

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

XV. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különnyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK
STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, IV.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Bevezetés

Ebben a dolgozatban azoknak az eredményeknek az ismertetésére kerül sor, melyek az n -dimenziós — időben diszkrét — stacionárius, Gauss—Markov-folyamatok paramétereinek becslésével s azok eloszlásaival kapcsolatosak. A kézikönyvekben (vö. pl. GRENANDER—ROSENBLATT [8]) az A matrix (lásd alább az (1. 2) összefüggést) sajátértékeire tett kikötésekkel történnek a paraméterbecslések és azok eloszlásainak meghatározása. Ez bizonyos előismeretet követel meg a folyamatról magáról s elsősorban az ismeretlen A matrixról, a gyakorlatban azonban ez a legtöbb esetben hiányzik. A dolgozatban egy olyan lehetséges tárgyalási módot mutatok be, melynek segítségével az általános feladat bizonyos speciális esetei könnyen visszavezethetők az egydimenziós valós és komplex esetre (egyszeres sajátértékek esetén), másrészt az általános feladat megoldása is könnyebben kezelhetővé válik. Az A matrix (vagy differenciálegyenletek esetén a Q -matrix) Jordan-féle alakban történő felírása azonban nem a probléma statisztikai, hanem előzetes nem-sztochasztikus vizsgálatát teszi szükségessé. Amennyiben ez nem lehetséges, az egyes feladatok megoldása igen bonyolult s igen hosszú megfigyeléssorozatra van szükség az egyes paraméterek megbízható becsléséhez (emlékeztetni kell arra, hogy matrixok sajátértékei meghatározása komoly numerikus nehézségeket jelent). Megmutatom, hogy mely paraméterek becsülhetők jól (azaz kevesebb megfigyelés alapján is nagyobb pontossággal). Ismertetem a tárgyalt folyamatok elégséges statisztikáira vonatkozó korábbi eredményeket [5] is. A többdimenziós stacionárius folyamatok elméletére vonatkozó eredmények megtalálhatók ROZANOV [11] nemrég megjelent könyvében, melyre gyakran utalás nélkül is hivatkozom. A dolgozat alapvető eredményei disszertációm [4] szerepeltek, azonban nyomtatásban nem jelentek meg.

A dolgozatban sehol nem történik hivatkozás konkrét gyakorlati feladatokra, megemlítem elsősorban a híradástechnikai és közgazdasági alkalmazások jelentőségét (l. pl. QUENOUILLE [10] könyvecskéjében szereplő példákat).

AZ IDŐBEN DISZKRÉT n -DIMENZIÓS STACIONÁRIUS,
NORMÁLIS ESET

1. §. Konstans együtthatós sztochasztikus differenciál-
és differenciaegyenletrendszer

Ha a $\xi_k(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1, n}$ n -dimenziós reguláris folyamat stacionárius, Gauss—Markov típusú, akkor — éppen úgy, mint az egy- és kétdimenziós esetben — kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet

$$(1. 1) \quad d\xi(t) = Q \cdot \xi(t) dt + d\zeta(t),$$

ahol $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1,n}^n$ egy négyzetes matrix, melynek λ_i sajátértékeire fennáll, hogy $\text{Re } \lambda_i < 0$, és $\zeta(t) = \{\zeta_k(t)\}_{k=1,n}$ egy n -dimenziós Wiener-folyamat; $\mathbf{M}\Delta\zeta_k(t) = 0$, $\mathbf{M}\Delta\zeta_i(t)\Delta\zeta_j(t) = \Delta t \cdot s_{ij}$, $\{s_{ij}\}_{i,j=1,n}^n$ pozitív definit. A Q matrix egyértelműen meg van határozva. (Lásd DOOB [6]).

A $\xi(k\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$, $k=0, \pm 1, \dots$) folyamat diszkrét stacionárius Gauss–Markov típusú és így kielégíti a (legyen az egyszerűség kedvéért $\varepsilon=1$)

$$(1.2) \quad \xi(k+1) = A\xi(k) + \zeta(k+1)$$

egyenletet, ahol $\zeta(k)$ egy független Gauss sorozat. Az A matrix q_i és a Q matrix λ_i sajátértékei között a következő összefüggés áll fenn: $q_i = e^{\lambda_i}$.

Az R^n térben az S nonsinguláris matrix segítségével végrehajtott lineáris leképezéssel a Q és A matrixok $Q' = SQS^{-1}$, ill. $A' = SAS^{-1}$ matrixokba mennek át és a $\xi' = S\xi$ valószínűségi változókra vonatkozó differenciál-, ill. differencia-egyenlet

$$(1.1') \quad d\xi'(t) = Q'\xi'(t)dt + d\zeta'(t),$$

illetve

$$(1.2') \quad \xi'(k+1) = A'\xi'(k) + \zeta'(k+1)$$

alakú lesz, ahol $\zeta' = S\zeta$. Az S matrix megfelelő választásával elérhető, hogy $Q'(A')$ a lehető legegyszerűbb alakú legyen. Általában egy tetszőleges matrix nem hozható diagonális alakra, azonban az ún. Jordan-féle alakra hozás minden matrixra elvégezhető.

Az m -edrendű matrixot Jordan-féle elemi matrixnak nevezzük, ha

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$$

alakú. Egy B matrixról akkor mondjuk, hogy Jordan-típusú, ha egy vagy több elemi Jordan-féle matrixból áll, melyek a fődiagonálisra mentén helyezkednek el, míg a matrix összes többi eleme nullával egyenlő.

Az R^n tér h_1, \dots, h_m vektorsorozatát a B matrix λ sajátértékéhez tartozó szériának nevezzük ha teljesül, hogy $h_1 \neq 0$, $Bh_1 = \lambda h_1$, $Bh_2 = \lambda h_2 + h_1$, ..., $Bh_m = \lambda h_m + h_{m-1}$. Igaz a következő tétel, mely azt mutatja, hogy tetszőleges matrix Jordan-típusú alakra hozható. (Lásd pl. PONTRJAGIN [9] 34. §).

Tétel. Az R^n térnek létezik olyan bázisa, mely a B matrix által meghatározott leképezés egy vagy több szériájához tartozó összes vektorokból áll. Ha B valós, a bázist alkotó szériák kiválaszthatók úgy, hogy a valós sajátértékeknek megfelelő szériák valósak legyenek, és a komplex sajátértékű szériák pedig páronként komplex konjugáltak legyenek.

A tételben említett koordinárendszerben a B matrixnak megfelelő leképezésnek egy új matrix szerinti leképezés felel meg s ez az új matrix már Jordan-típusú.

Az (1.1') és (1.2') egyenletek (elhagyva a vesszős jelölést) a következő alakúak lesznek a Jordan-féle alakra hozás után:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} d\xi_1(t) &= \lambda_1 \xi_1(t)dt + \xi_2(t)dt + d\zeta_1(t) \\ d\xi_2(t) &= \lambda_1 \xi_2(t)dt + \xi_3(t)dt + d\zeta_2(t) \\ &\vdots \\ d\xi_{k_1}(t) &= \lambda_1 \xi_{k_1}(t)dt + d\zeta_{k_1}(t) \\ d\xi_{k_1+1}(t) &= \lambda_2 \xi_{k_1+1}(t)dt + \xi_{k_1+2}(t)dt + d\zeta_{k_1+1}(t) \\ &\vdots \\ d\xi_n(t) &= \lambda_r \xi_n(t)dt + d\zeta_n(t), \end{aligned}$$

illetve

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \xi_1(k+1) &= q_1 \xi_1(k) + \xi_2(k) + \zeta_1(k+1) \\ &\vdots \\ \xi_{k_1}(k+1) &= q_1 \xi_{k_1}(k) + \zeta_{k_1}(k+1) \\ \xi_{k_1+1}(k+1) &= q_2 \xi_{k_1+1}(k) + \xi_{k_1+2}(k) + \zeta_{k_1+1}(k+1) \\ &\vdots \\ \xi_n(k+1) &= q_r \xi_n(k) + \zeta_n(k+1). \end{aligned}$$

Ilyen alakú egyenletrendszer esetén az egy- és kétdimenziós esetben kapott eredmények minden különösebb nehézség nélkül átvihetők, hiszen sztochasztikus differenciálegyenletrendszerünk valós és komplex folyamatokra vonatkozó egyenletekre esett szét. A későbbiekben, amikor feltételezzük, hogy a Jordan-alakra hozás elvégezhető, csak egyetlen Jordan-féle blokkal fogunk foglalkozni.

2. §. Elégséges statisztikák

Kiszámítjuk a

$$(2.1) \quad \xi(t) + a_1 \xi(t-1) + \dots + a_p \xi(t-p) = \zeta(t)$$

sztochasztikus differenciaegyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ stacionárius, Gauss-folyamat egy véges realizációjának sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ és a $\zeta(t)$ folyamat független valószínűségi változók sorozata (természetesen normális eloszlású). A $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$ valószínűségi változók kovariancia matrixa a stacionaritás miatt mindkét diagonálisra nézve szimmetrikus lesz és ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik R_N^{-1} -el jelölt inverze is. A $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$ változók sűrűségfüggvénye

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(N)}(x_1, \dots, x_N) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_N|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X_N R_N^{-1} X_N^*)\right\}$$

lesz. Az

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ x_p &= x_p \\ x_{p+1} + a_1 x_p + \dots + a_p x_1 &= z_{p+1} \\ &\vdots \\ x_N + a_1 x_{N-1} + \dots + a_p x_{N-p} &= z_N \end{aligned}$$

leképezéssel (melynek determinánsa 1) és felhasználva azt, hogy a $(\xi(1), \dots, \xi(p))$ változók függetlenek a $\zeta(p+1), \dots, \zeta(N)$ változóktól, melyek eloszlását ismerjük, a függetlenségi feltevés szerint kapjuk, hogy

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(p), \zeta(p+1), \dots, \zeta(N)}(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_N) = \\ = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_p|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\zeta^{-(N-p)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_{p+1}^N z_i^2 \right] \right\}$$

és innen

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(N)}(x_1, \dots, x_N) = \\ = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_p|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\zeta^{-(N-p)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_{p+1}^N (x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_p x_{i-p})^2 \right] \right\}$$

A (2.1) előállításból az R_N^{-1} matrixot a mindkét diagonálisra nézve szimmetrikusság felhasználásával teljesen meg tudjuk határozni. Legyen $a_0 = 1$, akkor

$$(2.2) \quad R_N^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 & a_0 a_2 & \dots & a_0 a_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & \dots & a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & a_0 a_p & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 a_p & a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & \dots & \sum_{1}^p a_i^2 & \dots & \sum_{1}^{p-1} a_i a_{i+1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0^2 \end{pmatrix}$$

azaz az R_N^{-1} matrix r_{ij} eleme a következő alakú

$$(2.3) \quad r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |i-j| > p+1 \\ \sum_{k=0}^{p-|j-i|} a_k a_{k+|j-i|}, & \text{ha } |i-j| \leq p+1, p < i, j < N-p+1 \\ \sum_{k=0}^i a_k a_{k+j-i}, & \text{ha } i < p, i \leq j \\ \sum_{k=0}^i a_k a_{k+(i-j)}, & \text{ha } j \leq i \leq p \end{cases}$$

Ezenkívül

$$(2.4) \quad |R_N^{-1}| = |R_p^{-1}| \cdot \sigma_\zeta^{2(N-p)}$$

DÜNKIN ismert tételéből [7], mely szerint

$$\log p(X, a) - \log p(X; a^0)$$

fix a^0 esetén szükséges és elégséges statisztikája a $p(X, a)$ eloszlásseregnek, és R_N^{-1} fenti alakjából következik a

2.1 TÉTEL: Ha a $\xi(t)$ stacionárius Gauss-folyamat kielégíti a (2.1) egyenletet az x_1, x_2, \dots, x_N ($N > p$) minta

$$\left(\sum_{p+1}^{N-p} x_i^2, \sum_{p+1}^{N-p+1} x_i x_{i-1}, \dots, \sum_{p+1}^N x_i x_{i-p}, x_1^2 + x_N^2, x_1 x_2 + x_N x_{N-1}, \dots, x_1 x_p + \right. \\ \left. + x_N x_{N-p+1}, x_1^2 + x_{N-1}^2, \dots, x_2 x_p + x_{N-1} x_{N-p+1}, \dots, x_p^2 + x_{N-p+1}^2 \right)$$

rendszere szükséges és elégséges statisztikát alkot.

Ismeretes (lásd pl. ROZANOV [1]), hogy a (2.1) egyenletnek eleget tevő folyamat spektrál sűrűségfüggvénye $e^{i\lambda}$ olyan racionális függvénye, melynek számlálója konstans. Kérdés, hogy általában a racionális spektrál sűrűségű folyamatok esetén található-e egy elégséges statisztikarendszer. Amint az alábbi példa mutatja, általában nem létezik ilyen (N -nél kevesebb elemet tartalmazó) rendszer. Tekintsük ugyanis a

$$\xi(t) = a_0 \zeta(t) + a_1 \zeta(t-1)$$

folyamatot, ahol $\zeta(t)$ egy független normális eloszlású sorozat. Legyen $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ és

$$\sigma_\zeta^2 = \mathbf{M}\zeta^2(t) = (a_0^2 + a_1^2) \mathbf{M}\zeta^2(t), \quad \rho = \frac{\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(t-1)}{\sigma_\zeta^2} = \frac{a_0 a_1}{a_0^2 + a_1^2}$$

Nyilván

$$\mathbf{M}\xi(t)\xi(t-\tau) = 0, \quad \text{ha } |\tau| > 1.$$

A $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$p(y_1, \dots, y_N) = \sigma_\xi^{-N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |B_N|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i,j=1}^N b_{ij}^* y_i y_j \right\}$$

alakú, ahol $B_N^{-1} = \{b_{ij}^*\}_{i,j=1}^{N,N}$ a B_N korrelációs matrix inverze. Könnyű kiszámítani, hogy

$$b_{ij}^* = (-1)^{j-i} \rho^{|j-i|} |B_{i-1}| |B_{N-j}| |B_N|^{-1},$$

ha $i < j$ és $|B_i| = \frac{u_1^{i+1} - u_2^{i+1}}{u_1 - u_2}$ (az inverz matrix természetesen ismét szimmetrikus mindkét diagonálisra nézve.) Észre kell venni, hogy $|B_N|$ kielégíti a

$$|B_N| = |B_{N-1}| - \rho^2 |B_{N-2}|$$

differenciaegyenletet és u_1, u_2 az

$$u^2 - u + \rho^2 = 0$$

egyenlet gyökei, azaz $u_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2}$, $u_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2}$. Mivel pl. a b_{iN}^* ($i=1, \dots, N$) függvények mint ρ függvényei függetlenek, nem létezik az x_1, \dots, x_N változók olyan függvényrendszere, mely elégséges statisztikarendszert alkotna (lásd DÜNKIN [7] 2. §).

Többdimenziós folyamatok esetén csak azt a Markov-típusú stacionárius Gauss-folyamatot tekintjük, mely kielégíti a

$$\xi(t) = A\xi(t-1) + \zeta(t)$$

differencegyenletet, ahol $A = \{\alpha_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$, $\xi(t) = \{\xi_j(t)\}_{j=1, \dots, n}$, $\zeta(t) = \{\zeta_j(t)\}_{j=1, \dots, n}$, és

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\zeta_j(t) &= 0 \\ \mathbf{M}\zeta_i(t)\zeta_j(t+\tau) &= \begin{cases} s_{ij}, & \text{ha } \tau=0 \\ 0, & \text{ha } \tau \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A $\zeta(t)$ sorozat független.

A $\xi(t)$ folyamat $B(\tau)$ korrelációs függvénye,

$$(2.5) \quad B(\tau) = A \cdot B(0)$$

alakú, ahol

$$(2.6) \quad B(0) = A \cdot B(0) \cdot A^* + B_\zeta(0).$$

A $B(0)$ matrix meghatározása a következő módon történhet akkor, amikor az A matrix egyetlen Jordan-féle blokkból áll és $B_\zeta(0)$ diagonális. A $\xi(t)$ folyamat ekkor eleget tesz a

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= \rho \xi_n(t-1) + \zeta_n(t) \\ \xi_{n-1}(t) &= \rho \xi_{n-1}(t-1) + \xi_n(t-1) + \zeta_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ \xi_1(t) &= \rho \xi_1(t-1) + \xi_2(t-1) + \zeta_1(t) \end{aligned}$$

összefüggéseknek. Az első összefüggés mindkét oldalát beszorozva $\xi_n(t-1)$, majd $\xi_n(t)$ -vel és minden alkalommal várható értéket képezve, a következő összefüggésekre jutunk

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi_n(t)\zeta_n(t) &= s_n \\ \mathbf{M}\xi_n(t)\xi_n(t-1) &= \rho \beta_{nn}, \quad \text{ahol } \beta_{nn} = \mathbf{M}\zeta_n^2 \\ \beta_{nn} &= \rho^2 \cdot \beta_{nn} + s_n, \quad \beta_{nn} = \frac{s_n}{1 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Ugyancsak az első összefüggést $\xi_{n-1}(t)$ -vel és $\xi_{n-1}(t-1)$ -gyel beszorozva és várható értéket képezve, az

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t) &= \rho \mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t) \\ \mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t-1) &= \rho \mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t-1) \end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk. Ezek felhasználásával a második egyenletnek $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$ és $\xi_n(t-1)$ -gyel való beszorzása és a várható érték képzéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_{n-1}(t) &= s_{n-1} \\ \mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_n(t-1) &= \frac{s_n}{(1 - \rho^2)^2} \\ \mathbf{M}\xi_{n-1}(t-1)\xi_n(t) &= \frac{\rho^2 s_n}{(1 - \rho^2)^2} \\ \mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_{n-1}(t-1) &= \rho \beta_{n-1, n-1} + \frac{\rho s_n}{(1 - \rho^2)^2} \\ \beta_{n-1, n-1}(1 - \rho^2) &= s_n \frac{1 + \rho^2}{(1 - \rho^2)^2} + s_{n-1}. \end{aligned}$$

Ezt az eljárást folytatva a $B(0)$ matrix összes elemei meghatározhatók.

Feltettük, hogy a $\zeta(t)$ folyamat komponensei is függetlenek, másrészt a $\xi(1), \dots, \xi(N)$ változók és a $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$ változók közötti (1. 1)-nek megfelelő leképezés determinánsa 1 lesz, így módon

$$\begin{aligned} (2.7) \quad P_{\xi(1), \dots, \xi(N)}(x_{11}, \dots, x_{1N}; x_{21}, \dots, x_{2N}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{nN}) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}} |R_{Nn}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} X R_{Nn}^{-1} X^* \right\} = \\ &= p_{\xi(1)}(x_{11}, \dots, x_{n1}) (2\pi)^{-\frac{(N-1)n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n s_i \right)^{-\frac{N-1}{2}} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2s_i} (x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \dots - \alpha_{in}x_{nj})^2 \right\} \end{aligned}$$

ahol

$$(2.8) \quad p_{\xi(1)}(x_{11}, \dots, x_{n1}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |B(0)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} X_1 B(0)^{-1} X_1^* \right\}$$

A fenti összefüggésből látszik, hogy

$$(2.9) \quad |R_{Nn}| = |B(0)| \cdot \left(\prod_{i=1}^n s_i \right)^{N-1},$$

ahol az R_{Nn}^{-1} matrix

$$(2.10) \quad \begin{pmatrix} a_{10} & b_{11} & 0 & \dots & 0 & a'_{12} & b_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{1n} & b_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & a_{11} & b_{11} & \dots & 0 & b'_{12} & a_{12} & b_{12} & \dots & 0 & \dots & b'_{1n} & a_{1n} & b_{1n} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & a_{11} & b_{11} & 0 & & a_{12} & b_{12} & & & & & a_{1n} & b_{1n} & & \\ 0 & & b_{11} & a'_{12} & 0 & & a'_{12} & a'_{12} & & & & & b'_{1n} & a'_{1n} & & \\ a'_{12} & b'_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{20} & b_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & & & & \\ b_{12} & a_{12} & b'_{12} & \dots & 0 & 0 & b_{22} & a_{22} & b_{22} & \dots & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & a'_{12} & & & a_{22} & b_{22} & & & & & & & \\ & & & & & & & b_{22} & a'_{22} & \dots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & \\ a'_{1n} & b'_{1n} & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & a_{n0} & b_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ b'_{1n} & a_{1n} & b'_{1n} & \dots & 0 & 0 & & & & & & b_{nn} & a_{nn} & b_{nn} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & & \dots & a_{1n} & b'_{1n} & & & & & & & 0 & & \dots & a_{nn} & b_{nn} \\ 0 & & \dots & b_{1n} & a'_{1n} & & & & & & & 0 & & \dots & b_{nn} & a'_{n0} \end{pmatrix}$$

alakú, az

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_{i0} &= \beta_{ii} + \sum_{j=0}^n \frac{(\alpha_{ij})^2}{s_j}, \\ a''_{i0} &= \frac{1}{s_i} \\ a'_{ik} &= \beta_{ik} + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ik}}{s_j}, \quad a''_{ik}=0, \quad \text{ha } k \neq i, k \neq 0, \\ a_{ii} &= \frac{1 + (\alpha_{ii})^2}{s_i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\alpha_{ji})^2}{s_j}, \\ a_{ik} &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ji} + \alpha_{jk}}{s_j}, \quad k \neq i, \\ b_{ik} &= -\frac{\alpha_{ki}}{s_k}, \\ b'_{ik} &= -\frac{\alpha_{ik}}{s_i}, \quad B(0) = \{\beta_{ik}\}_{i=1, n}^{k=1, n}, \end{aligned}$$

elemekkel. Ebből következik, hogy elégséges statisztika a

$$\left(\sum_{j=2}^N x_{ij}^2, \sum_{j=1}^N x_{i1j} x_{i2j}, \sum_{j=1}^{N-1} x_{i1j} x_{i2j+1}, \quad i, i_1, i_2 = \overline{1, n}, x_{11}^2, \dots, x_{n1}^2, x_{1N}^2, \dots, x_{nN}^2, \right. \\ \left. x_{11} x_{21}, x_{11} x_{31}, \dots, x_{11} x_{n1}, x_{21} x_{31}, \dots, x_{21} x_{n1}, \dots, x_{n-11} x_{n1} \right)$$

rendszer lesz.

Példaként vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ekkor, amint az könnyen belátható

$$A^\tau = e^{-\lambda\tau} \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & \sin \omega\tau \\ -\sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{pmatrix}$$

és

$$B(0) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\beta_{11} = \frac{\gamma[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\beta\alpha s_{12}]+\delta[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12}]}{\gamma^2-\delta^2}$$

$$\beta_{12} = \frac{\beta_{22}\alpha\beta - \beta_{11}\alpha\beta + s_{12}}{1-\alpha^2+\beta^2}$$

$$\beta_{22} = \frac{\delta[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta s_{12}]+\gamma[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12}]}{\gamma^2-\delta^2}$$

$$e^{-2\lambda} = \alpha^2 + \beta^2, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma = (1-\alpha^2)^2 + \beta^2(1+\alpha^2), \quad \delta = \beta^2(1+\alpha^2 + \beta^2),$$

speciálisan, ha $s_{12}=0, s_{11}=s_{22}=s$,

$$B(0) = \frac{1}{1-\alpha^2-\beta^2} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Formálisan nyilvánvalóan felírható a sűrűségfüggvény abban az esetben is, amikor a $\zeta(k)$ valószínűségi változó komponensei nem függetlenek, a megfelelő összefüggések azonban túlságosan bonyolultak ahhoz, hogy itt ismertessük őket.

A későbbiekben viszont szükségünk lesz olyan folyamatok sűrűségfüggvényeinek meghatározására, melyek Jordan-típusú differenciálegyenletnek (egyetlen blokkal) tesznek eleget.

Legyen $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1, n}$ ilyen. Akkor az R_{Nn}^{-1} matrix

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A'_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & A_{n-1, n-1} & A_{n-1, n} \\ 0 & & & & & A'_{n-1, n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol az A_{ik} matrixok

$$(2.13) \quad A_{ii+1} = \begin{pmatrix} a_{ii+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{s_i} & \frac{\varrho}{s_i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\varrho}{s_i} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{s_i} & 0 \\ 0 & & & & & -\frac{1}{s_i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2.14) \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{ii} & -\frac{\varrho}{s_i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} \\ 0 & & & & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1}{s_i} \end{pmatrix}$$

alakúak.

Speciálisan az $n=2$ esetben könnyű kiszámítani, hogy

$$a_{11} = \frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)+s_2} + \frac{\varrho^2}{s_1}$$

$$a_{12} = -\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)+s_2} + \frac{\varrho}{s_1}$$

$$a_{22} = \frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]} + \frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2}{s_2}$$

Az általános esetben a

$$\xi(t) + C_1\xi(t-1) + \dots + C_p\xi(t-p) = \xi(t)$$

differenciaegyenletnek eleget tevő n -dimenziós $\xi(t)$ folyamat vizsgálata tűnik természetesnek, mint az egydimenziós autoregressziós séma általánosítása. Az ilyen típusú folyamatokkal általánosan nem fogunk foglalkozni, bár a korrelációs-matrixra vonatkozó összefüggések ugyanúgy felírhatók, mint a $p=1$ esetben.

3. §. Regressziós problémák

A gyakorlatban legtöbbször nem az n -dimenziós folyamatot, $\xi(t)$ -t figyeljük meg, hanem az

$$\eta(t) = C \cdot h(t) + \xi(t)$$

folyamatot, ahol a $h(t) = \{h_k(t)\}_{k=1, \dots, m}$ függvények ismertek, míg a $C = \{c_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ matrix elemei ismeretlenek.

Az $\eta(t)$ folyamat megfigyelése esetén a c_{ij} regressziós együtthatók becslése az idősorok elméletének egyik központi problémája. A gyakorlatban leggyakrabban előforduló eset az, amikor a $h_k(t)$ függvények polinomok vagy trigonometrikus polinomok. Az alábbiakban az előző pontok eredményei alapján a maximum likelihood becslésekkel fogunk foglalkozni s ezen becslések bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk meg.

Feltéve, hogy a $\xi(t)$ diszkrét folyamatot leíró egyenlet már (1.4) alakú, vizsgáljuk egyetlen — valós sajátértékű — Jordan-féle blokk által leírt n -dimenziós folyamat sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ változó komponensei függetlenek, bár ezt a feltevést a gyakorlatban mindig ellenőrizni kell. A komplex sajátértékű eset vizsgálatát külön nem végezzük el. A tett feltevések mellett a $\xi(2), \dots, \xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett

$$C_N \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{2s_1} (x_{1j+1} - \varrho x_{1j} - x_{2j})^2 + \frac{1}{2s_2} (x_{2j+1} - \varrho x_{2j} - x_{3j})^2 + \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2s_{n-2}} (x_{n-1j+1} - \varrho x_{n-1j} - x_{nj})^2 + \frac{1}{2s_n} (x_{nj+1} - \varrho x_{nj})^2 \right] \right\},$$

alakú lesz. A $\xi(1)$ változó sűrűségfüggvénye a (2.6) összefüggés alapján a $B(0)$

matrix meghatározásával számítható ki ($\mathbf{M}\xi_j^2 = s_j$). Az előbbi pontban láttuk, hogy a feltételes sűrűségfüggvény:

$$C_N \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\varrho^2}{s_1} x_{11}^2 + \left(\frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2}{s_2} \right) x_{21}^2 + \left(\frac{1}{s_2} + \frac{\varrho^2}{s_3} \right) x_{31}^2 + \dots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{\varrho^2}{s_n} \right) x_{n1}^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s_1} x_{1N}^2 + \frac{1}{s_2} x_{2N}^2 + \dots + \frac{1}{s_n} x_{nN}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\varrho}{s_1} x_{11} x_{21} + \frac{2\varrho}{s_2} x_{21} x_{31} + \dots + \frac{2\varrho}{s_{n-1}} x_{n-11} x_{n1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\varrho^2}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} x_{1i}^2 + \dots + \frac{1+\varrho^2}{s_n} \sum_{i=1}^{N-1} x_{ni}^2 + \right.$$

$$\left. - \frac{2\varrho}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} x_{1i+1} x_{1i} + \dots - \frac{2\varrho}{s_n} \sum_{i=1}^{N-1} x_{ni+1} x_{ni} + \right.$$

$$\left. - \frac{2}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} x_{1i+1} x_{2i} + \dots - \frac{2}{s_{n-1}} \sum_{i=1}^{N-1} x_{n-1i+1} x_{ni} \right\}.$$

Az egyszerűség kedvéért csak a feltételes (a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett) maximum likelihood egyenletekkel foglalkozunk. Legyen speciálisan $h(t) \equiv 1 = (1, \dots, 1)$, tehát a $\xi(t)$ folyamat m_1, \dots, m_n várható értékeit akarjuk becsülni. A feltételes maximum likelihood egyenletek a következők lesznek

$$-\frac{2\varrho^2}{s_1} (x_{11} - m_1) - \frac{2}{s_1} (x_{1N} - m_1) - \frac{2\varrho}{s_1} (x_{21} - m_2) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{1i} - m_1) +$$

$$+ \frac{2\varrho}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{1i} - m_1) + (x_{1i+1} - m_1)] + \frac{2}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{2i} - m_2) = 0$$

$$-2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2}{s_2} \right) (x_{21} - m_2) - \frac{2}{s_2} (x_{2N} - m_2) - \frac{2\varrho}{s_1} (x_{11} - m_1) -$$

$$- \frac{2\varrho}{s_2} (x_{31} - m_3) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_2} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{2i} - m_2) + \frac{2\varrho}{s_2} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{2i} - m_2) + (x_{2i+1} - m_2)] +$$

$$+ \frac{2}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{1i+1} - m_1) + \frac{2}{s_2} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{3i} - m_3) = 0$$

$$\vdots$$

$$-2 \left(\frac{1}{s_{k-1}} + \frac{\varrho^2}{s_k} \right) (x_{k1} - m_k) - \frac{2}{s_k} (x_{kN} - m_k) - \frac{2\varrho}{s_{k-1}} (x_{k-11} - m_{k-1}) - \frac{2\varrho}{s_k} (x_{k+1,1} - m_{k+1}) -$$

$$- \frac{2(1+\varrho^2)}{s_k} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{ki} - m_k) + \frac{2\varrho}{s_k} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{ki} - m_k) + (x_{k-1i+1} - m_k)] +$$

$$+ \frac{2}{s_{k-1}} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{k-1i+1} - m_{k-1}) + \frac{2}{s_k} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{k+1i} - m_{k+1}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{\varrho^2}{s_n} \right) (x_{n1} - m_n) - \frac{2}{s_n} (x_{nN} - m_n) - \frac{2\varrho}{s_{n-1}} (x_{n-11} - m_{n-1}) - \\
& - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_n} \sum_2^{N-1} (x_{ni} - m_n) + \frac{2\varrho}{s_n} \sum_1^{N-1} [(x_{ni} - m_n) + (x_{ni+1} - m_n)] + \\
& - \frac{2}{s_{n-1}} \sum_1^{N-1} (x_{n-1i+1} - m_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

Innen egyszerű, de hosszadalmas átalakításokkal nyerjük az alábbi

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_1} x_{11} + \frac{1 - \varrho}{s_1} x_{1N} + \frac{\varrho - 1}{s_1} x_{21} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{2i} = \\
& = \frac{(1 - \varrho)^2}{s_1} m_1 + \frac{\varrho - 1}{s_1} m_2 + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_1} (N - 2) m_1 - \frac{(N - 2)}{s_1} m_2 \\
& \left(\frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_2} \right) x_{21} + \frac{1 - \varrho}{s_2} x_{2N} + \frac{\varrho}{s_1} x_{11} - \frac{1}{s_1} x_{1N} + \frac{\varrho - 1}{s_2} x_{31} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_2} \sum_2^{N-1} x_{2i} - \\
& - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_2} \sum_2^{N-1} x_{3i} = \left(\frac{1}{s_1} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_2} \right) m_2 + \frac{\varrho - 1}{s_1} m_1 + \frac{\varrho - 1}{s_2} m_3 + \\
& + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_2} (N - 2) m_2 - \frac{(N - 2)}{s_1} m_1 - \frac{(N - 2)}{s_2} m_3 \\
& \vdots \\
& \left(\frac{1}{s_{k-1}} + \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_k} \right) x_{k1} + \frac{1 - \varrho}{s_k} x_{kN} + \frac{\varrho}{s_{k-1}} x_{k-11} - \frac{1}{s_{k-1}} x_{k-1N} + \frac{\varrho - 1}{s_k} x_{k+1,1} + \\
& + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_k} \sum_2^{N-1} x_{ki} - \frac{1}{s_{k-1}} \sum_2^{N-1} x_{k-1i} - \frac{1}{s_k} \sum_2^{N-1} x_{k+1i} = \left(\frac{1}{s_{k-1}} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_k} \right) m_k + \\
& + \frac{\varrho - 1}{s_{k-1}} m_{k-1} + \frac{\varrho - 1}{s_k} m_{k+1} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_k} (N - 2) m_k - \frac{N - 2}{s_{k-1}} m_{k-1} - \frac{N - 2}{s_k} m_{k+1} \\
& \vdots \\
& \left(\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_n} \right) x_{n1} + \frac{1 - \varrho}{s_n} x_{nN} + \frac{\varrho}{s_{n-1}} x_{n-11} - \frac{1}{s_{n-1}} x_{n-1N} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_n} \sum_2^{N-1} x_{ni} - \\
& - \frac{1}{s_{n-1}} \sum_2^{N-1} x_{n-1i} = \left(\frac{1}{s_{k-1}} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_k} \right) m_n + \frac{\varrho - (N - 1)}{s_{n-1}} m_{n-1}
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, mely lényegében

$$\begin{aligned}
C_1 X &= a_{11} m_1 + a_{12} m_2 \\
C_2 X &= a_{21} m_1 + a_{22} m_2 + a_{23} m_3 \\
&\vdots \\
C_k X &= a_{kk-1} m_{k-1} + a_{kk} m_k + a_{kk+1} m_{k+1} \\
&\vdots \\
C_n X &= a_{nn-1} m_{n-1} + a_{nn} m_n
\end{aligned}$$

alakú, ahol a megfelelő konstansok jelentése az előző egyenletrendszerből látható.

Ha az összes s_i szórásnégyzetek azonosak, legyen $s_i = s$, akkor a fenti

$$\begin{aligned}
& b = A \cdot m \\
& \text{egyenletrendszer } A \text{ matrixa} \\
& A = \begin{pmatrix} a_0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & a & b \\ 0 & & & & & b & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

alakú. Az A matrix inverzének meghatározása az eddigiekben sokszor felhasznált valószínűség számítási megfontolások alapján történhet. Az $n=2$ speciális esetben a fenti egyenletrendszer

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_1} x_{11} + \frac{1 - \varrho}{s_1} x_{1N} + \frac{\varrho - 1}{s_1} x_{21} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{2i} = \\
& = \frac{(1 - \varrho)^2 (N - 1)}{s_1} m_1 - \left(\frac{N - 2}{s_1} + \frac{1 - \varrho}{s_1} \right) m_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_2} \right) x_{21} + \frac{1 - \varrho}{s_2} x_{2N} + \frac{\varrho}{s_1} x_{11} - \frac{1}{s_1} x_{1N} - \frac{(1 - \varrho)^2}{s_2} \sum_2^{N-1} x_{2i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} = \\
& = \frac{\varrho - N - 1}{s_1} m_1 + m_2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{(N - 1)(1 - \varrho)^2}{s_2} \right)
\end{aligned}$$

alakú lesz.

Említésre méltó, hogy ellentétben az egydimenziós esettel, ϱ -nak 1-hez közeli értékei esetén is a várható értéket a megfigyelések számtani átlagával lehet jól becsülni.

Ebben a speciális ($n=2$) esetben a feltétel nélküli maximum likelihood egyenletek (a számítások mellőzésével) a következők lesznek

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_1} + \frac{(1 - \varrho^2)^3}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} \right\} x_{11} + \frac{1 - \varrho}{s_1} x_{1N} + \left\{ \frac{\varrho - 1}{s_1} - \frac{\varrho(1 - \varrho^2)^2}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} \right\} x_{21} + \\
& + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{2i} = \left[\frac{(1 - \varrho)^2 (N - 1)}{s_1} + \frac{(1 - \varrho^2)^3}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} \right] m_1 - \\
& - \left[\frac{N - 2}{s_1} + \frac{1 - \varrho}{s_1} + \frac{\varrho(1 - \varrho^2)^2}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} \right] m_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2 - \varrho}{s_2} + \frac{(1 - \varrho^2)[s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2(1 + \varrho^2)]}{s_2[s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2]} \right\} x_{21} + \frac{(1 - \varrho)}{s_2} x_{2N} + \\ & + \left(\frac{\varrho}{s_1} - \frac{\varrho(1 - \varrho^2)^2}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} \right) x_{11} - \frac{1}{s_1} x_{1N} + \frac{(1 - \varrho)^2}{s_2} \sum_{i=2}^{N-1} x_{2i} - \frac{1}{s_1} \sum_{i=2}^{N-1} x_{1i} = \\ & = \left[\frac{\varrho}{s_1} - \frac{\varrho(1 - \varrho^2)^2}{s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2} - \frac{N-1}{s_1} \right] m_1 + \\ & + \left[\frac{1}{s_1} + \frac{(1 - \varrho^2)[s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2(1 + \varrho^2)]}{s_2[s_1(1 - \varrho^2)^2 + s_2]} + \frac{(N-1)(1 - \varrho)^2}{s_2} \right] m_2. \end{aligned}$$

Ha $\varrho \sim 1$, a közelítő egyenletekből a következő becslések adódnak:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} x_{2i} \\ m_1 &= \frac{x_{1N} - x_{11}}{N-2} + \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} x_{1i} + \frac{1}{(N-2)^2} \sum_{i=2}^{N-1} x_{2i} - \frac{x_{21}}{N-2}. \end{aligned}$$

Az eredményből látható, hogy az egydimenziós esettel szemben itt mindig a számtani középkel való becslés lesz jó.

4. §. Az A matrix elemeinek becslése

Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ és a $\xi(t)$ Gauss-folyamat eleget tesz az (1. 2) egyenletnek. A $\xi(t)$ folyamat $t = 1, 2, \dots, N$ időpontokban való megfigyeléseiből az ismeretlen A matrix elemei maximum likelihood becsléseinek meghatározása a megfelelő sűrűségfüggvény alapján elvben könnyen elvégezhető. Az egyszerűség kedvéért tekintsük ismét a könnyebben kezelhető feltételes sűrűségfüggvényt s az ily módon adódó feltételes, maximum likelihood becsléseket (az ún. széria-korrelációs együttítható becslés többdimenziós analogonjáról van szó, vö. [2] 1. §). Legyen $A = \{\alpha_{ij}\}_{i=1, n}^{j=1, n}$ és legyenek a $\zeta(i)$ változók komponensei függetlenek, $\mathbf{M}(\zeta_j(i))^2 = s_j$, $\mathbf{M}(\zeta_{j_1}(i)\zeta_{j_2}(k)) = 0$, ha $j_1 \neq j_2$; paraméterekkel, ekkor a $\xi(2), \xi(3), \dots, \xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1) = x(1)$ feltétel mellett

$$\begin{aligned} & P_{\xi(2), \dots, \xi(N)}(x_{21}, \dots, x_{2N}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{nN} | \xi(1) = x(1)) = \\ & = (2\pi)^{-\frac{n(N-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^n s_i \right)^{-\frac{N-1}{2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \sum_{j=1}^{N-1} (x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \alpha_{i2}x_{2j} - \dots - \alpha_{in}x_{nj})^2 \right\}. \end{aligned}$$

A maximum likelihood egyenletek

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \frac{\partial \log p}{\partial \alpha_{i1}} = \sum_{j=1}^{N-1} (x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \alpha_{i2}x_{2j} - \dots - \alpha_{in}x_{nj}) x_{1j} = 0 \\ & \vdots \\ & \frac{\partial \log p}{\partial \alpha_{in}} = \sum_{j=1}^{N-1} (x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \alpha_{i2}x_{2j} - \dots - \alpha_{in}x_{nj}) x_{nj} = 0 \\ & i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

alakúak lesznek. Bevezetve az

$$\begin{aligned} \eta_{i1}(N) &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} (\xi_i(j+1) - \alpha_{i1}\xi_1(j) - \alpha_{i2}\xi_2(j) - \dots - \alpha_{in}\xi_n(j)) \xi_1(j) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \zeta_i(j+1) \xi_1(j), \\ (4.2) \quad \eta_{i2}(N) &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \zeta_i(j+1) \xi_2(j) \\ & \vdots \\ \eta_{in}(N) &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \zeta_i(j+1) \xi_n(j) \end{aligned}$$

valószínűségi változókat és a (4. 1) egyenletrendszer megoldásait a $\xi(1), \dots, \xi(N)$ megfigyelések esetén $\hat{\alpha}_{ij}$ -vel jelölve az $\eta_{ik}(N)$ változók a következő alakba írhatók:

$$(4.3) \quad \eta_{ik}(N) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} [(\hat{\alpha}_{i1} - \alpha_{i1}) \xi_1(j) + (\hat{\alpha}_{i2} - \alpha_{i2}) \xi_2(j) + \dots + (\hat{\alpha}_{in} - \alpha_{in}) \xi_n(j)] \xi_k(j)$$

$$i, k = \overline{1, n};$$

felhasználva közben, hogy (4. 1) alapján

$$\sum_{j=1}^{N-1} \zeta_i(j+1) \xi_k(j) = \sum_{j=1}^{N-1} (\hat{\alpha}_{i1} \xi_1(j) + \dots + \hat{\alpha}_{in} \xi_n(j)) \xi_k(j).$$

Kis átalakítással (4. 3) a következő alakba írható

$$\begin{aligned} (4.3') \quad \eta_{ik}(N) &= \sqrt{N-1} (\hat{\alpha}_{i1} - \alpha_{i1}) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\xi_k(j) \xi_1(j)}{N-1} + \dots \\ & \dots + \sqrt{N-1} (\hat{\alpha}_{in} - \alpha_{in}) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\xi_k(j) \xi_n(j)}{N-1} \quad i, k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

A (4. 2) összefüggések alapján könnyű kiszámítani — felhasználva a $\zeta_i(j)$ változók tulajdonságait — hogy

$$(4.4) \quad \mathbf{M}\eta_{i1}(N)\eta_{i2}(N) = s_i \mathbf{M}\xi_{i1}(j)\xi_{i2}(j).$$

Másrészt, ha az A matrix sajátértékei 1-nél kisebbek, a folyamat ergodikus és így

$$(4.5) \quad \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \xi_i(j) \xi_k(j) \rightarrow \mathbf{M}\xi_i(j) \xi_k(j), \quad i, k = \overline{1, n}$$

1 valószínűséggel. Fix α_{ik} ($i, k = \overline{1, n}$) értékekre az $\eta_{ik}(N)$ valószínűségi változók $N \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlásúak (lásd pl. ROZANOV [10])

$$s_i \{ \mathbf{M} \xi_{i_1}(j) \xi_{i_2}(j) \}_{i_1=i_2=\overline{1, n}} = \{ \mathbf{M} \eta_{i_1}(N) \eta_{i_2}(N) \}$$

kovariancia matrixszal. A (4. 5) összefüggések felhasználásával (4. 3') azt mutatja, hogy az $\eta_{ik}(N)$ ($k = \overline{1, n}$) változók az $\sqrt{N-1}(\hat{\alpha}_{ik} - \alpha_{ik})$ változók ($k = \overline{1, n}$) lineáris kombinációi, így azok is aszimptotikusan normális eloszlásúak

$$s_i \cdot \{ \mathbf{M} \xi_{i_1}(j) \xi_{i_2}(j) \}^{-1}$$

kovariancia matrixszal.

Nyilván az $\hat{\alpha}_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}$) becslések torzítatlanok és konzisztensek is. Megjegyzem, hogy a (4. 1). egyenletrendszer helyett tekinthető a

$$\sum_{j=1}^{N-\tau-1} [\xi_i(j+\tau) - \alpha_{i1} \xi_1(j+\tau-1) - \dots - \alpha_{in} \xi_n(j+\tau-1)] \xi_k(j) = 0; \quad i, k = \overline{1, n}$$

egyenletrendszer is az α_{ik} becsléseinek meghatározására ($\tau = 1, 2, \dots, r$) értékek esetén. A megfelelő becsléseket jelöljük $\hat{\alpha}_{ik}(\tau)$ -val. Nyilván minden τ értékre más és más becslést kapunk, kérdés, hogy az így kapott becsléseket átlagolva milyen rendszerek esetén jutunk jobb becslésekhez? Amennyiben a folyamat stacionárius Gauss-Markov-típusú, a becslések nem javulnak, azonban megadhatók lennének olyan, az említett típushoz közel álló folyamatok, melyeknél ez az eljárás hasznosnak bizonyul pl. nem Gauss-típusú folyamatok esetén.

Az eddigiekben csak azt az ismert eljárást mutattuk meg, hogy hogyan nyerhető az α_{ik} ismeretlen paraméterekre becslések. A továbbiakban azzal a problémával kívánunk foglalkozni, hogy ezek a becslések mennyire megbízhatóak s melyek azok a nehézségek, amelyekkel számolni kell ezeknek a becsléseknek a vizsgálatánál. Pontosabban megfogalmazva az a kérdés, hogy az így nyert statisztikai becslések segítségével megállapítható-e az A matrix sajátértékei? Tehát N nagy értékeire (mégpedig milyen nagy N értékek esetén mekkora pontossággal) elvégezhető-e pl. a Jordan-alakra hozás?

Ehhez első lépésként vizsgáljuk meg az (1. 4) alakú egyenletrendszernek elegendő $\xi(t)$ n -dimenziós folyamat egyetlen ismeretlen ϱ paraméterének becslését. A (2. 12) összefüggésekből megállapítható, hogy a $\xi(1) = x(1)$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényből nyert maximum likelihood becslés

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_{1i} x_{1i+1} - \sum_{i=1}^{N-1} x_{1i} x_{2i} + \sum_{i=1}^{N-1} x_{2i} x_{2i+1} - \sum_{i=1}^{N-1} x_{2i} x_{3i} \pm \dots - \sum_{i=1}^{N-1} x_{n-1i} x_{ni} + \sum_{i=1}^{N-1} x_{ni} x_{ni+1}}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N-1} x_{ki}^2}$$

lesz. Könnyű belátni az (1. 4) összefüggések alapján, hogy

$$\hat{\varrho} - \varrho = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_{1i} \xi_{1i+1} + \dots + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_{ni} \xi_{ni+1}}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N-1} \xi_{ki}^2}$$

és a jobb oldal számlálójának várható értéke 0 (mivel $\mathbf{M} \xi_{ki} \xi_{ki+1} = 0$). Ily módon a becslés aszimptotikusan torzítatlan. N nagy értékeire — az ergodikusság miatt — a nevező az $(N-1) \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ értékkel asszimptotikusan egyenlő, másrészt a számláló négyzetének várható értéke

$$\sum s_k \sigma_k^2.$$

Ily módon

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho} - \varrho))^2 \sim \frac{\sum s_k \sigma_k^2}{(\sum \sigma_k^2)^2}, \quad \text{ha } N \rightarrow \infty.$$

Az $n=2$ speciális esetben, ha $s_1 = s_2$

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho} - \varrho))^2 \sim \frac{(1 - \varrho^2)^3}{2(1 - \varrho^2)^2 + (1 + \varrho^2)}$$

(vö. [2] 2. §, ahol az egydimenziós folyamat esetén $\sqrt{N-1}(\hat{\varrho} - \varrho)$ szórásnégyzetére $(1 - \varrho^2)$ adódott).

Ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben, szükség van a fenti becslés aszimptotikus eloszlásának vizsgálatára 1-hez közeli ϱ értékre. Láttuk az egydimenziós esetben, hogy $\sigma_{\xi}^2 = 1$ feltétel esetén ϱ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású $-1 < \varrho < 1$ -ben, míg $s=1$ esetén normalitásról szó sincs. Éppen amiatt volt szükség $s=1$ esetén az időben folytonos folyamat paraméter becslései pontos eloszlásának meghatározására, $\sigma_{\xi}^2 = 1$ esetén pedig a diszkrét folyamat paraméter becslései aszimptotikus eloszlásának meghatározására. Ez a megkülönböztetés a többdimenziós esetben is fennáll, a megfelelő számítások gyakorlati kivitelezése azonban igen nagy és nehézkes számításokat igényel. Heurisztikus megfontolások alapján látható, hogy $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = c (\neq 1)$ esetén ϱ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású a $-1 < \varrho < 1$ intervallumban, míg $s_1 = s_2 = 1$ esetén ez nem áll fenn. A megfelelő kétdimenziós — időben folytonos — folyamat paraméter becslése eloszlásának meghatározását egy külön dolgozatban végezzük el.

Visszatérve az általános esetre, a következő megállapításokat tehetjük.

Az [1] dolgozat 3. 3 tételéből, valamint [2] 5. 4 tételének korolláriumából következik, hogy amennyiben az (1. 2)-ben szereplő A matrix sajátértékei mind egyszeresek és valósak s az $\eta(t) = \xi(t) + m$ folyamatot figyeltük meg, az m várható értékre nem szerkeszthetők véges konfidencia intervallumok és a $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ sajátértékekre nem szerkeszthetők 0-tól különböző alsó konfidencia határok folytonos funkcionálok segítségével.

Ez egyben azt is jelenti, hogy a $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ sajátértékek nem különböztethetők meg.

Amennyiben komplex és többszörös sajátértékei is vannak az A matrixnak, a megfelelő komponensek várható értékeire a számtani közepek jó becslések lesznek és nincs szükség végtelen konfidencia intervallumok szerkesztésére.

Ezen állítások tételszerű megfogalmazását mellőzzük.

IRODALOM

- [1] ARATÓ, M.: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., MTA III. Oszt. Közleményei 14 (1964) 13–24.
 [2] ———: II., MTA III. Oszt. Közleményei 14 (1964) 135–157.
 [3] ———: III., MTA III. Oszt. Közleményei 14 (1964) 317–330.

- [4] ARATÓ M.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.
[5] — : О достаточных статистиках стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее прим.*, 6 (1961) 216—218.
[6] DOOB, J. L.: The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.*, 15 (1944) 229—281.
[7] ДЫНКИН, Е. Б.: Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей, *Усп. мат. наук*, 6 (1951) 68—90.
[8] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: *Statistical analysis of stationary time series*, John Wiley, New York, 1957.
[9] ПОНТЯГИН, Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1961.
[10] QUENOUILLE, M. H.: *The analysis of multiple time series*, London, 1957.
[11] РОЗАНОВ, Ю. А.: Стационарные случайные процессы, Москва, 1963.

(Beérkezett: 1965. III. 5.)

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.
A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó*,
Budapest, V., Alkotmány utca 21
(Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46)
teljesít.

Külföldi megrendelések
a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
Budapest, I., Fő utca 32
(Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181)
útján eszközölhetők.