / \alpha_{1szabad}^2$ hányados értéke az m paramétertől és lineáris a vonatkozó függvénykapcsolat. Az

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{1szabad}^2} &= 1.00046 - 1.00038 \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\varepsilon_{o\xi crit}} \approx 1 - \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\varepsilon_{o\xi crit}}, & P_\zeta < 0 \\ \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{1szabad}^2} &= 1.00066 + 0.999915 \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\varepsilon_{o\xi crit}} \approx 1 + \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\varepsilon_{o\xi crit}}, & P_\zeta > 0 \end{aligned} \quad (55)$$

egyenesek gyakorlatilag pontosan illeszkednek az eredményül kapott pontsorra.

8. Összefoglalás

A bevezetésben megfogalmazott célkitűzéseinkkel összhangban keresztmetszeti inhomogenitású síkgörbe rudak rezgéseit vizsgáltuk feltéve, hogy a rudat a koronapontban működő koncentrált erő terheli.

- Levezettük azt a peremérték feladatot, melynek segítségével tisztázható, hogyan függenek a rezgések sajátfrekvenciái a terhelő erőtől.
- Megkonstruáltuk a csuklóval megtámasztott rúd Green-féle függvenymátrixait pozitív és negatív terhelés esetére egyaránt.
- A Green-féle függvenymátrix-szal a sajátfrekvenciák meghatározására irányuló sajátérték feladatot Fredholm IER-rel leírható sajátérték feladatra vezettük vissza.
- Ezt a sajátérték feladatot numerikusan megoldottuk. A számítási eredmények szerint az első sajátfrekvenciák négyzete lineárisan függ a középvonal fajlagos nyúlásától. Az $\varepsilon_{o\xi} = \varepsilon_{o\xi}(\mathcal{P})$ függvény ismeretében kiszámítható, hogy adott terheléshez mekkora fajlagos nyúlás tartozik és utána számítható a vonatkozó sajátfrekvencia is.

9. Köszönetnyilvánítás

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

10. Irodalom

- [1] A.E.H. Love. *Treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York, Dower, 1944.
- [2] S. Márkus, T. Nánási. Vibration of curved beams. *Shock. Vib. Dig.* 13(4):3-14, 1981.
- [3] P. Chidamparam, A. W. Leissa. Vibrations of planar curved beams, rings and

- arches. *Applied Mechanics Review*, ASME, 46(9):467-483, 1993.
- [4] Szeidl Gy. *A súlyponti szál hosszváltozásának hatása a körívalakú rúd stabilitására és szabadrezgéseinek saját frekvenciáira*. PhD disszertáció, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 1975.
- [5] Ray Lawther. On the straightness of eigenvalue iterations. *Computational Mechanics*, 37:362-368, 2005.
- [6] A. Baksa, I. Ecsedi. A note on the pure bending of nonhomogenous prismatic bars. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 37(2):118-129, 2009.
- [7] Gy. Szeidl, L. Kiss. A nonlinear mechanical model for heterogeneous curved beams. *Proceedings of the 4th International Conference on Advanced Composite Materials Engineering*, COMAT 2012, volume 2, pp. 589-596, 18-20 October 2012, Brasov.
- [8] Kiss L. P. Heterogén anyagú síkgörbe rúd szabadrezgéseinek sajátfrekvenciái. *GÉP*, LXIV(5):16-21, 2013.
- [9] C. T. H. Baker. *The Numerical Treatment of Integral Equations – Monographs on Numerical Analysis*. Clarendon Press, Oxford, 1977.
- [10] Kiss L. Heterogén anyagú síkgörbe rudak egyes feladatainak megoldása. MSc Diplomamunka, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 2011.