A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye, változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illét meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, II

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

BEVEZETÉS

Dolgozatom első részében [2] időben folytonos egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov*-folyamatról volt szó, a megfigyelések azonban rendszerint diszkrét időpontokban történnek s így a statisztikus szempontjából fontos ennek az esetnek a megvizsgálása is. Az időben folytonos esettel ellentétben az ismeretlen paraméterek száma már három m, ϱ, σ_ξ^2, (vagy $m, \varrho, \sigma_\zeta^2$), ahol

$$
m = \mathbf{M}\xi(n), \quad \sigma_\xi^2 = \mathbf{D}^2\xi(n), \quad \varrho = \frac{\mathbf{M}\{\xi(n)-m\}\{\xi(n-1)-m\}}{\sigma_\xi^2}, \tag{1}
$$

$$
\sigma_\zeta^2 = (1-\varrho^2)\delta_\xi^2, \qquad (n = 1, 2, \ldots)
$$

Az időben folytonos eset eredményeire jelen dolgozatban szükség van s így arra állandóan történik majd hivatkozás.

Megemlítem, hogy az ismert ϱ és σ_ξ^2 esettel LUVSZANCEREN [8], [9], ismert σ_ξ^2 és m esettel LINNIK [7], míg az ismert σ_ξ^2 esettel LUVSZANCEREN [8], [9] foglalkozott.

Jelen dolgozatban feltesszük, hogy mindhárom paraméter ismeretlen s megvizsgáljuk különböző becslések viselkedését.

Megemlítem, hogy sok cikk (lásd pl. T. W. ANDERSON [1] s az ott szereplő irodalmat) foglalkozott ϱ becslésének a kérdésével, elsősorban a széria-korrelációs együtthatóval, ezeknek az eredményeknek az összefoglalása szerepelni fog a dolgozatban. Előljáróban még annyit említenék meg, hogy a probléma felvetésének sok esetben hibás volta vezetett korábban nem mindig megnyugtató részeredményekre. A dolgozat egyes eredményei szerepeltek disszertációmban [3], azonban a tételek és bizonyítások itt jelennek meg először. A disszertáció megírása óta eltelt időben szükségessé vált bizonyos eredmények kiegészítése és más idevonatkozó eredmények ismertetése is (lásd pl. 6 §).

IDŐBEN DISZKRÉT, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, EGYDIMENZIÓS ESET

1. §. A megfigyelések eloszlása s a lehetséges becslések

Az előző dolgozat [2] 1. tételéből következik, hogy a stacionárius, *Gauss—Markov*-folyamat $R(n)$ korrelációs függvénye $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$
R(n) = \varrho^{(n)}
$$

alakú, ahol $\varrho = \dfrac{\mathbf{M}(\xi(k)-m\}\ \{\xi(k-1)-m\}}{\mathbf{D}^2\xi(k)}$. Másrészt ismeretes (lásd pl. ROSENBLATT [11]), hogy ugyanakkor $\xi(n)$ eleget tesz a

(1. 1) $$\xi(n+1)-\varrho\xi(n) = \zeta(n+1) \quad (\text{feltéve, hogy } \mathbf{M}\xi(n)=0)$$

differencia egyenletnek, ahol $\zeta(n)$ egy független normális eloszlású valószínűségi változó sorozat (ún. fehér zaj) és $\zeta(n)$ független $\xi(n-1)$-től. Ha $\mathbf{D}^2\zeta(n)=\sigma_\zeta^2$, nyilván fennáll a

(1. 2) $$\sigma_\zeta^2=(1-\sigma^2)\delta_\xi^2$$

összefüggés.

Az (1. 1) összefüggésből következik, hogy a $\xi(1), \dots, \xi(n)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, ha $\mathbf{M}\xi(k)=m$, a következő alakú

(1. 3) $$p_{\xi(1),\dots,\xi(n)}(x_1,\dots,x_n)=(2\pi)^{-n}\sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(x_1-m)^2(1-\varrho^2)+\sum_{i=2}^{n}(x_i-\varrho x_{i-1}-m(1-\varrho))^2\right]\right\} =$$

$$=(2\pi)^{-n}\sigma_\zeta^{-n}(1-\varrho^2)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(x_1-m)^2(1-\varrho^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i=2}^{n}(x_i-\varrho x_{i-1}-m(1-\varrho^2))^2\right]\right\},$$

vagy matrix alakban

$$p_{\xi(1),\dots,\xi(n)}(x_1,\dots,x_n)=(2\pi)^{-n}\sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\varrho_\xi^2(1-\varrho^2)}(X-m)R_n^{-1}(X-m)^*\right\}$$

ahol

$$R_n^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\varrho & 0 & 0 & \dots & 0\\ -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1+\varrho^2 & -\varrho\\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\varrho & 1 \end{pmatrix}$$

$$X-m=(x_1-m,\dots,x_n-m),\ (X-m)^*=\begin{pmatrix}x_1-m\\ \vdots\\ x_n-m\end{pmatrix}.$$

A $\xi(2), \dots, \xi(n)$ valószínűségi változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x_1$ feltétel mellett

(1. 4) $$p(x_2,\dots,x_n|\xi(1)=x_1)=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\sigma_\zeta^{-(n-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sum_{2}^{n}(x_i-\varrho x_{i-1}-m(1-\varrho))^2\right\}$$

lesz.

A maximum likelihood becslések vizsgálata előtt nézzük meg a sűrűségfüggvény logaritmusa differenciálhányadosának a viselkedését. Legyenek az ismeretlen paraméterek m, σ_ξ^2, ϱ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$R_n^{(1)}=\frac{\partial\log p}{\partial m}=\frac{1}{\sigma_\xi^2}\left\{(x_1-m)+\frac{1}{1+\varrho}\sum_{i=2}^{n}(x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m))\right\},$$

(1. 5) $$R_n^{(2)}=\frac{\partial\log p}{\partial\sigma_\xi^2}=-\frac{n}{2\sigma_\xi^2}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma_\xi^4}\left\{(x_1-m)^2+\frac{1}{1-\varrho^2}\sum_{2}^{n}(x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m))^2\right\},$$

$$R_n^{(3)}=\frac{\partial\log p}{\partial\varrho}=\frac{(n-1)\varrho}{1-\varrho^2}-\frac{\varrho}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\sum_{2}^{n}[x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m)]^2+$$

$$+\frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\sum_{2}^{n}[x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m)](x_{i-1}-m)].$$

Ha viszont az ismeretlen paramétereknek az m, σ_ζ^2, ϱ mennyiségeket vesszük, a megfelelő deriváltak alakja a következő lesz:

$$H_n^{(1)}=\frac{\partial\log p}{\partial m}=\frac{1-\varrho}{\sigma_\zeta^2}\left\{(1+\varrho)(x_1-m)+\sum_{2}^{n}(x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m))\right\},$$

(1. 6) $$H_n^{(2)}=\frac{\partial\log p}{\partial\sigma_\xi^2}=-\frac{n}{2\sigma_\zeta^2}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma_\zeta^4}\left\{(1-\varrho^2)(x_1-m)^2+\sum_{2}^{n}(x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m))^2\right\},$$

$$H_n^{(3)}=\frac{\partial\log p}{\partial\varrho}=-\frac{\varrho}{1-\varrho^2}+\frac{1}{\sigma_\zeta^2}\left\{\varrho(x_1-m)^2+\sum_{2}^{n}(x_i-m-\varrho(x_{i-1}-m))(x_{i-1}-m)\right\}.$$

Felhasználva a már említett $\mathbf{M}(\xi(i)-m)(\zeta(i+k)-m)=0$ (ha $k\geqq 1$) és a *Gauss* eloszlású változókra jellemző (feltéve, hogy $\mathbf{M}\xi_i=0$)

$$\mathbf{M}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4=\mathbf{M}\xi_1\xi_2\mathbf{M}\xi_3\xi_4+\mathbf{M}\xi_1\xi_3\mathbf{M}\xi_2\xi_4+\mathbf{M}\xi_1\xi_4\mathbf{M}\xi_2\xi_3$$

összefüggést, könnyen kiszámítható (bár hosszadalmas számolást igényel), hogy

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(1)} = \mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(1)} = \frac{2+(n-2)(1-\varrho)}{(1+\varrho)\sigma_\xi^2},$$

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(2)} = \mathbf{M} R_n^{(2)} R_n^{(2)} = \frac{n}{2\sigma_\xi^4}$$

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(3)} = \mathbf{M} R_n^{(3)} R_n^{(3)} = \frac{(n-1)(1+\varrho^2)}{(1-\varrho^2)^2}, \tag{1. 7}$$

$$\mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(2)} = \mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{M} R_n^{(2)} R_n^{(3)} = -\frac{(n-1)\varrho}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}$$

és hasonló módon

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(1)} = \frac{(1-\varrho)[2+(n-2)(1-\varrho)]}{\sigma_\zeta^2},$$

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(2)} = \frac{n}{2\sigma_\zeta^4},$$

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(3)} = \frac{n-1}{1-\varrho^2} + \frac{2\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2}, \tag{1. 8}$$

$$\mathbf{M} H_n^{(1)} H_n^{(2)} = \mathbf{M} H_n^{(1)} H_n^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{M} H_n^{(2)} H_n^{(3)} = \frac{\varrho}{\sigma_\zeta^2(1-\varrho^2)}, \quad \frac{\mathbf{M} H_n^{(2)} H_n^{(3)}}{\mathbf{D} H_n^{(2)} \mathbf{D} H_n^{(3)}} = \frac{\varrho\sqrt{2}}{\sqrt{n[(n-1)(1-\varrho^2)+2\varrho^2]}}.$$

Mint látható, ha mindhárom paraméter m, σ_ξ^2, ϱ (vagy m, σ_ζ^2, ϱ) ismeretlen (1.5) (vagy (1.6))-ból a maximum likelihood becslések meghatározása igen fáradságos s a kapott eredmények aszimptotikus viselkedésének vizsgálata nem remélhető. Ehelyett inkább egy WALDtól származó ötlet alapján előbb az $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$ (vagy $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$, $H_n^{(3)}$) mennyiségeknek az aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, majd megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása (normálva a megfelelő szórásokkal) az ismeretlen paraméterekben egyenletesen ugyanazzal az eloszlással bír mint $R_n^{(1)}/\mathbf{D}R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}/\mathbf{D}R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}/\mathbf{D}R_n^{(3)}$. A normáló tényező, mellyel szorozni kell éppen $\mathbf{D}R_n^{(1)}$, $\mathbf{D}R_n^{(2)}$, $\mathbf{D}R_n^{(3)}$ lesz.

Az (1. 7) és (1. 8) szórások összevetéséből azonnal látható pl., hogy ha ϱ közel van 1-hez m maximum likelihood becslése nem konzisztens az (1. 7) esetben, míg az (1. 8) esetben a szórás nem is marad véges.

Mivel bennünket a becslések aszimptotikus viselkedése érdekel elsősorban, elégséges az (1. 4) feltételes sűrűségfüggvény alapján adódó becsléseket tekinteni. Ekkor ugyanis pl.

$$\bar{H}_n^{(1)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial m} = \frac{1-\varrho}{\sigma_\zeta^2} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m)),$$

$$\bar{H}_n^{(2)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial \sigma_\zeta^2} = -\frac{n-1}{2\sigma_\zeta^2} + \frac{1}{2\sigma_\zeta^4} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m))^2, \tag{1. 9}$$

$$\bar{H}_n^{(3)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial \varrho} = \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m))(x_{i-1}-m),$$

és a megfelelő maximum likelihood egyenletek megoldása egyszerűbbé válik. Az $\hat{m}$, $\hat{\sigma}_\zeta^2$, $\hat{\varrho}$ becslések között a $\bar{H}_n^{(1)}=0$, $\bar{H}_n^{(2)}=0$, $\bar{H}_n^{(3)}=0$ egyenletekből a következő összefüggések adódnak:

$$\hat{m} = \frac{x_n - \hat{\varrho}x_1 + (1-\hat{\varrho}) \sum_2^n x_i}{(n-1)(1-\hat{\varrho})},$$

$$\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_2^n (x_i - \hat{m} - \hat{\varrho}(x_{i-1}-\hat{m}))^2,$$

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_2^n (x_i-\hat{m})(x_{i-1}-\hat{m})}{\sum_2^n (x_{i-1}-\hat{m})^2}.$$

Innen látható, ha feltesszük, hogy megfigyelési sorozatunk ciklikus (azaz $x_n = x_1$) m a számtani középpel becsülhető, míg ϱ becslésére az ún. széria korrelációs együtthatót kapjuk. Ezek az egyszerűsítések azonban nem mindig megengedhetők,[1] gondoljunk csak arra, hogy $\varrho \to 1$ esetén m legjobb becslése $\frac{x_1+x_n}{2}$ lesz, amint azt alább látni fogjuk.

Az (1. 3) sűrűségfüggvény alakjából leolvasható a paraméterekhez tartozó elégséges statisztikarendszer $\left\{x_1+x_n, \sum_2^{r-1} x_i, x_1^2+x_n^2, \sum_2^{n-1} x_i^2, \sum_2^n x_i x_{i-1}\right\}$.

2. §. Az egyes paraméterekre vonatkozó becslések s azok eloszlásai

1. Abban az esetben, amikor egyetlen ismeretlen paraméterünk van, a következő becsléseket kapjuk.

[1] A folyamatok statisztikájával foglalkozó irodalomban azonban igen gyakran lehet találkozni ilyen egyszerűsítésekkel (lásd pl. T. W. ANDERSON [1] cikkét s az ott szereplő irodalmat) s ezért szükséges a jelen dolgozattal való kapcsolatuk megmutatása.

Legyen m ismeretlen, akkor m maximum likelihood becslése (vö. az I. rész (2. 6) összefüggésével)

$$\hat{m} = \frac{x_1 + x_n + (1-\varrho)\sum_{2}^{n-1} x_i}{2+(1-\varrho)(n-2)} \tag{2. 1}$$

lesz, ahol $\hat{m}$ *Gauss*-eloszlású $\left(m, \sigma_\xi \sqrt{\frac{1+\varrho}{2+(n-2)(1-\varrho)}}\right)$ paraméterekkel. Legyen $m=0$, akkor σ_ξ^2 maximum likelihood becslése

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{n(1-\varrho^2)}\left\{(1-\varrho^2)x_1^2 + \sum_{2}^{n}(x_i - \varrho x_{i-1})^2\right\} \tag{2. 2}$$

lesz. A $\hat{\sigma}_\xi^2$ becslés χ^2 eloszlású változó σ_ξ^2 várható értékkel és

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{2\sigma_\zeta^2 i\alpha}{n(1-\varrho^2)}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{2\sigma_\xi^2 i\alpha}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \tag{2. 3}$$

alakú karakterisztikus függvénnyel.

Legyen ismét $m=0$, σ_ξ^2 (vagy σ_ζ^2) ismert és ϱ ismeretlen. A maximum likelihood becsléshez harmadfokú egyenlet megoldására van szükség, viszont a feltételes valószínűségeloszlás alapján (1. 9)-ből a

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_{2}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{1}^{n-1} x_i^2}. \tag{2. 4}$$

becslést kapjuk.

Az ergod-tétel alapján

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i) \to \sigma_\xi^2 \tag{2. 5}$$

négyzetes középben és 1 valószínűséggel, míg a

$$\sum_{2}^{n}\xi(i)\xi(i-1) - \varrho\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i) = \sum_{2}^{n}\xi(i-1)(\xi(i)-\varrho\xi(i-1)) = \sum_{2}^{n}\xi(i-1)\zeta(i) \tag{2. 6}$$

változó szórásnégyzete $(n-1)(1-\varrho^2)\sigma_\xi^2 = (n-1)\sigma_\zeta^2$. Innen adódik, hogy a

$$\sqrt{n-1}(\hat{\varrho}-\varrho) = \sqrt{n-1}\,\frac{\sum_{2}^{n}\xi(i)\xi(i-1) - \varrho\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)}{\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)} =$$

$$= \frac{\sum_{2}^{n}\xi(i)\xi(i-1) - \varrho\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)}{\sum_{1}^{n-1}\frac{\xi^2(i)}{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

mennyiség szórásnégyzete aszimptotikusan $(1-\varrho^2)$-el lesz egyenlő.

A $\hat{\varrho}$ becslés aszimptotikusan normális eloszlású minden fix ϱ értékre, ez következik pl. VOLKONSZKIJ és ROZANOV [13] eredményeiből, azonban az aszimptotikusan egyenletes normalitás csak a $-1+\varepsilon<\varrho<1-\varepsilon$ (ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges) intervallumban áll fenn. Ebből következik, hogy konfidencia intervallumok (alsó és felső becslések) ϱ-ra csak a $(-1, 1)$ intervallum belsejében szerkeszthetők. ϱ becslésének problémájával foglalkozik LINNIK [7] cikkében.

2. Két ismeretlen paraméter esetén csak azt az esetet említjük meg, amikor az ismeretlen paraméterek m és ϱ. Azzal az esettel, amikor $\sigma_\xi^2=1$ LUVSZANCEREN foglalkozott [8], [9] és megmutatta, hogy m és ϱ maximum likelihood becslései $-\infty<m<\infty$ és $-1<\varrho<1$ intervallumban egyenletesen aszimptotikusan normális eloszlásúak

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi\sqrt{\frac{1+\varrho}{2+(n-2)(1-\varrho)}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\varrho^2}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} \end{pmatrix}$$

kovariancia matrixszal. Bizonyítása azon alapul, hogy az $R_n^{(1)}$ és $R_n^{(2)}$ mennyiségek a megfelelő intervallumban egyenletesen aszimptotikusan normális eloszlásúak. Abban az esetben azonban, ha $\sigma_\zeta^2=1$ (és ez felel meg inkább a fizikai valóságnak és egyben az időben folytonos esetnek is) az aszimptotikusan egyenletes normalitás a becslések eloszlására már nem áll fenn a kérdéses $-\infty<m<\infty$, $-1<\varrho<1$ intervallumban. (Lásd majd az 5. §-ban). Megemlítjük még, hogy egy szűkebb intervallumban $-\infty<m<\infty$, $-1+\varepsilon<\varrho<1-\varepsilon$ az aszimptotikusan egyenletes normalitás fennállása következik általános eredményekből (lásd pl. VOLKONSZKIJ—ROZANOV [13]).

A $\sigma_\xi^2=1$ és $\sigma_\zeta^2=1$ megkötések esetén adódó különbség érzékelhető a (1. 7) és (1. 8) összefüggések megfelelő szórásainak összehasonlításából is.

3. §. A likelihood függvény deriváltjainak együttes eloszlása

A maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához első lépésként megnézzük az $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$ változók együttes eloszlásának viselkedését $n\to\infty$ esetén. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{R}_n^{(1)} = \frac{R_n^{(1)}}{\mathbf{D}R_n^{(1)}},\quad \tilde{R}_n^{(2)} = \frac{R_n^{(2)}}{\mathbf{D}R_n^{(2)}},\quad \tilde{R}_n^{(3)} = \frac{R_n^{(3)}}{\mathbf{D}R_n^{(3)}}.$$

Igaz a következő

3. 1. TÉTEL: *Az $\tilde{R}_n^{(1)}, \tilde{R}_n^{(2)}, \tilde{R}_n^{(3)}$ valószínűségi változók $f_n(t_1, t_2, t_3)$ karakterisztikus függvénye $n\to\infty$ esetén a t_1, t_2, t_3 változók bármely véges intervallumában egyenletesen konvergál a* $(0, 0, 0)$ *várható értékű és*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varrho\sqrt{\frac{2}{1+\varrho^2}} \\ 0 & -\varrho\sqrt{\frac{2}{1+\varrho^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

korrelációs matrixú normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez. A konvergencia egyenletes a $-\infty < m < \infty$, $0 < \sigma_\xi^2 \leqq K < \infty$, $-1 < \varrho < 1$ tartományban, ahol K tetszőleges fix konstans.

Bizonyítás. Az (1. 3) matrix alakjából és az (1. 5), (1. 7) kifejezésekből azt kapjuk, hogy $\tilde{R}_n^{(1)}$, $\tilde{R}_n^{(2)}$, $\tilde{R}_n^{(3)}$ karakterisztikus függvénye

$$f_n(t_1, t_2, t_3) = \mathbf{M} \exp\{it_1 \tilde{R}_n^{(1)} + it_2 \tilde{R}_n^{(2)} + it_3 \tilde{R}_n^{(3)}\} = \tag{3. 1}$$

$$= c_n \int \dots \int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}(X-m) R_n^{-1} (X-m)^* + \right.$$

$$\left. + it_1 \tilde{R}_n^{(1)} + it_2 \tilde{R}_n^{(2)} + it_3 \tilde{R}_n^{(3)}\right\} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= c_n \exp\left\{-it_2 \sqrt{\frac{n}{2}} + it_3 \varrho \sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}}\right\} \int \dots \int \exp\left\{-\frac{1}{2}[YA_nY^* - Y\Lambda^*]\right\} dy_1 \dots dy_n$$

alakú, ahol

$$c_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_\xi^{-n} (1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{3. 2}$$

$$Y = X - m,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 \cdots & 0 \\ 0 & b & a & b \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ 0 & & & a & b \\ 0 & & & b & a_1 \end{pmatrix} \tag{3. 3}$$

és

$$a_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right],$$

$$a = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right],$$

$$b = \frac{-1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[\varrho\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{it_3(1+\varrho^2)}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right], \tag{3. 4}$$

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} c \\ (1-\varrho)c \\ \vdots \\ (1-\varrho)c \\ c \end{pmatrix}, \quad c = \frac{2it_1}{\sigma_\xi \sqrt{(1+\varrho)[2+(n-2)(1-\varrho)]}}.$$

Válasszuk meg a d_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ számokat úgy, hogy kielégítsék a következő egyenletrendszert

$$\begin{aligned} a_1 d_1 + bd_2 &= \frac{c}{2} \\ bd_3 + ad_2 + bd_1 &= (1-\varrho)\frac{c}{2} \\ &\vdots \\ bd_{n-1} + ad_{n-2} + bd_{n-3} &= (1-\varrho)\frac{c}{2} \\ bd_{n-1} + a_1 d_n &= \frac{c}{2}. \end{aligned} \tag{3. 5}$$

Az $y_i = z_i - d_i$ leképezéssel $YA_nY^* - Y\Lambda^*$ a következő alakba megy át:

$$(z_1 - d_1, \dots, z_n - d_n) A_n \begin{pmatrix} z_1 - d_1 \\ \vdots \\ z_n - d_n \end{pmatrix} - D_n, \tag{3. 6}$$

ahol

$$D_n = a_1 d_1^2 + a(d_2^2 + \dots + d_{n-1}^2) + a_1 d_n^2 + 2b(d_1 d_2 + \dots + d_{n-1} d_n) = \tag{3. 7}$$

$$= \frac{c}{2}(d_1 + d_n) + \frac{(1-\varrho)c}{2} \sum_2^{n-1} d_i.$$

A (3. 5) egyenletrendszer általános megoldása

$$d_i = d + \theta_1 u_1^i + \theta_2 u_2^i, \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{3. 8}$$

ahol

$$d = \frac{(1-\varrho)c}{2(a+2b)}, \tag{3. 9}$$

és u_1, u_2 a

$$bu^2 + au + b = 0$$

egyenlet gyökei. θ_1 és θ_2 meghatározása a (3.5) egyenletrendszer első és utolsó egyenlete segítségével történik:

$$\theta_1 = \left(\frac{c}{2} - d(a_1 + b)\right) \frac{a_1 u_2^n + bu_2^{n-1} - (a_1 u_2 + bu_2^2)}{(a_1 u_1 + bu_1^2)(a_1 u_2^n + bu_2^{n-1}) - (a_1 u_2 + bu_2^2)(a_1 u_1^n + bu_1^{n-1})},$$

(3. 10)

$$\theta_2 = \left(\frac{c}{2} - d(a_1 + b)\right) \frac{a_1 u_1 + bu_1^2 - (a_1 u_1^n + bu_1^{n-1})}{(a_1 u_1 + bu_1^2)(a_1 u_2^n + bu_2^{n-1}) - (a_1 u_2 + bu_2^2)(a_1 u_1^n + bu_1^{n-1})}.$$

Újabb helyettesítéssel, legyen most $z_i - d_i = x_i$ a (3. 1) karakterisztikus függvény a következő alakú lesz:

$$(3.11)\qquad f_n(t_1, t_2, t_3) = c_n \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}} + \frac{D_n}{2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\int\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2}XA_nX^*\right\}dx_1\ldots dx_n.$$

Mivel (lásd pl. CRAMER [5] 136 o.)

$$\int\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2}XA_nX^*\right\}dx_1\ldots dx_n = (2\pi)^{n/2}|A_n|^{-1/2},$$

és így

$$(3.12)\qquad f_n(t_1, t_2, t_3) = (2\pi)^{n/2}c_n|A_n|^{-1/2}\exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}} + \frac{D_n}{2}\right\}.$$

(3. 3)-ból látható, hogy

$$(3.13)\qquad |A_n| = a_1|\tilde{A}_{n-2}| - 2b^2a_1|\tilde{A}_{n-3}| + b^4|\tilde{A}_{n-4}|,$$

ahol $|\tilde{A}_n|$ a következő differenciaegyenletnek tesz eleget:

$$(3.14)\qquad |\tilde{A}_n| = a|\tilde{A}_{n-1}| - b^2|\tilde{A}_{n-2}|.$$

Ily módon könnyű megmutatni, hogy

$$(3.15)\qquad |\tilde{A}_n| = \alpha_1 v_1^n + \alpha_2 v_2^n,$$

ahol v_1, v_2 a

$$v^2 - av + b^2 = 0$$

egyenlet gyökei, míg az

$$|\tilde{A}_1| = a, \quad |\tilde{A}_2| = a^2 - b^2$$

feltételekből adódik, hogy

$$(3.16)\qquad \alpha_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{v_2}{v_1 - v_2}.$$

A (3. 15) és (3. 13) kifejezésekbe behelyettesítve kapjuk az alábbi két összefüggést:

$$(3.17)\qquad |\tilde{A}_n| = \frac{v_1^{n+1} - v_2^{n+1}}{v_1 - v_2},$$

$$(3.18)\qquad |A_n| = \frac{1}{v_1 - v_2}\left[v_1^{n-3}(a_1v_1 - b^2)^2 - v_2^{n-3}(a_1v_2 - b^2)^2\right] =$$

$$= \frac{v_1^{n-3}(a_1v_2 - b^2)^2}{v_1 - v_2}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-3}\frac{(a_1v_2 - b^2)^2}{(a_1v_2 - b^2)^2}\right].$$

A számítások egyszerűsítésére legyen

$$f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3) = \exp\left\{\frac{D_n}{2}\right\},$$

$$f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = |A_n|^{-\frac{1}{2}}\sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}}\right\}$$

és vizsgáljuk meg külön mindkét függvény aszimptotikus viselkedését. A továbbiakban az $M_i, \overline{M}_i$ konstansok a t_1, t_2, t_3 változók tetszőleges véges $T_1 \times T_2 \times T_3$ intervallumában és a $\varrho \in (-1, 1)$, $\sigma_\xi^2 \in (0, K]$ tartományban egyenletesen korlátos mennyiségeket jelölnek.

(3. 4) alapján

$$(3.19)\qquad v_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \right.$$

$$\left. + (1-\varrho^2)\sqrt{\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}}\,\right],$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_2\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} - \right.$$

$$\left. - (1-\varrho^2)\sqrt{\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}}\,\right].$$

Elegendően nagy n esetén

$$\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^{-2} = 1 + \frac{4it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{M_1}{n},$$

és

$$\left[1 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}\left(1 + \frac{4it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{M_1}{n}\right)\right]^{1/2} = 1 + \frac{2t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}},$$

ezért (3. 19) a következő alakba írható:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}}\right],$$

(3. 19′)

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\sigma^2)}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} - \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}}\right].$$

A $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \theta\frac{x^3}{3}$ (ahol $|\theta| < 1$ ha $|x| < \frac{1}{2}$) sorfejtés segítségével (3. 19′)

alapján

$$v_1^{-\frac{n-1}{2}} = \sigma_\xi^{-(n-1)}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}\left[-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2\varrho i t_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)} - \frac{4\varrho t_2 t_3}{\sqrt{2n(n-1)(1+\varrho^2)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2t_2^2}{n} + \frac{4\varrho^2 t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}\right) + \frac{M_3'}{n^{3/2}}\right]\right\}$$

és ily módon

$$v_1^{-\frac{n-1}{2}} = \sigma_\xi^{-(n-1)}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{it_2 \frac{n-1}{\sqrt{2n}} - it_3 \varrho \sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}} - \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{2(1+\varrho^2)} + \right. \tag{3.20}$$

$$\left. + \frac{2\varrho t_2 t_3}{\sqrt{\frac{2n}{n-1}(1+\varrho^2)}} - \frac{t_2^2}{2}\frac{n-1}{n} - \frac{\varrho^2 t_3^2}{1+\varrho^2}\right\}\left(1 + \frac{M_3}{\sqrt{n}}\right).$$

Könnyű kiszámolni, hogy

$$a_1 v_1^2 - b^2 = \frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)}\left[\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + 2it_3\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)\frac{\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \frac{M_4}{n}\right],$$

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{M_5}{n}\right], \tag{3.21}$$

$$v_1(v_1 - v_2)^{1/2} = \frac{1}{\sigma_\xi^3(1-\varrho^2)}\left[1 + \frac{M_6}{\sqrt{n}}\right],$$

$$a_1 v_2^2 - b^2 = \frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)} \cdot \frac{M_7}{n}.$$

(3. 21), (3. 20) és (3. 18) alapján nyerjük az

$$f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{1}{2n}} - \frac{t_2^2}{2}\frac{n-1}{n} - \frac{t_3^2}{2} + \frac{2\varrho t_2 t_3}{\sqrt{2\frac{n}{n-1}(1+\varrho^2)}}\right\}\left(1 + \frac{M_8}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.22}$$

összefüggést.

Az $f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3)$ függvény aszimptotikus viselkedése a következőképpen vizsgálható. (3. 7)—(3. 10) alapján

$$D_n = \frac{c}{2}(2d + \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 + \theta_1 u_1^n + \theta_2 u_2^n) + \frac{(1-\varrho)c}{2}\left[(n-2)d + \right.$$

$$\left. + \theta_1 u_1^2 \frac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1} + \theta_2 u_2^2 \frac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}\right] = \frac{c^2(1-\varrho)}{4(a+2b)}[2 + (n-2)(1-\varrho)] +$$

$$+ \frac{c^2}{4(a+2b)}[a + 2b - (1-\varrho)(a_1+b)] \cdot g_n(t_1, t_2, t_3),$$

ahol

$$g_n(t_1, t_2, t_3) = \left\{\left[1 + u_1^{n-1} + (1-\varrho)\frac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1}\right]\frac{\theta_1}{\frac{c}{2} - d(a_1+b)} + \right.$$

$$\left. + \left[1 + u_2^{-(n-1)} + (1-\varrho)u_2^{-n+2}\frac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}\right]\frac{\theta_2}{\frac{c}{2} - d(a_1+b)}\right\}.$$

Ily módon

$$D_n = -t_1^2\left(1 + \frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t_1^2}{2 + (1-\varrho)(n-2)}\left(1 + \frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right)\frac{2it_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} \cdot \tag{3.23}$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_\xi^2(1+\varrho)} \cdot g_n(t_1, t_2, t_3).$$

Mivel u_1 és u_2 eleget tesznek a

$$u_1 = -\frac{v_2}{b}, \quad u_2 = -\frac{v_1}{b}, \quad u_1, u_2 = 1, \quad |u_1| \leqq 1, \quad |u_2| \geqq 1 \tag{3.24}$$

összefüggéseknek, azért egyszerű megmutatni, hogy

$$a_1 u_2 + b = \frac{1}{b}\frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + 2it_3\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)\frac{\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \frac{\overline{M}_2}{n}\right],$$

$$a_1 u_1 + b = \frac{1}{b}\frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)} \cdot \frac{\overline{M}_3}{n}, \tag{3.25}$$

$$a_1 + bu_2 = a_1 - v_1 = \frac{\overline{M}_4}{\sigma_\xi^2 \cdot n},$$

$$a_1 + bu_1 = a_1 - v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{\overline{M}_5}{n}\right],$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left[\varrho - \frac{\overline{M}_6}{\sqrt{n}}\right],$$

$$b = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left(-\varrho + \frac{\overline{M}_7}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{ahol} \quad \overline{M}_7 \neq 0 \quad \text{ha} \quad \varrho = 0.$$

Jelölje az egyenletesen korlátos $1/\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)(b^2 - v_1 a_1)$ mennyiséget $\overline{M}_8$ és

$n\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)(b^2-v_2a_1)$ mennyiséget $\bar{M}_3$, akkor

$$\frac{(a_1u_2+b)-(a_1+bu_2)u_2^{-(n-1)}}{(a_1+bu_1)(a_1u_2+b)-\dfrac{u_1^{n-2}}{u_2^{n-2}}(a_1+bu_2)(a_1u_1+b)} = \tag{3.26}$$

$$= \sigma_\xi^2 \frac{1-\bar{M}_{10}\left(-\varrho+\dfrac{\bar{M}_7}{\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{\bar{M}_4}{n}\right)\bar{M}_8}{1-\dfrac{\bar{M}_5}{\sqrt{n}}-\bar{M}_9\dfrac{\bar{M}_4}{n}\cdot\dfrac{\bar{M}_3}{n}\cdot\bar{M}_8} = \sigma_\xi^2\cdot\bar{M}_{11},$$

ahol

$$\left|\frac{u_1}{u_2}\right|^{n-1} = \bar{M}_9 \leqq 1, \quad |u_2|^{-(n-1)} = \bar{M}_{10} \leqq 1.$$

Ugyanígy

$$u_2\frac{a_1+bu_1-(a_1u_1+b)u_1^{n-2}}{(a_1+bu_1)(a_1u_2+b)-\dfrac{u_1^{n-2}}{u_2^{n-2}}(a_1+bu_2)(a_1u_1+b)} = \sigma_\xi^2\cdot\bar{M}_{14},$$

ami az

$$|u_1| = \bar{M}_{13} \leqq 1, \quad v_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1+\frac{\bar{M}_{12}}{\sqrt{n}}\right]$$

összefüggésekből adódik. Az u_1 és u_2-re vonatkozó (3.24) összefüggésekből azt kapjuk, hogy az

$$\frac{1}{1+\varrho}\,\frac{1+u_1^{n-1}+(1-\varrho)u_1\dfrac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1}}{2+(n-2)(1-\varrho)} = \bar{M}_{15}, \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{1+\varrho}\,\frac{1+u_2^{-(n-1)}+(1-\varrho)u_2^{-n-2}\dfrac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}}{2+(n-2)(1-\varrho)} = \bar{M}_{16}$$

mennyiségek egyenletesen korlátosak. Ily módon a (3.27), (3.26) és (3.23) összefüggések alapján

$$D_n = -t_1^2\left(1+\frac{\bar{M}_1}{\sqrt{n}}\right) - \tag{3.28}$$

$$-t_1^2\left(1+\frac{\bar{M}_1}{\sqrt{n}}\right)\frac{2it_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}[\bar{M}_{15}\cdot\bar{M}_{11}+\bar{M}_{16}\cdot\bar{M}_{14}],$$

és végül

$$f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3) = \exp\left\{\frac{D_n}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}\right\}\left(1+\frac{\bar{M}_{17}}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.29}$$

A (3.12), (3.22) és (3.29) összefüggésekből $\tilde{R}_n^{(1)}$, $\tilde{R}_n^{(2)}$, $\tilde{R}_n^{(3)}$ karakterisztikus függvényére az

$$f_n(t_1, t_2, t_3) = f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3)\cdot f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = \tag{3.30}$$

$$= \exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}-\frac{t_3^2}{2}+\frac{2\varrho t_2t_3}{\sqrt{2(1+\varrho^2)}}\right\}\left(1+\frac{M}{\sqrt{n}}\right)$$

kifejezést kapjuk. Ebből viszont következik, hogy $f_n(t_1, t_2, t_3)$, ha $n\to\infty$ a paraméterek tetszőleges véges $T_1\times T_2\times T_3$ tartományában a normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez tart, mégpedig a $-\infty<m<\infty$, $-1<\varrho<1$, $0<\sigma_\xi^2\leqq K<\infty$ tartományban egyenletesen. Ezzel a 3.1 tételt bebizonyítottuk. A megfelelő formulák átalakításával meghatározható a konvergencia gyorsasága is.

4. §. A maximum likelihood becslések aszimptotikus eloszlása

A 3.1 tétel alapján most már megvizsgálhatjuk az

$$R_n^{(1)}=0, \quad R_n^{(2)}=0, \quad R_n^{(3)}=0 \tag{4.1}$$

egyenletek megoldásából adódó maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedését. Eloszlások konvergenciáján továbbra is a gyenge konvergenciát értjük (lásd GNYEGYENKO—KOLMOGOROV [6]). Bebizonyítjuk a következő tételt:

4.1. TÉTEL: *A (4.1) egyenletrendszernek $n\to\infty$ esetén 1-hez tartó valószínűséggel van olyan $\hat{m}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\hat{\sigma}_\xi^2(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\hat{\varrho}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ megoldása, hogy az*

$$(\hat{m}_n-m)\sqrt{\frac{2+(n-2)(1-\varrho)}{\sigma_\xi^2(1+\varrho)}}, \quad (\hat{\sigma}_{\xi,n}^2-\sigma_\xi^2)\frac{1}{\sigma_\xi^2}\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad (\hat{\varrho}_n-\varrho)\frac{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}{1-\varrho^2}$$

változók együttes eloszlása $n\to\infty$ esetén tart az $\tilde{R}_n^{(1)}$, $\tilde{R}_n^{(2)}$, $\tilde{R}_n^{(3)}$ változók határeloszlásához, mégpedig a valódi paraméter értékek $-\infty<m<\infty$, $0<\sigma_\xi^2\leqq k<\infty$, $-1<\varrho<1$ tartományában egyenletesen.

Bizonyítás. A (4.1) egyenletrendszer helyett tekintsük a vele ekvivalens

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} &= (1+\varrho)\sigma_\xi^2R_n^{(1)} = 0 \\ L_n^{(2)} &= 2(1-\varrho)\sigma_\xi^4R_n^{(2)} = 0 \\ L_n^{(3)} &= (1-\varrho^2)\sigma_\xi^2R_n^{(3)} = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenletrendszert. (4.2) baloldalai m, σ_ξ^2, ϱ-ban polinomok, ezért *Taylor*-sorba fejtve őket az m_0, $\sigma_{\xi,0}^2$, ϱ_0 valódi értékek körül a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} &L_n^{(1)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0)+\left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\right|_{m_0,\sigma_0^2,\varrho_0}(m-m_0)+\left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial \varrho}\right|_{m_0,\sigma_0^2,\varrho_0}(\varrho-\varrho_0)+\ldots = 0 \\ &L_n^{(2)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0)+\left.\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial m}\right|_{m_0,\sigma_0^2,\varrho_0}(m-m_0)+\ldots = 0 \\ &L_n^{(3)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0)+\left.\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial m}\right|_{m_0,\sigma_0^2,\varrho_0}(m-m_0)+\ldots = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A (4. 3) egyenletrendszerben szereplő deriváltak kiszámítása nem okoz nehézséget, azonban a pontos képletek kiírását mellőzzük. Az

$$m - m_0 = x\sqrt{\frac{\sigma_0^2(1+\varrho_0)}{2+(n-2)(1-\varrho_0)}},$$

$$\sigma_\xi^2 - \sigma_0^2 = y\sigma_0^2\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\varrho - \varrho_0 = z\frac{1-\varrho_0^2}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}},$$

helyettesítéssel és (4. 3)-ban az első egyenletnek a $\sigma_0\sqrt{1+\varrho_0}\sqrt{2+(n-2)(1-\varrho_0)}$ mennyiséggel, a másodiknak az $(1-\varrho_0^2)\sigma_0^2\sqrt{2n}$ mennyiséggel, míg a harmadiknak a $(1-\varrho_0^2)\sigma_0^2\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}$ mennyiséggel való osztásával a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\tilde{R}_n^{(1)} + x\left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\right|_0 \frac{1}{2+(n-2)(1-\varrho_0)} + \ldots = 0$$

$$\text{(4. 4)} \qquad \tilde{R}_n^{(2)} + y\left.\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial \sigma_\xi^2}\right|_0 \frac{1}{n(1-\varrho_0^2)} + \ldots = 0$$

$$\tilde{R}_n^{(3)} + z\left.\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial \varrho}\right|_0 \frac{1}{\sigma_0^2(n-1)(1+\varrho_0^2)} + \ldots = 0.$$

Könnyű megmutatni, hogy

$$\left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\right|_0 \cdot \frac{1}{2+(n-2)(1-\varrho_0)} = -1,$$

$$\left.\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial \sigma_\xi^2}\right|_0 \cdot \frac{1}{n(1-\varrho_0^2)} = -1,$$

$$\left.\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial \varrho}\right|_0 \cdot \frac{1}{\sigma_0^2(n-1)(1+\varrho_0^2)} \to -1,$$

ahol a konvergencia valószínűségben értendő és egyenletes a $-\infty < m_0 < \infty$, $0 < \sigma_0^2 \leqq K < \infty$, $-1 < \varrho_0 < 1$ tartományban. A (4. 4) egyenletrendszerben szereplő további tagok nullához tartanak valószínűségben, mégpedig egyenletesen a valódi paraméterértékek fenti tartományában. Elég nagy n értékekre, a 3. 1 tétel alapján, az $|R_n^{(i)}|$ és $|\tilde{R}_n^{(i)}|/|R_n^{(j)}|$ $(i, j = \overline{1, 3})$ mennyiségek valószínűségben korlátosak, egyenletesen ugyanabban a tartományban. Ezért az

$$\text{(4. 5)} \qquad \begin{aligned} 1-\varepsilon_1+\ldots &= 0 \\ 1-\varepsilon_2+\ldots &= 0 \\ 1-\varepsilon_3+\ldots &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek, ahol

$$\varepsilon_1 = \frac{x}{\tilde{R}_n^{(1)}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{y}{\tilde{R}_n^{(2)}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{z}{\tilde{R}_n^{(3)}}$$

elég nagy n-re 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel van olyan $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \varepsilon_3^{(n)}$ megoldása, mely $1-\delta$ és $1+\delta$ közé esik (ahol $\delta > 0$ tetszőleges) a $-\infty < m_0 < \infty$, $0 < \sigma_0^2 \leqq K$, $-1 < \varrho_0 < 1$ tartományban egyenletesen. Ebből következik, hogy az

$$x_n = \varepsilon_1^{(n)} \cdot \tilde{R}_n^{(1)}, \quad y_n = \varepsilon_2^{(n)} \cdot \tilde{R}_n^{(2)}, \quad z = \varepsilon_3^{(n)} \cdot \tilde{R}_n^{(3)}$$

változók határeloszlása $n \to \infty$ esetén megegyezik az $\tilde{R}_n^{(1)}, \tilde{R}_n^{(2)}, \tilde{R}_n^{(3)}$ változók határeloszlásával, mivel $\varepsilon_i^{(n)} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ ha $n \to \infty$ egyenletesen a $-\infty < m_0 < \infty$, $0 < \sigma_0^2 \leqq K < \infty$, $-1 < \varrho_0 < 1$ tartományban.

Ezzel a 4. 1 tételt bebizonyítottuk.

Az

$$x_n = (\hat{m}_n - m_0)\sqrt{\frac{2+(n-2)(1-\varrho_0)}{\sigma_0^2(1-\varrho_0)}},$$

$$y_n = (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_0^2)\frac{1}{\sigma_0^2}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$z_n = (\hat{\varrho}_n - \varrho_0)\frac{\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}}{1-\varrho_0^2}$$

összefüggésekből látható, hogy $\hat{\varrho}_n$ és $\hat{\sigma}_n^2$ becslések egyenletesen konzisztensek, míg az $\hat{m}_n$ becslésre ez nem áll fenn.

A 4. 1 tétel segítségével, valamint Cramer ismert tétele ([5] 281 o.) alapján az m, σ_ξ^2, ϱ paraméterekre megfelelő konfidencia tartományok szerkeszthetők.

5. §. Az időben folytonos folyamatra vonatkozó eredmények diszkrét megfelelői

Az előbbiekben már szerepelt, hogy az időben folytonos esetnek az felel meg, amikor az ismeretlen paramétereknek az m, σ_ξ^2, ϱ paramétereket tekintjük. Ekkor $n \to \infty$ esetén nem lesz igaz a $H_n^{(i)}$ (lásd (1. 6)) mennyiségek aszimptotikusan egyenletes normalitása. Igaz lesz viszont a $H_n^{(i)}$ mennyiségekre is 3. 1 tétel megfelelője s a 4. 1 tétel megfelelője, ha $\varkappa = (1-\varrho^2)n \to \infty$.

5. 1. Tétel: *$\varkappa \to \infty$ esetén a $\tilde{H}_n^{(i)} = H_n^{(i)}/\mathbf{D}H_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ valószínűségi változók eloszlása tart a* $\left(0, 0, 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *paraméterű normális eloszláshoz.*

Bizonyítás. A bizonyítás pontosan ugyanúgy történik, mint a 3. §-ban. A (3. 19) képletben szereplő v_1 és v_2 mennyiségek azonban a következő alakúak lesznek:

$$v_1 = \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{it_3 2\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{n-1}}+\right. \tag{5. 1}$$

$$\left.+(1-\varrho^2)\left\{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)^2-\frac{4i\varrho t_3}{\sqrt{(n-1)(1-\varrho^2)}}\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{4(1-\varrho^2)t_3^2}{n-1}\right\}^{1/2}\right],$$

$$v_2 = \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{it_3 2\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{n-1}}-\right.$$

$$\left.-(1-\varrho^2)\left\{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)^2-\frac{4i\varrho t_3}{\sqrt{(n-1)(1-\varrho^2)}}\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{4(1-\varrho^2)t_3^2}{n-1}\right\}^{1/2}\right].$$

(5. 1)-ből látható (3. 20) alapján, hogy aszimptotikusan normális eloszlás csak $\varkappa\to\infty$ esetén áll fenn.

$\varkappa\to\infty$ esetén a maximum likelihood becslésekkel ekvivalens becsléseket kapunk, ha a következő becsléseket tekintjük

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_1^n \xi(k), \quad \hat{\sigma}_\zeta^2 = (1-\hat{\varrho}^2)\hat{s}_\xi^2$$

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{(n-1)\hat{s}_\xi^2}\sum_2^n \eta(k)\eta(k-1), \tag{5. 2}$$

ahol

$$\eta(k) = \xi(k)-\hat{m}, \quad \hat{s}_\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta^2(k). \tag{5. 3}$$

Egyszerű számítások mutatják, hogy

$$\mathbf{M}\hat{m} = m, \quad \mathbf{D}^2\hat{m} = \frac{\sigma_\xi^2}{n}+\frac{2\varrho}{1-\varrho}\frac{\sigma_\xi^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbf{M}(\hat{\varrho}-\varrho) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{D}^2\hat{\varrho} = \frac{1-\varrho^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5. 4}$$

$$\mathbf{M}(\hat{\sigma}_\zeta^2-\sigma_\zeta^2) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{D}^2\sigma_\zeta^2 = \frac{2(1-\varrho^2)^2}{n}\sigma_\xi^4+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Az előbbihez hasonló módon bizonyítható az

5. 2. TÉTEL: *$\varkappa\to\infty$ esetén az*

$$\hat{m}\sim m, \quad \hat{\sigma}_\zeta^2\sim\sigma_\zeta^2, \quad \hat{\varrho}\sim\varrho$$

becslések aszimptotikusan effektívek és az

$$\frac{\hat{m}-m}{\sqrt{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\frac{\sigma_\xi^2}{n}}}, \quad \frac{\hat{\sigma}_\zeta^2-\sigma_\zeta^2}{\sqrt{\frac{2(1-\varrho^2)^2\sigma_\xi^2}{n}}}, \quad \frac{\hat{\varrho}-\varrho}{\sqrt{\frac{1-\varrho^2}{n}}} \tag{5. 5}$$

hányadosok eloszlása tart a $\left(0, 0, 0, \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right)$ *normális eloszláshoz.*

Egyszerűbben bizonyítható a következő

5. 3. TÉTEL: *$n\to\infty$ esetén az* (5. 2)*-ből adódó*

$$\hat{\sigma}_\xi^2\sim\sigma_\xi^2$$

becslés aszimptotikusan effektív és a

$$\frac{\hat{\sigma}_\zeta^2-\sigma_\zeta^2}{\sigma_\zeta^2\sqrt{\frac{2}{n}}} \tag{5. 6}$$

hányados eloszlása a (0. 1) *paraméterű normális eloszláshoz tart.*

Bizonyítás. Mint már a 2. §-ban láttuk (2. 3), a

$$\zeta_n = -\sqrt{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\left\{(1-\varrho^2)(\xi(1)-m)^2+\right. \tag{5. 7}$$

$$\left.+\sum_2^n[\xi(i)-m-\varrho(\xi(i-1)-m)]^2\right\}$$

változó karakterisztikus függvénye a következő alakú lesz:

$$\left(1-\frac{2it}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-it\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

Ebből azonnal adódik, hogy ζ_n aszimptotikusan normális eloszlású, ha $n\to\infty$. Másrészt $\hat{\varrho}\to\varrho$, $\hat{m}\to m$ valószínűségben és így CRAMER ismert tétele alapján ([5] 281. o.) a

$$\zeta_n^* = -\sqrt{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\left\{(1-\hat{\varrho}^2)(\xi(1)-\hat{m})+\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_2^n[\xi(i)-\hat{m}-\right.$$

$$\left.-(\xi(i-1)-\hat{m})\hat{\varrho}]^2\right\} = -\sqrt{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}(1-\hat{\varrho}^2)\hat{s}_\xi^2+\frac{(\xi(n)-\hat{m})^2+(\xi(1)-\hat{m})^2}{\sqrt{2n}\cdot\sigma_\zeta^2}$$

változó határeloszlása megegyezik ζ_n határeloszlásával $n\to\infty$ esetén. A $\zeta_n^*=0$ egyenlet megoldása adja a $\hat{\sigma}_\zeta^2$ becslést, egy $O(1/\sqrt{n})$-s tagtól eltekintve, amiből adódik a tétel állítása.

Az előző dolgozatban [2] szereplő 3. 3 és 3. 4 tételek érvényesek maradnak a diszkrét esetben is, ha ismeretleneknek az m, σ_ξ^2, ϱ paramétereket tekintjük. Ehhez azt kell bizonyítani, hogy a diszkrét stacionárius *Gauss—Markov*-folyamat trajektóriáinak folytonos funkcionáljai valószínűségben konvergálnak a megfelelő időben folytonos folyamat funkcionáljaihoz, mégpedig a paraméterekben egyenletesen.

Legyen $\xi_n(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó véletlen törtvonal, azaz

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{n}{kT}\left(t - \frac{kT}{n}\right)\left[\xi\left(\frac{k+1}{n}T\right) - \xi\left(\frac{kT}{n}\right)\right], \tag{5. 8}$$

ha

$$\frac{kT}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}T, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Igaz a következő lemma

5. 1. LEMMA. *A $\xi(t)$ stacionárius Gauss—Markov-folyamatra a $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$ (és $2\lambda\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2$ állandó) tartományban egyenletesen teljesül a*

$$P\{\sup_{|t'-t''|<\delta} |\xi(t') - \xi(t'')| > \varepsilon\} \leq \frac{2\sigma_\zeta^2\delta + \sigma_\zeta^2 \cdot \lambda_0 \delta^2}{\varepsilon^2} \tag{5. 9}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A [2] dolgozat (1. 1′) összefüggése

$$\xi(t') - \xi(t'') = -\lambda \int_{t''}^{t'} \xi(s)\,ds + \int_{t''}^{t'} d\zeta(s)$$

alapján

$$\mathbf{M}\{\sup_{|t'-t''|<\delta} |\xi(t') - \xi(t'')|^2\} \leq 2\mathbf{M}\left\{\sup_{|t'-t''|<\delta} \left|\lambda \int_{t''}^{t'} \xi(s)\,ds\right|^2\right\} + \tag{5. 10}$$

$$+ 2\mathbf{M}\left\{\sup_{|t'-t''|<\delta} \left|\int_{t''}^{t'} d\zeta(s)\right|^2\right\} \leq$$

$$\leq 2\delta \int_{t''}^{t'} \mathbf{M}(\lambda\xi(s))^2\,ds + 2\sigma_\zeta^2 \cdot \delta \leq \sigma_\zeta^2 \cdot \lambda \cdot \delta^2 + 2\sigma_\zeta^2 \cdot \delta.$$

(5. 10)-ből (5. 9) a *Csebisev* egyenlőtlenség alapján adódik. A $\lambda \to \infty$ esetet külön kellene vizsgálni, azonban ebben az esetben mint a [2] dolgozat eredményei mutatják konfidencia intervallumok szerkeszthetők s így ez az eset nem érdekel bennünket.

Az 5. 1 lemma biztosítja, hogy teljesülnek MARUYAMA [10] dolgozatában szereplő tétel feltételei, azaz igaz a következő

5. 4. TÉTEL: *Legyen $\xi(t)$ stacionárius Gauss—Markov-folyamat és $\xi_n(t)$ a megfelelő (5. 8) véletlen törtvonal, legyenek továbbá az $f(t), g(t)$ folytonos függvények $(0 \leq t \leq T)$ olyanok, hogy $f(0) < \xi(0) < g(0)$ akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\{f(t) \leq \xi_n(t) \leq g(t), 0 \leq t \leq T\} = P\{f(t) \leq \xi(t) \leq g(t), 0 \leq t \leq T\} \tag{5. 11}$$

egyenletesen a $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$ tartományban.

Az 5. 4 tétel közvetlen következménye a következő állítás

COROLLÁRIUM: *Ha $\bar{h}(\xi(t))$ és $\underline{h}(\xi(t))$ $(0 \leq t \leq T)$ folytonos funkcionálok, ahol $\xi(t)$ stacionárius Gauss—Markov-folyamat, és $\varepsilon > 0$ tetszőleges olyan szám, amelyre*

$$P\{\underline{h}(\xi(t)) < m < \bar{h}(\xi(t))\} > 1 - \varepsilon, \tag{5. 12}$$

akkor tetszőleges $\varepsilon_1 > 0$-hoz található csak ε-tól és ε_1-től függő olyan n (a $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$ tartományban egyenletesen), hogy

$$P\{\underline{h}(\xi_n(t)) < m < \bar{h}(\xi_n(t))\} > 1 - \varepsilon - \varepsilon_1. \tag{5. 13}$$

(5. 13) éppen azt jelenti az előző dolgozat 3. 3 tételével egybevetve, hogy diszkrét esetben sem szerkeszthető m-re véges konfidenciaintervallum.

6. §. A megfigyelési pontok sűrítésének kérdése

Mint a 2. §-ban láttuk m maximum likelihood becslése a $\xi(1) + \xi(n)$ és $\sum_{2}^{n-1} \xi(i)$ statisztikák súlyozott számtani közepe. Ennek alapján várható, hogy a $[0, T]$ intervallumban megfigyelt $\xi(t)$ folyamat középértékét a

$$\overline{m}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \xi\left(\frac{Tk}{n}\right) \tag{6. 1}$$

összeggel becsülve található olyan n érték, melyre $\overline{m}_n$ szórása minimális lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy a beosztás sűrítését nem érdemes minden határon túl növelni. Hogy ez valóban így van, azt szemléletesen a következőképpen lehet belátni, legyen $T = 1$, $\sigma_\xi^2 = 1$ és m becslésére szolgáljon egyrészt $m_1 = \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2}$, másrészt $m_2 = \int_0^2 \xi(t)dt$. Könnyen belátható (lásd pl. az előző [2] dolgozat (2. 15) képletét), hogy

$$\mathbf{D}^2 m_1 = \frac{1 + e^{-\lambda}}{4\lambda}, \quad \mathbf{D}^2 m_2 = \frac{\lambda + e^{-\lambda} - 1}{\lambda^3} \tag{6. 2}$$

és innen könnyen adódik, hogy $0 < \lambda < 2$ esetén $\mathbf{D}^2 m_1 < \mathbf{D}^2 m_2$, míg $\lambda > 2$ esetén $\mathbf{D}^2 m_2 < \mathbf{D}^2 m_1$. Ez pedig azt jelenti, hogy a fenti feltételek esetén $(T = 1, \sigma_\xi^2 = 1)$ a $\lambda < 2$ tartományban jobb az m_1 becslés, mint az m_2 (egyenlőség a $\lambda = 2$ esetben áll fenn).

Hasonló módon vethető fel a folyamat szórása becslésének a kérdése. Tegyük fel, hogy $m = 0$ és a szórásnégyzetet az

$$s_n^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \xi^2\left(\frac{kT}{n}\right) \tag{6. 3}$$

mennyiséggel becsüljük. Kérdés, milyen n érték esetén lesz minimális szórású?

Ismét vizsgáljuk meg a $T=1$, $\sigma_\xi^2=1$ feltevés esetén az

$$s_1^2 = \frac{\xi^2(0)+\xi^2(1)}{2}, \quad s^2 = \int_0^1 \xi^2(t)\,dt \tag{6. 4}$$

becslések szórásának viszonyát. Könnyű belátni, hogy

$$\mathbf{D}^2 s_1^2 = \sigma^4(1+e^{-2\lambda}) = \sigma^4\left(1+e^{-\frac{1}{\sigma^2}}\right) \tag{6. 5}$$

$$\mathbf{D}^2 s^2 = \frac{\sigma^4}{\lambda^2}(e^{-2\lambda}+2\lambda-1) = 4\sigma^8\left(e^{-\frac{1}{\sigma^2}}+\frac{1}{\sigma^2}-1\right).$$

Ismét egyszerű számolással adódik, hogy $\mathbf{D}^2 s_1^2 < \mathbf{D}^2 s^2$ a $0<\lambda<1$ tartományban (vagy a $\sigma^2 > \frac{1}{2}$ tartományban). Itt azonban nehézséget jelent, hogy σ^2 maga az ismeretlen paraméter, továbbá, hogy az s_1^2 és s^2 változók már nem normális eloszlásúak, ezért a fenti becslések, csak közelítésként használhatók.

Annak eldöntése, hogy adott λ esetén milyen hosszúságú intervallumon jobb az

$$\overline{m}_1 = \frac{\xi(0)+\xi(T)}{2}$$

becslés, mint az

$$\overline{m}_2 = \frac{\xi(0)+\xi\left(\frac{T}{2}\right)+\xi(T)}{3}$$

becslés, a megfelelő szórások

$$\mathbf{D}^2\overline{m}_1 = \frac{\sigma^2}{2}(1+e^{-\lambda T})$$

$$\mathbf{D}^2\overline{m}_2 = \frac{\sigma^2}{3}\left(1+\frac{2}{3}e^{-\lambda T}+\frac{4}{3}e^{-\lambda T/2}\right)$$

összehasonlításával a következő egyenlőtlenséget adja T-re

$$3+5e^{-\lambda T} \leq 8e^{-\frac{\lambda T}{2}}. \tag{6. 6}$$

Általában legyen a $\xi(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye kétszer differenciálható és második deriváltja legyen korlátos $(0, T)$-ben, akkor igaz a következő tétel (Sz. J. Vilenkin [12]):

6. 1. Tétel: *Ha a $\xi(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye eleget tesz még a*

$$\int_0^T R(\tau)\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)d\tau > 0$$

feltételnek, akkor az (6. 1) *becslések közül van olyan* (véges n-re), *mely minimális szórású.*

Hasonló feltételek keresése a szórás becsléseire szintén kívánatos lenne.

IRODALOM

[1] Anderson, T. W.: On the asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959), 676–687.

[2] Arató, M.: Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *MTA III. Oszt. Közleményei*, **14** (1964), 13–34.

[3] ——— Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов, Disszertáció, Москва, 1962. М. Г. У.

[4] ——— Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса, Д. А. Н. **145** (1962) № I, 13—16.

[5] Cramer, H.: *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, 1945.

[6] Gnyegyenko, B. V.—Kolmogorov, A. N.: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Budapest, 1949.

[7] Линник, Ю. В.: Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений. Изв. А. Н. СССР 14 (1950) 501—522.

[8] Лувсанцерен, Ш.: *Disszertáció*, Moszkva, 1954. М. Г. У.

[9] ——— Оценки наибольшего правдоподобия и говерительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского процесса марковского типа, Д. А. Н. **98** (1954) № 5, 723—726.

[10] Maruyama, G.: Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Math. Palermo* 4 (1955) 1–43.

[11] Rosenblatt, M.: *Random Processes*, New York, 1962.

[12] Виленкин, С. Я.: Об оценке среднего в стационарных процессах, Теория вероятностей и ее прим. 4 (1959), 186—207.

[13] Волконский, В. А.—Розанов, Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций, I. Теория вероятностей и ее прим. 4 (1959) 186—207.

(Beérkezett 1964. II. 1.)