Á. SZABÓ

WIE IST DIE MATHEMATIK ZU EINER DEDUKTIVEN WISSENSCHAFT GEWORDEN?

Wir vertreten in dieser Arbeit die folgenden drei Thesen: 1. die griechische Mathematik ist als deduktive Wissenschaft spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts unter dem Einfluss der eleatischen Philosophie entstanden, 2. die Eleaten waren es, die schon *vor* dieser entscheidenden Wandlung zum ersten Male in der Geschichte des europäischen Denkens die grundlegenden Prinzipien der Logik klar formulierten, und 3. die deduktive Mathematik ist solange überhaupt nicht möglich, bis der Mathematiker die Begründung seiner Sätze nicht auf eine schon vorhandene und bewusst angewandte Logik bauen kann. — Um diese Auffassung begründen zu können, gliedert sich die vorliegende Untersuchung in *vier* Kapitel. *Im ersten Kapitel* wollen wir die wichtigsten jener Fragen der griechischen Mathematik-Geschichte mindestens kurz erwähnen, die eben dadurch gestellt worden sind, dass man die Mathematik der vorgriechischen Völker des alten Orients besser kennengelernt hatte; *im zweiten* besprechen wir die neueren Erklärungsversuche über das Zustandekommen der griechischen Mathematik; *im dritten* fassen wir jene wichtigsten antiken Angaben und daran anknüpfenden modernen Erklärungen zusammen, auf die sich unsere eigene Theorie baut, und schliesslich *im vierten* entwickeln und begründen wir dieselbe Theorie über das Entstehen der griechischen exakten Wissenschaft in einer ausführlicheren Behandlung des mathematischen indirekten Beweisverfahrens.

I

Im Laufe der letzten Jahrzehnte beschäftigten sich mehrere bedeutende wissenschaftsgeschichtliche Arbeiten mit den mathematischen Kenntnissen der alten vorgriechischen Völker von Aegypten und Babylon.[1] Als Ergebnis der Forschungen auf diesem Gebiete darf nicht allein die Tatsache gelten, dass man die Mathematik der vorgriechischen Kulturen besser kennen-

[1] Man findet die wichtigsten Ergebnisse dieser Forschungen zusammengefasst in den ersten drei Kapiteln des Werkes B. L. v. d. Waerden: Science awakening. Groningen 1954.

gelernt hatte, sondern auch der Zustand selbst, dass sich auch unser Bild vom Griechentum und von den Anfängen der Wissenschaft im Lichte unserer neuen Kenntnisse weitgehend veränderte. Solange man nichts von der ägyptischen und babylonischen Mathematik wusste, konnten die Griechen mit mehr oder weniger Recht als die allerersten Schöpfer und Begründer dieser Wissenschaft gelten. Aber es veränderte sich plötzlich die Lage, als es sich herausstellte, dass manche wichtigen mathematischen Erkenntnisse, die in der griechischen Überlieferung auf das 6. oder 5. Jahrhundert v. u. Z. datiert werden, in den vorgriechischen Kulturen schon Jahrhunderte früher bekannt waren. Das Leben des Pythagoras wird z. B. nach der griechischen Überlieferung auf das 6. Jahrhundert v. u. Z. gesetzt, und dementsprechend könnte aus demselben Jahrhundert der sog. Satz des Pythagoras stammen, der von den Späteren ihm zugeschrieben wird. Manche Forscher haben jedoch früher die traditionelle Zuschreibung dieses Lehrsatzes an Pythagoras in Zweifel gezogen, weil man sich nicht hat erklären können, wie die Erkenntnis dieses Satzes in einem so frühen Stadium der Wissenschaft möglich gewesen wäre.[2] Aber diese Skepsis der antiken Überlieferung gegenüber bekam einen völlig neuen Sinn, als es sich herausstellte, dass die praktische Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes den Babyloniern schon im 2. Jahrtausend v. u. Z. bekannt war.[3] Man musste ähnlicherweise zur Kenntnis nehmen, dass auch der grösste Teil jenes mathematischen Wissens, welches durch Euklid in systematischer Ordnung behandelt wird, mindestens als eine Summe von empirischen Kenntnissen schon lange vor den Griechen in der babylonischen Kultur geschlossen vorlag.[4]

Dadurch, dass man die Vorgeschichte der griechischen Wissenschaft kennenlernte, schienen auch die Griechen selbst jenen alten Ruhm, den sie früher in der Geschichte der Wissenschaft genossen, beinahe zu verlieren. Wie O. Neugebauer, der hervorragende Kenner der älteren Mathematik-Geschichte schreibt : seitdem wir nicht nur jene zweieinhalb tausend Jahre Geschichte kennen, die seit dem klassischen Zeitalter verfloss, sondern seitdem wir auch jene anderen zweieinhalb tausend Jahre mehr oder weniger überblicken können, die dem griechischen Altertum voraufgingen, ist es nicht mehr möglich, in den Griechen die allerersten Schöpfer und Begründer

[2] Vgl. B. L. v. d. Waerden : Die Arithmetik der Pythagoreer I. Math. Ann. 120 (1947/49) 127—153 ; besonders auf S. 132.

[3] Vgl. O. Neugebauer : Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften. Berlin 1934. S. 168 und K. Reidemeister : Das exakte Denken der Griechen. Hamburg 1949. S. 51.

[4] Vgl. O. Neugebauer : Studien zur Geschichte der antiken Algebra III (Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3 [1936] 245—259) : «sowohl im Bereich der elementaren Geometrie, wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre, wie schliesslich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte *inhaltliche* Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluss ist in allen Punkten lückenlos herzustellen.»

der Wissenschaft zu erblicken.[5] Wie wir heute sehen, stehen die Griechen nicht mehr am allerersten Anfang der Geschichte der Wissenschaft, sondern irgendwo in ihrer Mitte.[6] Ja, Neugebauer hat gerade in Hinsicht auf die babylonische Mathematik sogar die Frage aufgeworfen, ob es überhaupt recht und billig wäre, die Errungenschaften der griechischen Mathematik unter dem Gesichtspunkt der Wissenschaftsgeschichte eindeutig und *nur* bejahend zu bewerten? — Denn die Griechen haben ja schliesslich, anstatt dessen, dass sie das babylonische Positionssystem der Zahlen in ein bewusstes Positionssystem der Basis 10 oder 12 verwandelt hätten, die positionelle Bezeichnung in Zahlbuchstaben modifiziert, — was selbstverständlich ein folgenschwerer Rückschritt war.[7] Ebenso wurde in der griechischen Mathematik «die Einsicht in das Wesen der Irrationalzahlen erkauft mit dem abrupten Abbrechen eines bereits zu einem algebraischen Formalismus gelangten

[5] O. Neugebauer : o. c. S. 259.

[6] B. L. v. d. Waerden : Math. Ann. 120 (1947/49) S. 132.

[7] A. Frenkian : Études de mathématiques suméro-akkadiennes, égyptiennes et grecques (in der «Revue de l'Université de Bucarest» 1953, 9–20) schreibt (im französischen Auszug seiner rumänisch verfassten Arbeit) : »Rien n'indique que les mathématiciens grecs aient connu le système de notation de position relative des peuples de la Mésopotamie. Le système grec de notation des nombres est des plus défectueux, *incapable d'aider le calcul* (von mir herausgehoben – Á. Szabó) inférieur même à celui des Égyptiens, qui avait un signe particulier pour chaque ordre d'unités décimales, qu'ils répétaient autant de fois qu'il était nécessaire pour écrire un nombre donné. Donc, ou bien les Grecs n'ont pas connu le système de notation des Babyloniens, ou bien *l'esprit de leur mathématique étant orienté dans une autre direction, ils n'ont pas adopté ce système, si toutefois ils l'ont connu* (von mir herausgehoben – Á. Szabó). – Im weiteren versucht dann A. Frenkian noch zu erklären, warum eigentlich die Griechen nicht ein besseres Bezeichnungssystem für die Zahlen entwickelt hatten, und er kommt zu der folgenden, bemerkenswerten Vermutung : «Les Hellènes avaient deux sciences qui s'occupaient des nombres : *l'arithmétique* qui était la science théorique des nombres, très étudiée et honorée, et la *logistique* qui était lié à la pratique et qu'on avait abandonné à des spécialistes considérés comme des artisans, appelés, avec un certain mépris, du nom de *banausoi*. C'est ainsi que la science théorique qui est l'arithmétique a fait chez eux de grands progrès, sans faire profiter la logistique de ces progrès. Celle ci a continué de travailler avec les anciennes méthodes venues de l'Égypte : à savoir, la multiplication par duplications successives dont parle un scholie au dialogue Charmide de Platon et le calcul fractionnaire seulement avec des fractions ayant l'unité au numérateur, méthode qui fut employé jusqu' aux temps des Byzantins. – Les mathématiques suméro-akkadiennes ont été beaucoup plus liées à la pratique, comme on le voit par les problèmes qu'elles ont à résoudre dans les textes qui nous sont parvenus. Ensuite, la base de 60 pour le système de numération était très grande et c'est pourquoi les tenants de la civilisation mésopotamienne ont eu recours à la notation de position relative, etc.» – Diese Vermutung passt ausgezeichnet zu jener Auffassung, die wir in dieser Arbeit vertreten : nicht nur die grossartigen Errungenschaften der griechischen Mathematik, sondern auch ihre relativen *Rückstände* stellen nur die Folge derselben grundlegenden Tendenz der antiken klassischen Wissenschaft dar. — Man muss zu der im ganzen wohl richtigen Theorie von A. Frenkian nur die folgende Korrektur hinzufügen: es ist irreführend einfach nur eine «*theoretische* Arithmetik» der Griechen mit einer «*praktischen* Logistik» zu konfrontieren. Denn Platon stellt z. B. im Staat und im Philebos der «praktischen» Arithmetik *und* der «praktischen» Logistik die entsprechenden «theoretischen» Disziplinen entgegen. Es können also beide Namen — Arithmetik und Logistik — sowohl theoretische, wie auch banausische, praktische Kenntnisse bezeichnen. Man vgl. zu dieser Frage die gründliche Arbeit von J. Klein : Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra I u. II, Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. Abt. B. Bd. 3 (1936) S. 18 ff. und 122 ff.

Systems, das sich in allen Punkten direkt in die Algebra der Renaissance hätte fortentwickeln können ; ohne die tiefsten mathematischen Leistungen der Griechen wären vielleicht 2000 Jahre zu 'gewinnen' gewesen.»[8]

Selbstverständlich ist sich auch Neugebauer dessen wohl bewusst, dass die mathematischen Leistungen der Griechen historisch keineswegs bloss als ein «Rückschritt» im wahrsten Sinne des Wortes angesehen werden können. Er beruft sich ja auf die genannten Fälle, nur um zu illustrieren, wie die Bewertung historischer Prozesse nach dem Prinzip der einfachen Linearität fehlschlagen muss. Die babylonische Mathematik besass in der Tat auch solche Ansätze, die durch die späteren Griechen *nicht* ausgenutzt wurden ; ja, es wurde sogar durch die Tatsache, dass die Griechen die Entwicklung der Mathematik in eine bestimmte Richtung lenkten, eine ziemlich lange Zeit hindurch — eigentlich bis zur Zeit der europäischen Renaissance — verhindert, dass die entwicklungsfähigen Ansätze der älteren babylonischen Algebra zur Entfaltung kämen.[9]

Wir beurteilen also die Griechen, seitdem wir die vorgriechische Wissenschaft einigermassen besser kennen, schon völlig anders als früher. Ja, wir stellen uns seit derselben Zeit auch die Anfänge der Mathematik schon anders vor, als etwa noch vor achtzig Jahren. Man dachte früher z. B., dass die Anfänge der Mathematik «geometrischen» Charakter haben müssten, da ja die Geometrie «weniger abstrakt» und «viel anschaulicher» als die Algebra sei. Man merkte es kaum, dass diese Anschauung in letzter Linie nur ein Effekt der ungeheueren Wirkung der Sprechweise von Euklids Elementen und der anschliessenden Form der griechischen Mathematik ist, die auch unsere ganze Erziehung entscheidend beeinflusst hat. Man dachte, dass die älteste mathematische Disziplin die Geometrie sei, eigentlich nur deswegen, weil bei den Griechen, dem damals so gut wie einzig bekannten Kulturvolk des Altertums, die Mathematik beinahe völlig in der Geometrie aufging. Und man vergass im Banne dieser Betrachtungsart, dass die tatsächliche Entwicklung dem Postulat von der geschichtlichen Priorität des Geometrischen auf Schritt und Tritt widerspricht. Die grossen Fortschritte der Geometrie sind in allen Phasen immer unlösbar mit der Entwicklung anderer Diszi-

[8] Sieh Anmerkung 5.

[9] Es ist übrigens interessant, wie dieselbe griechische Entwicklung durch v. d. Waerden beurteilt wird. Er schreibt nämlich über die logischen Konsequenzen, die sich aus der Entdeckung der Irrationalität ergeben (dass nämlich Strecken nicht universell durch Zahlen darstellbar sind und daher auch nicht ohne weiteres wie Zahlen behandelt werden dürfen), und vergleicht die Leistung der Griechen auf diesem Gebiete mit der Stellungnahme der Vertreter der europäischen Wissenschaft folgendermassen : «die meisten Vertreter der abendländischen Wissenschaft haben die Darstellbarkeit von geometrischen Grössen durch Zahlen nie bezweifelt, obwohl sie mit der Existenz von irrationalen Verhältnissen bekannt waren, und obwohl man vor Dedekind und Cantor nicht über den exakten modernen Begriff der reellen Zahl verfügte. *Die griechische Kultur ist meines Wissens die einzige, die diese logische Konsequenz wirklich vollzogen hat*» (von mir herausgehoben — Á. Szabó).

plinen verknüpft[10], so dass das Geometrische an sich immer erst nachträglich wieder aus dieser Verknüpfung gelöst werden musste. Wie uns die neueren Forschungen gelehrt haben, ist diese Beobachtung auch auf die Anfänge der Wissenschaft zutreffend. Für die Frühgeschichte der Mathematik ist eine «reine» («synthetische») Geometrie viel zu schwierig. Das primäre Hilfsmittel ist hier die Verknüpfung mit dem Bereich der (rationalen) Zahlen, und ein wesentlicher Fortschritt der Geometrie ist erst möglich, wenn die ungeometrischen Hilfsmittel weit genug entwickelt sind. Darum ist in jenen 2000 Jahren der Entwicklung, die dem griechischen Zeitalter vorangehen, alles 'geometrische' nur ein *sekundäres* Objekt zunächst der Rechentechnik mit den rationalen Zahlen in beiden vorgriechischen Kulturen, dann der Algebra in Babylonien.[11] Die Geometrie wird erst viel später, nur bei den Griechen in den Vordergrund des mathematischen Interesses gerückt.

Durch diese Entdeckung wurde auch das Verständnis einer solchen Erscheinung innerhalb der griechischen Mathematik selbst erleichtert, die man zwar auch früher schon bemerkt hatte, aber kaum erklären konnte. Es fiel nämlich schon H. G. Zeuthen auf,[12] dass es sich besonders im II. und im VI. Buch der Euklidischen Elemente vorwiegend um algebraische Probleme in geometrischer Form handelt. Aber man konnte früher kaum befriedigend erklären: was eigentlich die Griechen veranlasst haben mag, um die Algebra zu geometrisieren? Man konnte sich früher in diesem Zusammenhang höchstens auf die grössere «Anschaulichkeit» der Geometrie berufen. Dagegen kann man heute die Antwort auf die Frage nach der geschichtlichen Ursache der gesamten «geometrischen Algebra» vollständig geben: «sie liegt einerseits in der aus der Entdeckung der irrationalen Grössen folgenden Forderung der Griechen, der Mathematik ihre Allgemeingültigkeit zu sichern durch Übergang vom Bereich der rationalen Zahlen zum Bereich der allgemeinen Grössenverhältnisse, andererseits in der daraus resultierenden Notwendigkeit, *auch die Ergebnisse der vorgriechischen 'algebraischen' Algebra in eine 'geometrische' Algebra zu übersetzen*».[13] In dieser Beleuchtung wurde es auf einmal auch klar, warum am Anfang des 4. Jahrhunderts *Archytas* die Arithmetik — d. h. also die Algebra der Griechen — der Geometrie noch vorziehen konnte;[14] er hat nämlich die logischen Konsequenzen aus der

[10] O. NEUGEBAUER o. c. S. 246 verweist in diesem Zusammenhang auf die folgenden historischen Verknüpfungen: analytische Geometrie und elementare Algebra, Differentialgeometrie und Analysis, Topologie und Riemannsche Flächen + abstrakte Algebra.

[11] O. NEUGEBAUER: o. c. S. 247.

[12] An diese frühere Erkenntnis von H. G. ZEUTHEN (Die Mathematik im Alterum und Mittelalter) erinnern O. NEUGEBAUER o. c. 249 und B. L. V. D. WAERDEN: Math. Ann. 117 (1940) S. 158.

[13] O. NEUGEBAUER: o. c. S. 250.

[14] Archytas B 4 (DIELS): «Und die Logistik hat, wie es scheint, in Bezug auf Wissenschaft vor den anderen Künsten einen recht beträchtlichen Vorrang; besonders auch vor der Geometrie, da sie deutlicher als diese behandeln kann was sie will ... und wo die Geometrie versagt, bringt die Logistik Beweise zustande ...» Von «Logistik»

Erkenntnis der Irrationalität noch nicht so weitgehend zur Geltung gebracht, wie bald nach ihm Theaitetos und Platon es taten.[15] Mit anderen Worten heisst es auch so viel, dass wir heute schon genau jene Zeitspanne kennen, zu welcher bei den Griechen die ältere Arithmetik durch die Geometrie verdrängt wurde;[16] es ist auch bekannt, dass jenes Interesse, mit welchem man sich jetzt erneut der Geometrie zuwandte, im Grunde durch eine logische Erkenntnis, nämlich durch die Entdeckung der irrationalen Zahlenverhältnisse erweckt wurde.[17] — Es musste also jene ältere Auffassung, welche die «Anschaulichkeit» der griechischen Geometrie betonte, überprüft werden; ja, es fragte sich sogar, angesichts der neuen historischen Perspektive, die sich erschloss: ob überhaupt das wesentlichste Merkmal der griechischen Mathematik ihre Anschaulichkeit sei?[18] Man musste auf einmal jenem Platon Recht geben, der über die griechische Mathematik schon in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts betonte, dass die Anschaulichkeit der Geometrie keineswegs eine *konkrete* Anschaulichkeit sei; denn sie *erinnere* nur an etwas, was anders als auf gedanklichem Wege gar nicht zugänglich wäre.[19]

redet Archytas in einem Arithmetik und Logistik umspannenden Sinne; vgl. J. Klein: Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. Abt. B. Bd. 3 (1936) S. 32 A. 1. Verstünde Archytas unter «Logistik» nicht die theoretische Mathematik, so könnte er gar nicht behaupten, dass die Logistik «Beweise zustande bringe»; nicht die banausische Techne, sondern Platons *theoretische* Logistik und *theoretische* Arithmetik zusammen, also ein Zweig der «Mathemata», stellen eine beweisende (apodeiktische), deduktive Wissenschaft dar. — Es ist übrigens interessant, dass der wahre Sinn dieses Archytas-Fragmentes solange überhaupt kaum erklärt werden konnte, bis die zitierten Worte durch O. Neugebauer (o. c. S. 245 ff.) nicht in die richtige historische Beleuchtung gestellt worden sind; Neugebauer schreibt nämlich darüber: «Die Prägnanz dieses Ausspruchs ist umso interessanter, als er ja nur um wenige Jahre älter ist, als die Geometrisierung der griechischen Mathematik, die wir als ihre *klassische* Form anzusehen gewöhnt sind.» H. Diels bemerkte noch zu den Worten des Archytas: «*Sinn und Herstellung des Fragments unsicher* . . .» — Richtig behandelt wird dagegen das Archytas-Fragment — auch von O. Neugebauer unabhängig — bei A. M. Frenkian: Le postulat chez Euclide et chez les modernes. Paris 1940. S. 20, 1.

[15] B. L. v. d. Waerden (Zenon und die Grundlagenkrise der griech. Mathematik, Math. Ann. 117 [1940] 141 ff.) schreibt im Zusammenhang mit den vorigen Archytas-Worten: «Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Platon ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt. Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gewande, als Flächenrechnung oder geometrische Algebra ihr Dasein fristen.» (Zum Terminus «Logistik» dieses Zitates vgl. man oben auch die Anm. 7 und 14!)

[16] Sieh die beiden vorigen Anmerkungen!

[17] Vgl. B. L. v. d. Waerden: Science awakening, Groningen 1954. S. 126: «It is therefore *logical necessity*, not the mere delight in the visible, which compelled the Pythagoreans to transmute their algebra into a geometric form.»

[18] K. Reidemeister: Das exakte Denken der Griechen. Hamburg 1949. S. 51: «Es ist ein weitverbreitetes Vorurteil, das wesentliche Merkmal der griechischen Mathematik sei ihre Anschaulichkeit . . . Richtig ist es vielmehr, dass sich in der pythagoreischen Mathematik die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht.»

[19] Vgl. Platon, Staat VII 526 und 527. Wenn die Mathematiker über Zahlen sprechen, so verstehen sie unter Zahlen etwas, was nur gedacht werden kann; ähnlich verhält es sich auch in der Geometrie; wenn man nämlich etwas in dieser Wissenschaft

Man ersieht also aus den angeführten Beispielen, dass die gründlichere Erforschung der vorgriechischen Mathematik in der Tat auch unsere Kenntnisse über die Griechen veränderte und vertiefte. Heute können zwar die alten Griechen nicht mehr in demselben Sinne für die ersten Schöpfer und Begründer der mathematischen Wissenschaft gelten, wie man es früher von ihnen dachte, aber umso konkreter kann man heute die historische Bedeutung dessen unterstreichen, was sie in der Tat in der Mathematik geleistet hatten. Es hat sich z. B. eindeutig herausgestellt, dass in der vorgriechischen Mathematik solche Begriffe, wie *Satz*, *Beweis*, *Definition*, *Postulat* und *Axiom* noch gar nicht existierten.[20] Diese ältere Mathematik war eigentlich nur eine Summe von empirischen Kenntnissen; man stellte nur Regeln zusammen, wie man gewisse Aufgaben mathematischen Inhalts lösen kann, aber nie wurden Sätze in allgemeingültiger Form aufgestellt, und noch weniger wurde es versucht, irgendeinen Beweis für die Sätze zu liefern, man illustrierte höchstens in einer zahlenmässig ausgerechneten Probe die Anwendung der Regel. Zu einer deduktiven Wissenschaft wurde die Mathematik erst bei den Griechen. Diese Umwandlung der Summe von empirischen Kenntnissen in eine exakte Wissenschaft ist natürlich ein Schritt von riesiger Bedeutung für die ganze weitere Entwicklung. Man versteht also das Interesse, mit welchem man sich der Frage zuwendet: *wie*, *wann* und *warum* bei den Griechen die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden ist? — Wir wollen zunächst im zweiten Kapitel dieser Arbeit drei interessante Erklärungsversuche auf die letzthin genannten Fragen besprechen.

II

Man vergleicht das Entstehen der deduktiven Mathematik oft mit der Entfaltung der Lehre über die Logik. Unter anderen scheint auch K. v. Fritz dieser Ansicht zu sein, der zuletzt in einer Arbeit[21] mit Recht den Gedanken vertrat, dass die griechische Mathematik wohl nur infolge ihrer definitorisch-axiomatischen Grundlegung zu einer deduktiven Wissenschaft werden konnte. K. v. Fritz antwortet zwar nicht unmittelbar auf die Frage, wie, unter welchen

veranschaulichen will, so handelt es sich auch hier gar nicht um konkrete Dinge, sondern man will die Aufmerksamkeit auf etwas lenken, was anders als auf gedanklichem Wege gar nicht zugänglich ist.

[20] O. Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München 1954. S. 22: «Nicht einmal die Formulierung allgemeiner Sätze ist für Babylonien gesichert. (Dagegen kommen solche in der traditionellen Form des dogmatischen Kurzsatzes [sūtra] in der altindischen Sakralgeometrie vor.) Von Beweisen ist in den erhaltenen altorientalischen Dokumenten erst recht nichts zu finden; höchstens kommen zahlenmässig ausgerechnete Proben vor.»

[21] K. v. Fritz: Die *APXAI* in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte. Bd. I. Bonn 1955. 13–103.

Umständen, und wann eigentlich die definitorisch-axiomatische Grundlegung der griechischen Mathematik erfolgte, aber es lohnt sich dennoch seine Gedankengänge — hie und da auch weiter ergänzt — zu überblicken, denn es gibt darunter auch solche Gesichtspunkte, die unser Problem näher beleuchten können.

Euklid behandelt in seinem klassischen Werk, den «Elementen», die rund um 300 v. u. Z. entstanden, in einer Sondergruppe, gleich am Anfang seiner Erörterungen zusammengestellt, die Definitionen, Postulate und Axiome; erst nach dem Vorausschicken dieser «Prinzipien» geht er auf die Behandlung bezw. auf den Beweis der einzelnen Lehrsätze, der sog. Theoreme hinüber. Man findet bei Euklid selbst gar keine Erklärung dafür, was eigentlich der Sinn dieser Einteilung sei. Nur der Kommentator des 5. Jahrhunderts n. Zw., Proklos erklärt es in den folgenden Worten:

«Da wir behaupten, dass diese Wissenschaft, die Geometrie, auf Voraussetzungen beruhe und von bestimmten Prinzipien aus die abgeleiteten Folgerungen beweise — denn nur eine ist voraussetzungslos, die anderen aber empfangen ihre Prinzipien von dieser —, so muss unbedingt der Verfasser eines geometrischen Elementarbuches gesondert die Prinzipien der Wissenschaft lehren und gesondert die Folgerungen aus den Prinzipien; von den Prinzipien braucht er nicht Rechenschaft zu geben, wohl aber von den Folgerungen hieraus. Denn keine Wissenschaft beweist ihre eigenen Prinzipien und stellt sie zur Diskussion, sondern hält sie für an sich gewiss; sie sind ihr klarer als die Ableitungen; erstere erkennt sie in deren eigenem Licht, die Ableitungen aber durch die Prinzipien . . . Wenn aber jemand die Prinzipien und die Ableitungen hiervon in denselben Topf wirft, so richtet er nur Verwirrung an im ganzen Wissensbereich und vermengt, was miteinander nichts zu tun hat. Denn das Prinzip und das davon Abgeleitete sind von Haus aus voneinander gesondert.»[22]

Es wird bei Proklos an anderen Stellen auch genau erklärt, was der Unterschied zwischen Definitionen, Postulaten und Axiomen sei; diese drei Dinge werden bei ihm «Prinzipien», d. h. griechisch: *ἀρχαί* genannt. Besonders wichtig ist für uns jetzt in diesem Zusammenhang, dass nach der Erklärung des Kommentators der Beweis oder die geometrische Begründung im Falle der Prinzipien nicht nötig, ja nicht einmal auch möglich sei;[23] die

[22] Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873. S. 75.

[23] Proclus (ed. G. Friedlein) S. 178: «Gemeinsam ist nun den Axiomen und Postulaten, dass sie keiner Begründung und keiner geometrischen Beweise bedürfen, sondern dass sie als bekannt angenommen werden und Prinzipien sind für die Folgenden. (Sie unterscheiden sich aber voneinander ebenso, wie die Lehrsätze von den Aufgaben verschieden sind.)» — Ähnlich heisst es an einer anderen Stelle (S. 76): «Wenn der Hörer das Verständnis einer Behauptung als von sich aus einleuchtend nicht schon in sich hat, die Behauptung aber gleichwohl aufgestellt wird und er die Annahme zugibt, dann handelt es sich um eine *Definition.*» Vgl. auch noch S. 183.

Prinzipien werden als bekannt und als keines Beweises bedürftig vorausgesetzt, und sie gelten als *Gründe* für alle Theoreme, die aus ihnen folgen und gerade deswegen *nach* ihnen behandelt werden.

Man versteht in der Tat aus der Erklärung des Proklos sehr gut die Komposition des Euklidischen Werkes. Die Definitionen, Postulate und Axiome werden bei Euklid offenbar wirklich deswegen gleich am Anfang des ersten Buches[24] vor der Behandlung der einzelnen Lehrsätze aufgezählt, weil diese Dinge jene «Prinzipien» sind, aus welchen die Theoreme abgeleitet werden können. Dabei ist es jetzt einerlei, ob die einzelnen Definitionen, Postulate und Axiome *alle* in der Tat von Euklid selber stammen, oder ob er einige von diesen schon fertig übernahm, oder auch : ob nicht andere erst nachträglich in sein Werk hineingefügt worden seien.[25] Der Aufbau des ganzen Euklidischen Werkes ist selber der Beweis dafür, dass in der Tat schon der Verfasser dieser grossartigen Zusammenfassung jene Einteilung des gesamten mathematischen Wissens — in nicht-bewiesene Prinzipien einerseits und in abgeleitete Lehrsätze andererseits —, von welcher Proklos redet, gekannt haben muss. Das heisst aber mit anderen Worten auch so viel, dass Euklid um 300 v. u. Z. schon sehr genau wusste : worin überhaupt der mathematische Beweis besteht, und wie weit er geführt werden kann.

Aristoteles war es, der schon eine Generation früher, als Euklid lebte, im 4. Jahrhundert in einem seiner logischen Werke, den Analytica posteriora die Methoden der sog. beweisenden (apodeiktischen) Wissenschaften einer eingehenden Behandlung unterzog. Die diesbezüglichen Erörterungen des Aristoteles lassen sich im grossen und ganzen damit vereinigen, was Proklos, der Kommentator des Euklidischen Werkes über den mathematischen Beweis entwickelt, obwohl man oft den Eindruck hat, dass Euklid und die antiken Mathematiker nicht über alle Punkte derselben Meinung waren, wie Aristoteles; ja, selbst die Terminologie des Aristoteles ist nicht immer dieselbe, wie diejenige der Mathematiker.[26] Wir können uns jedoch diesmal damit begnügen, dass auch Aristoteles die Methoden der beweisenden (apodeiktischen) Wissenschaft an der Mathematik illustriert, und dass auch er über die Prinzipien ebenso denkt, wie Euklid bzw. Proklos ; wie er schreibt :

[24] Postulate und Axiome werden bei Euklid nur am Anfang des ersten Buches aufgezählt, dagegen findet man Definitionen — vom VIII., IX., XII. und XIII. Buch abgesehen — am Anfang jedes einzelnen Buches. — Da die Axiome und Postulate allgemeingültiger als die Definitionen sind, wird man diese wohl verhältnismässig später gefunden haben als die Definitionen. Die Definitionen sind wohl die am frühesten erkannten mathematischen Prinzipien

[25] Über den verschiedenartigen Ursprung der Euklidischen Definitionen, Postulate und Axiome sich : P. Tannery : Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide (Mém. scient. II. 1912, 48—63) und A. M. Frenkian : Le postulat chez Euclide et chez les modernes. Paris 1940. 11—24.

[26] Treffend bemerkt in diesem Zusammenhang K. v. Fritz : o. c. S. 103 : «Die mathematische Entwicklung ist weitgehend an Aristoteles vorbeigegangen.»

«Mit dem Namen des Prinzips bezeichne ich in jeder Gattung dasjenige, worüber es sich nicht beweisen lässt, dass es *existiert*, bezw. dass es *gültig ist.*»[27] Kein Zweifel, in demselben Sinne werden die Definitionen, Postulate und Axiome auch durch Euklid und Proklos als «Prinzipien» angesehen.

Aber derselben Meinung war in Bezug auf die mathematischen Prinzipien — oder mindestens in Bezug auf die Definitionen — auch schon Platon um eine Generation früher als Aristoteles, in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts. Wie der Sokrates des Platonischen Dialoges über den «Staat» entwickelt: «Du weisst doch wohl, dass die Geometriker, die Arithmetiker und die übrigen, die sich mit ähnlichen Wissenschaften beschäftigen, allen ihren Untersuchungen *bestimmte Voraussetzungen* zu Grunde legen, wie z. B. die Begriffe 'Gerades' und 'Ungerades', die geometrischen Figuren, die drei Arten von Winkeln und manches ähnliche. Sie nehmen solche Begriffe einfach an, als ob sie sich über diese Dinge schon im klaren wären, und *halten es nicht für nötig, sich und anderen Rechenschaft über etwas zu geben, was einem jeden doch klar sei.* Von dieser Grundlage aus gehen sie dann vorwärts und finden schliesslich in Übereinstimmung mit ihr das, was Gegenstand ihrer Untersuchung war» (VI 510 C—D). «Die Seele ist bei ihren Betrachtungen auf Voraussetzungen angewiesen und geht nicht bis auf den Grund, da sie *über die Voraussetzungen hinaus rückwärts nicht gehen könnte*» (VI 511 A).

Überlegt man sich diese Platon-Zitate, so muss man daraus schliessen, dass die Griechen lange vor Euklid, zu Platons Zeit allerdings, schon sehr wesentliche Dinge über die Art und Weise des mathematischen Beweisverfahrens wissen mussten. Sie wussten nämlich, dass der mathematische Beweis kein unendlicher Prozess sein kann; es gibt in ihm keinen *regressus ad infinitum.* Mit anderen Worten: sie wussten schon, dass die Mathematik auf solche Voraussetzungen gebaut ist, die man nicht weiter beweisen kann. Dieses Wissen ist zu der definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik unerlässlich nötig, und es war zu Platons Zeit allerdings schon vorhanden.

Fragen wir vorläufig noch nicht, auf welchem Wege wohl die Griechen zu der Überzeugung kamen, dass die beweisende (apodeiktische) Wissenschaft auf unbewiesene Voraussetzungen gebaut werden muss. Statt dieser jetzt noch rätselhaften Frage, versuchen wir diesmal eine andere, etwas leichtere zu beantworten: was mag denn überhaupt die Griechen veranlasst haben, eine definitorisch-axiomatische Grundlegung für die Mathematik zu erschaffen? — Diese Frage liesse sich — mindestens provisorisch — etwa folgendermassen beantworten: sie mussten einmal wohl auf den Gedanken kommen, dass es möglich wäre, alle jene Feststellungen — oder sagen wir: Sätze mathematischen Inhalts — zusammenzustellen, die man überhaupt nicht beweisen konnte, die aber auch in sich als evident empfunden wurden,

[27] Aristoteles, Analytica Posteriora I 10.

und auf die man dann im weiteren ihr ganzes mathematisches Wissen aufbauen konnte. (Möge diese Vermutung auch noch so vage und unbestimmt sein, so vermag sie uns dennoch — mindestens als Arbeitshypothese — weiterzuhelfen.)

Das Zustandekommen einer solchen definitorisch-axiomatischen Grundlegung wurde durch K. v. Fritz mit der Entfaltung der Aristotelischen Logik verglichen. Die Aristotelische Logik soll nämlich — wie er schreibt — aus der Dialektik hervorgegangen sein. (Unter «Dialektik» versteht er die Platonische *διαλεκτικὴ τέχνη*.) Es ist in der dialektischen Auseinandersetzung die Aufgabe des einen Dialogpartners den anderen dazu zu bringen, einen von ihm gewählten Satz zuzugeben. Zu diesem Zweck muss er solche Prämissen finden, die der Partner für richtig hält und daher zugeben wird, und aus denen sich der Endsatz den der Partner nicht für richtig hält und nicht zugeben will, mit logischer Notwendigkeit ableiten lässt.

Kein Zweifel, dieses Schema lässt sich in der Tat sehr leicht auf die Euklidische Mathematik anwenden. Man kann fast über jeden beliebigen «komplizierten» Euklidischen Satz feststellen, dass er im Beweis auf «einfachere» Sätze zurückgeführt wird ; die «einfachen» werden dagegen unmittelbar aus Definitionen, Postulaten oder Axiomen abgeleitet.[28] Die Mathematik heisst ja gerade deswegen *«deduktive* Wissenschaft», weil sie alle ihre Behauptungen (Sätze) aus solchen Prämissen *ableitet*, bezw. die Behauptungen auf allgemein zugegebene Prämissen *zurückführt*.

Lehrreich ist, das Zustandekommen der definitorisch-axiomatischen Grundlegung mit der Entfaltung der Aristotelischen Logik zu vergleichen, auch schon deswegen, weil es uns auf einen sehr wesentlichen Umstand aufmerksam macht. In der dialektischen Auseinandersetzung ist nämlich der Ausgangspunkt desjenigen, der etwas beweisen will, der Endsatz selbst, und er sucht erst *nachträglich* jene Prämissen zu seiner Behauptung, die auch sein Gegner für richtig hält und zugibt ; aber es ist gar nicht unbedingt nötig, dass man zu jenem Endsatz, den man beweisen will, in der Tat auf Grund der Kenntnis jener Prämissen gelangt sei, die man im Beweis benutzt. Im Gegenteil, es ist sehr wohl möglich, dass die Teilnehmer der dialektischen Auseinandersetzung die logischen Prämissen irgendeiner wahr empfundenen oder plausiblen Behauptung erst dann erkannten, als der eine von ihnen versuchte den anderen dazu zu bringen, den von ihm gewählten Satz zuzugeben. — Es ist ja klar, dass derselbe Fall auch für einen grossen Teil der mathe-

[28] Es ist bezeichnend für den naiven Empirismus der Griechen, dass sie den Unterschied zwischen «einfacheren» und «komplizierteren» Sätzen für *objektive* Tatsache hielten. Sie sind scheinbar nicht dahintergekommen, wie subjektiver Art jede solche Unterscheidung ist. Allerdings erörtert Aristoteles langwierig, welcher Art jene Prämissen sein müssten, auf die sich die deduktive Wissenschaft bauen kann ; vgl. K. v. Fritz : o. c. S. 23 : «Das als Prinzip angenommene muss in sich *einsichtiger* (?), *einfacher* (?) und abstrakter sein als das, was daraus abgeleitet wird.»

matischen Sätze Euklids gültig ist. In manchen Fällen war der Inhalt dieser Sätze bei den Völkern des alten Orients aus der Praxis schon längst bekannt, als später die Griechen versuchten, jene «einfacheren» Sätze zu finden, aus welchen sich die «komplizierten» ableiten lassen. Denn «nach Euklid dargestellt erscheint zwar die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft, aber die Mathematik im Entstehen erscheint als eine experimentelle (induktive) Wissenschaft».[29]

Nachdem im Sinne der versuchten Erklärung die Griechen im Laufe der definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik erst *nachträglich* jene Prämissen suchten, die zum Beweis ihrer Sätze nötig waren, wird es auch verständlich, dass es ihnen kaum gleich am Anfang gelingen konnte, die Frage zu klären : welche sind denn die «einfachsten» Behauptungen mathematischen Inhalts, welche dürfen als allgemein zugegebene Prämissen, als keines Beweises bedürftige Axiome, Postulate oder Definitionen gelten? — Es ist wahrscheinlich, dass alles, was bei Euklid unter den «Prinzipien» zusammengefasst wird, das Ergebnis einer längeren Entwicklung darstellt. Denn im Sinne des obigen Schemas mussten ja die Mathematiker anfangs nur bestrebt gewesen sein, die «komplizierteren» Behauptungen auf «einfachere», auf solche Sätze zurückzuführen, die auch der Gegner für richtig hielt. Soll das wirklich der Weg der Entwicklung gewesen sein, so ist es kaum denkbar, dass man gleich am Anfang, sozusagen mit einem Schlage die «allereinfachsten» Prämissen, die Axiome, Postulate und Definitionen gefunden hätte. Bezeichnend dafür, wie lange Zeit hindurch derartige Versuche angestellt wurden, ist die Erzählung von Proklos, der berichtet,[30] dass auch noch in der Zeit nach Euklid Apollonios von Perge versucht hätte, das erste Euklidische Axiom zu beweisen : «was demselben gleich ist, ist untereinander gleich».[31] Proklos behauptet, dass dieser Versuch von Apollonios deswegen fehlschlagen musste, weil er mit «weniger evidenten» Prämissen begründen wollte, was «evidenter» ist, als seine eigenen angeblichen Prämissen.[32]

Wie man sieht, stellt also die versuchte Erklärung — d. h. der Vergleich der definitorisch-axiomatischen Grundlegung der griechischen Mathematik mit der Entfaltung der Aristotelischen Logik — eine Theorie dar, die zwar teilweise *richtig* jene Umstände beleuchtet, unter welchen die griechische

[29] G. Pólya : Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern 1949. S. 9.

[30] Proclus (ed. G. Friedlein) 183.

[31] Nach der Übersetzung von O. Becker : Grundlagen der Mathematik. Freiburg/München 1954. S. 90. Dasselbe in der Übersetzung von P. Tannery (s. oben Anm. 25) : *Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles.*

[32] Bemerken wir im Zusammenhang mit diesem Versuch von Apollonios : nach unseren heutigen Kenntnissen wäre die Annahme *nicht* wahrscheinlich, dass Apollonios «bewusst axiomatisiert hätte» — in dem Sinne nämlich, dass er erkannt hätte: Euklids Axiome können in der Tat in einem nicht-euklidischen Axiomen-System als abgeleitete Sätze auftreten.

Wissenschaft zustande kam, aber der Verfasser — K. v. Fritz — versäumt dennoch — wohl auch infolge der anders orientierten Zielsetzung seiner Untersuchung —, die Frage klar und prägnant aufzuwerfen : *wann*, *wie* und *warum* jene entscheidende Wandlung eintrat, die zur Geburt der deduktiven Wissenschaft führte. Er antwortet auf diese Frage nur nebenbei mit den folgenden drei Behauptungen, — die zwar im Grunde wieder richtig sind, aber in ihren Konturen doch etwas verschwommen bleiben :

1. Er stellt fest, dass man die ersten Schritte zur definitorisch-axiomatischen Grundlegung wohl schon in der Zeit *vor* Aristoteles wird getan haben müssen, denn sonst könnte sich Aristoteles nicht eben auf die Mathematik in jenen Erörterungen berufen, in denen er die Methoden der beweisenden (apodeiktischen) Wissenschaft bespricht.[33]

2. Er verweist auch wiederholt darauf hin, dass die ältere griechische Mathematik — besonders diejenige des Thales — allem Anschein nach noch in höherem Masse empirischen Charakters sein musste, und die unmittelbare Evidenz der Anschaulichkeit erstrebte ; später — zur Zeit Euklids — wurden der empirische Zug und das Erstreben der Anschaulichkeit in der griechischen Mathematik in den Hintergrund gedrückt ; die Mathematik dieses späteren Zeitalters war schon abstrakter.[34]

3. Einmal stellt K. v. Fritz auch die Tatsache fest, dass jene griechische Mathematik, die von den Pythagoreern des 5. Jahrhunderts ausgegangen war, schon einen anderen Charakter hatte, als die Geometrie des Thales im 6. Jahrhundert : sie begnügte sich nämlich nicht mehr mit der Evidenz der Anschaulichkeit.[35]

Ein anderer Mangel dieser Theorie besteht darin, dass sie die folgenden Fragen so gut wie völlig offenlässt : Ob und inwiefern das Zustandekommen der deduktiven Mathematik mit der Entfaltung der Lehre über die Logik zusammenhing? Verliefen die beiden Erscheinungen — die Entwicklung der Logik und diejenige der Mathematik — nur parallel nebeneinander, sich nur stellenweise gegenseitig beeinflussend, oder musste die eine der anderen unbedingt vorangehen? Und welcher gehört dann die Priorität? — Auch wir lassen diese Fragen vorläufig auf sich bestehen, und wir wenden uns statt dessen jener anderen Theorie zu, die sich nicht mehr damit begnügt, das Entstehen der deduktiven Mathematik mit der Entfaltung der Logik zu

[33] K. v. Fritz : o. c. S. 43 : «Es ist deutlich zu sehen, dass Aristoteles nicht in der Weise hätte mit konkreten Beispielen aus der Mathematik operieren können, wenn Ansätze zu einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik . . . nicht schon vor ihm vorhanden gewesen wären.»

[34] Auf die Erörterungen des Verfassers, die die Geometrie des Thales betreffen, kommen wir noch im III. Kapitel dieser Arbeit zurück.

[35] K. v. Fritz : o. c. S. 79. — Der Gedanke, dass mit den Pythagoreern des 5. Jahrhunderts eine neue Epoche in der Geschichte der griechischen Mathematik beginnt, stammt eigentlich von K. Reidemeister. Sieh darüber das III. und IV. Kapitel dieser Arbeit.

vergleichen, sondern auch die Antwort auf die Frage versucht: wodurch eigentlich dieser merkwürdige Entwicklungsprozess veranlasst wurde?

Die ungarischen Verfasser Gy. Alexits und I. Fenyő behandelten zuletzt in einer populärwissenschaftlich orientierten Arbeit die Fragen der Mathematik und des dialektischen Materialismus.[36] Es wird sich trotz des ungebundenen Charakters dieser Schrift dennoch lohnen, einige Ausführungen der Verfasser näher zu besehen, da sie unter anderem auch eine sehr interessante und originelle Vermutung darüber aufstellen, wie die deduktive Mathematik bei den Griechen entstand. Sie schreiben nämlich an einer Stelle ihrer Untersuchung:

«Die wissenschaftliche Mathematik beginnt eigentlich mit dem Entdecken der Notwendigkeit des strengen Beweises (Pythagoras). Das Entdecken der Notwendigkeit des Beweises erklärt sich seinerseits aus den gesellschaftlichen (sozialen) Umständen. Seine Anfänge sind unmittelbar in der gleichzeitigen Philosophie zu suchen. Die Diskussionsart der Sophisten, die jeden Widerspruch ans Licht zu bringen vermochte, erweckte in den griechischen Forschern den Wunsch nach der logischen Beweisführung. Geht man weiter, so wird man feststellen müssen, dass der hohe Entwicklungsstand der Philosophie, und vor allem ihre Verbreitung in weiten Kreisen, nur die Folge der politischen, also der gesellschaftlichen Diskussionen, Polemiken war. Die Auswirkung dieser Diskussionen kam in der Mathematik epochemachend dadurch zur Geltung, dass man die Notwendigkeit des strengen Beweises entdeckte. Den mathematischen Kenntnissen der übrigen Völker des Altertums fehlte eben dieser entscheidend wichtige Zug, darum lassen sich auch diese Kenntnisse mit der echten Wissenschaft der Griechen nicht vergleichen.»[37]

Ehe wir versuchten zu der Betrachtungsart dieses Zitates Stellung zu nehmen, müssen wir noch auf einen anderen Gedanken aufmerksam machen, der die Denkweise der Verfasser weitgehend beeinflusste. Sie wollten nämlich auch im Falle der Griechen die Gültigkeit jener These nachweisen, dass die Entwicklung der Mathematik im allgemeinen mit der Entwicklung der gesamten Produktion Schritt hält, und dass ihre Probleme im Laufe der Geschichte oft einfach aus den Bedürfnissen der Produktion erwuchsen.[38] — Möge aber dieser Gedanke im grossen und ganzen zwar richtig sein, so lässt er sich dennoch nicht verallgemeinern. Im Falle der griechischen Mathematik lässt sich nämlich für die Zeit von Pythagoras bis einschliesslich Euklid kaum irgendeine nähere Verbindung zwischen den Problemen der deduktiven Wissenschaft einerseits und denen der Produktion andrerseits nachweisen. Es wäre auch verkehrt zu vergessen, dass die griechischen Mathematiker in den

[36] Gy. Alexits—I. Fenyő: Matematika és dialektikus materializmus (= Mathematik und dialektischer Materialismus), Budapest 1948.
[37] Ebd. S. 39.
[38] Daselbst S. 36—37.

meisten Fällen gar nichts davon hören wollten, dass ihre Wissenschaft überhaupt etwas mit der täglichen Praxis zu tun hätte. Sie erblickten in ihrem Wissen keineswegs das Ergebnis irgendwelcher praktischen Tätigkeit, und noch weniger ein Werkzeug der Produktion ;[39] im Gegenteil, die Mathematik stellte für sie sozusagen das völlige Sich-Abwenden von der Praxis, die reine Betrachtung, die blosse Gedankentätigkeit dar. — Ohne Rücksicht darauf, ob sie damit auch Recht hatten, darf man diese Ansichten der antiken Mathematiker nicht ausser Acht lassen, denn sonst wird es kaum möglich, jene Umstände zu begreifen, unter denen die deduktive Wissenschaft entstand.

Der Gedanke also, dass die Entwicklung der griechischen Mathematik mit der Entwicklung der Produktion Schritt hielte, lässt sich für die Zeit von Pythagoras bis Euklid kaum rechtfertigen. Noch weniger überzeugt die Gedankenführung des vorigen Zitates, nämlich die versuchte Antwort auf die Frage : wie die Mathematik bei den Griechen zu einer deduktiven Wissenschaft wurde. Die Verfasser möchten nämlich auch in dieser entscheidenden Wandlung den *indirekten Einfluss* der gleichzeitigen Produktion nachweisen, und sie denken folgendermassen :

Die Entwicklung der antiken Produktionsweise ermöglichte zu einer bestimmten Zeit die *Demokratie* der griechischen Sklavenhalter. In der Demokratie herrscht jedoch die *Freiheit der Diskussion*, und im Laufe der Diskussionen bringen die *Sophisten* als geschickte Wortstreitführer die *Widersprüche* der verschiedenen Meinungen ans Licht ; dadurch erwacht mit der Zeit *der Wunsch nach der logischen Beweisführung*, und diesen Wunsch erfüllt auch der griechische Mathematiker als er Beweise für seine Behauptungen (Sätze) liefert.

Besieht man die einzelnen Verknüpfungen dieser Gedankenkette genauer, so entdeckt man gleich den chronologischen Fehler der Konstruktion. Man soll nach der dargestellten Denkweise infolge der Tätigkeit der Sophisten auf die Widersprüche der verschiedenen Meinungen aufmerksam geworden sein, und dies soll den Wunsch nach der logischen Beweisführung erweckt haben. Die chronologische Reihenfolge der ineinander knüpfenden Gedankenmotive verläuft also : *entwickelte Produktionsweise — Demokratie — Diskussionsfreiheit — Sophisten — Entdeckung der verwirrenden Widersprüche — Wunsch nach logischer Beweisführung*, und schliesslich : *die Logik selbst.* Ist man einmal auf dieser Bahn bei der Logik angelangt, so ist es schon leicht zu behaupten, dass dieselbe Logik auch in der mathematischen Beweisführung zur Geltung käme. — Aber der auffallende chronologische Fehler dieser

[39] Sokrates betont z. B. im Platonischen Dialog über den «Staat», dass ein sehr kurzes Stück Geometrie und ein sehr kleiner Bruchteil Arithmetik vollständig dazu genügte, um die Bedürfnisse des praktischen Lebens zu befriedigen (VII 526 D) ; der wesentlichere Teil dieser Disziplinen befriedigt nämlich nicht praktische, sondern Bedürfnisse anderer Art.

Konstruktion besteht darin, dass man gewöhnlich die Anfänge der deduktiven Mathematik auf das 6. Jahrhundert setzt; Pythagoras, auf den sich auch die Verfasser der behandelten Schrift berufen, lebte ja in diesem Jahrhundert. Es muss also — im Sinne der obigen Konstruktion — zur Zeit des Pythagoras irgendeine Lehre über die Logik schon vorhanden gewesen sein. Es fällt aber die Tätigkeit der Sophisten, die nach dem vorigen Schema die Entfaltung der Logik überhaupt hätte vorbereiten müssen, erst auf das 5. Jahrhundert. — Die dargestellte Konstruktion wäre also nur in dem Falle brauchbar, wenn es erst gelingen sollte nachzuweisen, dass die Logik als Wissenschaft ihren Ursprung in der Tat in den Diskussionen des täglichen Lebens hat,[40] und wenn es schon bewiesen wäre, dass es eine Logik wirklich auch schon *vor* jener Zeit gab, in welcher sich die ersten Anfänge der deduktiven Wissenschaften melden.

Aber gesetzt, dass der chronologische Fehler sich irgendwie korrigieren liesse, auch so könnte noch die Konstruktion kaum bestehen. Denn fassen wir nur das vorige Zitat genauer ins Auge. — Die Verfasser sprechen von der «Notwendigkeit des strengen mathematischen Beweises», aber sie versäumen, die historische Frage zu klären: worin eigentlich im griechischen Altertum diese «Notwendigkeit» bestanden haben mag? Statt diese Frage zu stellen, erscheint bei ihnen ihre eigene völlig moderne Auffassung von der «Notwendigkeit des mathematischen Beweises» in einer solchen Form, als ob sie in der Tat wirklich eine «Erkenntnis der alten Griechen» gewesen wäre. Es ist nämlich interessant, wie sie die angeblich «*griechische* Entdeckung dieser Notwendigkeit» illustrieren. — Nachdem sie jene alte Approximationsformel der ägyptischen Geometrie erwähnt hatten, dass man die Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks bekommt, wenn man die Basis mit der Hälfte der Seite (!) multipliziert,[41] setzen sie fort:

[40] Der Gedanke, dass die Logik aus den Diskussionen des täglichen Lebens hervorgegangen sei, taucht in der Form einer Vermutung bei O. GIGON auf; er schreibt nämlich im Parmenides-Kapitel seines Buches «Der Ursprung der griechischen Philosophie», Basel 1945, S. 251: «Das Verfahren des Parmenides, durch Elimination der Möglichkeiten zum Wahren zu gelangen, setzt voraus, dass Parmenides eine bestimmte formale Methode des Beweisens schon kennt, ehe er sich daran macht, nun das Sein zu beweisen. Die Frage stellt sich dann nach dem Ursprung dieser Methode. Er wird schwerlich in der ionischen Kosmologie oder in der pythagoreischen Verkündigung zu suchen sein. Mit allen Vorbehalten sei bemerkt, dass *eine solche Technik des Beweisens am leichtesten in der Welt der politischen und juristischen Argumentation, in der sogenannten Gerichtsrhetorik sich bilden konnte.* Die konkrete Frage des Advokaten nach einem ungeklärten Tatbestand oder einer ungewissen Täterschaft konnte ohne Zweifel am ehesten zu solchen Beweismethoden führen, wie sie hier Parmenides an einem ganz anderen Objekt übt. Was wir wissen, ist, dass Sizilien zur Zeit des Parmenides die Gerichtsrhetorik geschaffen haben soll. Was uns fehlt, sind die äusseren Beweisstücke, die von der sizilischen Rhetorik zum «Wege der Forschung» des Parmenides hinüberführen. So muss dies lediglich eine nur zögernd angedeutete Hypothese bleiben.»

[41] Zu dieser Approximationsformel vgl. man übrigens O. NEUGEBAUER: Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften Bd. 1. Berlin 1934 S. 123: «Eine Anzahl von Feldern (scil.: in Aegypten) sind dreieckig. Die Angabe der Grösse erfolgt dann etwa nach dem folgenden Schema: Die westliche Seite ist a, die

«Diese Approximation genügte den alten Aegyptern, weil in diesem Lande der Nil meistens solche Gebiete überschwemmte, die in *langgezogene* gleichschenklige Dreiecke aufgeteilt waren, und die Flächen solcher Dreiecke in der Tat auf Grund der gegebenen Formel — für die Genauigkeit der damaligen Messungen! — richtig, d. h. der Erfahrung entsprechend berechnet werden konnten. *Die Griechen wollten jedoch dieselbe Formel für die Lösung architektonischer Aufgaben anwenden, wo sie schon versagte.*»[42]

Wir haben den letzten Satz des Zitates hervorgehoben, weil er in der Tat eine überraschend geistreiche Vermutung ist, die sich aber, leider, kaum mit irgendwelchen Quellenangaben belegen lässt. Haben denn die Griechen wirklich jemals versucht die erwähnte Approximationsformel der Aegypter in der Architektur zu benutzen? Und warum sind eigentlich die Aegypter selber nicht auf die glorreiche Idee gekommen, die oft benutzte Formel für die Lösung ihrer *eigenen* architektonischen Aufgaben zu verwenden? Auch sie kannten ja nicht nur die Feldmessung, sondern auch die Architektur! — Aber man würde das alles noch irgendwie in Kauf nehmen können, wenn die Verfasser ihre kühne Kombination nicht weiterführten:

«Nachdem die eben erwähnte Approximationsformel versagte, und ähnlicherweise auch andere bloss empirisch aufgestellte Sätze, mussten die griechischen Mathematiker zu der Überzeugung gelangen, dass die abstrakte Verallgemeinerung der blossen Erfahrung in sich noch keine hinreichende Sicherheit und Genauigkeit zu gewähren vermag; infolgedessen entdeckten sie die Notwendigkeit des mathematischen Beweises, und damit begründeten sie die mathematische Wissenschaft im heutigen Sinne des Wortes.»[43]

Kein Zweifel, diese Denkweise projiziert die völlig moderne Auffassung von der Notwendigkeit des mathematischen Beweises in das griechische Altertum zurück. Man kann nämlich in der Wirklichkeit gar keinen Beweis dafür angeben, dass die Begründung der deduktiven Wissenschaft in der Tat mit dem Zweck erfolgt wäre, um im Interesse der täglichen Praxis eine grössere Sicherheit und Genauigkeit zu gewinnen, als welche die blosse Erfahrung zu bieten vermag. Im Gegenteil, wie man später sehen wird: die Griechen wandten sich von der Praxis und damit zum Teil auch von der Erfahrung selbst ab, als sie die theoretische Wissenschaft begründeten.

östliche b, die südliche c, die nördliche '*nichts*'. Die Fläche ist dann wieder aus $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}$ zu erhalten. Hier hat man es also immer mit Näherungsrechnungen zu tun, die sich auf ganz bestimmte Felder beziehen und mit einer für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit die Flächen angeben.»

[42] Gy. Alexits und I. Fenyő: o. c. S. 37—38.

[43] Daselbst S. 39. — Ich war bestrebt die ungarischen Zitate möglichst genau zu übersetzen; es muss jedoch bemerkt werden, dass die Übersetzung der letzten Stelle nur *dem Inhalt nach* treu ist. Um eine für unsere gegenwärtigen Zwecke völlig nebensächliche Polemik zu vermeiden, habe ich offensichtliche Fehler und Missverständnisse des Textes in der Übersetzung beseitigt.

Vorläufig wollen wir uns jedoch bloss mit der Feststellung begnügen, dass die griechischen Mathematiker — besonders im ersten Jahrhundert der deduktiven Wissenschaft — bestrebt waren, auch sehr viele solche Sätze zu beweisen, deren Wahrheit sie aus der Praxis schon längst gekannt hatten. Diese Sätze sind dadurch, dass man sie bewiesen hatte, für die Praxis um gar nichts wertvoller geworden, als früher die blossen empirischen Kenntnisse waren. Man zog aus dem deduktiven Beweis im Altertum gar keinen unmittelbaren praktischen Nutzen. Ja, es scheint sogar, dass die antiken Mathematiker die praktische Brauchbarkeit des deduktiven Beweises nicht einmal geahnt hatten! Nach einer verbreiteten Anekdote liess z. B. Euklid — als ihn einmal ein Schüler fragte, was für einen Nutzen er aus dem Erlernen der mathematischen Ableitungen ziehen könnte — seinen Sklaven kommen: er sollte dem Fragenden einen Obolus schenken, da der betreffende scheinbar unbedingt einen Nutzen davon ziehen müsste, was er erlernt.[44] — Diese alte Anekdote wäre kaum möglich gewesen, wenn die griechischen Mathematiker überhaupt eine Ahnung davon gehabt hätten, wie die exakten mathematischen Beweise in der Praxis unmittelbar brauchbar sind. — Es ist also irreführend zu behaupten, dass die Griechen die Notwendigkeit des strengen mathematischen Beweises entdeckt hätten. Denn es stimmt zwar, dass die griechischen Mathematiker ausserordentlich strenge Beweise erstrebten, aber auf die Frage, wozu eigentlich diese Beweise nötig sind, hätten sie selbst überhaupt nicht antworten können.

Eine andere Schwäche der durch Alexits und Fenyő versuchten Erklärung besteht darin, dass sie den Ursprung des mathematischen Beweisverfahrens aus den Formen des alltäglichen Beweisverfahrens ableiten möchte. Im Sinne ihrer Auffassung wären die Menschen zuerst im Laufe der Diskussionen des alltäglichen Lebens auf die verwirrenden Widersprüche der Meinungen aufmerksam geworden, infolgedessen wäre der Wunsch nach der logischen Beweisführung erwacht, und später hätten auch die Mathematiker diesen Wunsch auf ihrem eigenen Gebiete zu erfüllen versucht. Das mathematische Beweisverfahren wäre also nur eine weiterentwickelte Form des alltäglichen Beweises. — Aber lässt sich in der Tat der Ursprung des exakten mathematischen Beweises aus solchen Formen des Beweisens ableiten, die *in ihrer Qualität* vom mathematischen Beweis grundverschieden sind? Denn die Methoden des Beweisens im alltäglichen Leben besitzen nur eine sehr entfernte Ähnlichkeit mit dem mathematischen Beweis. Der nicht-mathematische Beweis kann meistens nur bestrebt sein, die *Wahrscheinlichkeit* irgendeiner Behauptung nahezulegen; als Kriterium der Wahrheit gelten aber in diesen Fällen immer: die *Praxis*, die *Erfahrung* bezw. die *Tatsachen* selbst. Dagegen mussten die griechischen Mathematiker des Altertums sehr oft

[44] Vgl. G. SARTON: Ancient Science and Modern Civilization, London 1954 p. 20.

eben solche *Tatsachen* in allgemeingültiger Form beweisen, die man aus der Praxis schon seit Jahrhunderten sehr gut gekannt hatte, und deren Wahrheit man nie bezweifelte. Denn die Mathematik ist ja eben dadurch zu einer Wissenschaft geworden, dass sie sich — abgesehen von den Prinzipien — mit der bloss empirischen Erfahrung der Tatsachen nicht begnügte, sondern erkannte, dass meistens die alleroffenbarsten Tatsachen selbst des Beweises bedürftig sind. — Suchen wir also den Ursprung des mathematischen Beweises in solchen Formen des alltäglichen Beweisverfahrens, die in ihren Ansprüchen viel bescheidener als der mathematische Beweis sind, so müssten wir noch erklären können : wieso und warum eigentlich bei den Griechen der mathematische Beweis so ausserordentlich streng und anspruchsvoll geworden ist, — weit über die Möglichkeiten jener Beweisformen hinaus, die im alltäglichen Leben jemals üblich waren? — Die Theorie von Alexits und Fenyő gibt auf diese besonders wichtige Frage gar keine Antwort.

Man findet den dritten Erklärungsversuch über das Entstehen der griechischen exakten Wissenschaft, den wir hier noch erwähnen müssen, bei B. L. v. d. Waerden.[45] Er verweist nämlich darauf hin, dass die Griechen viele mathematische Kenntnisse empirischen Ursprungs von den Aegyptern und Babyloniern fertig übernahmen. aber die verschiedenen praktischen Regeln altorientalischer Herkunft nicht immer untereinander im Einklang waren. Die Babylonier berechneten z. B. den Kreisinhalt nach der Formel $3r^2$, dagegen die Aegypter nach der anderen : $(\frac{8}{9}.2r)^2$. Nun mussten die Griechen, als sie die abweichenden, bloss empirischen und nur für bestimmte praktische Zwecke brauchbaren Regeln kennenlernten, für sich entscheiden, welche von diesen die bessere sei, und wie könnte man den Kreisinhalt noch genauer berechnen. So wären sie langsam auf den Gedanken der exakten Ableitung gekommen.

Diese Theorie ist zweifellos bescheidener als die beiden früheren. Sie sucht den Ursprung der exakten Mathematik nicht irgendwo in der Nähe der Logik, oder auf einem Wege, der der Entfaltung der Logik parallel läuft ; auch das mathematische Beweisverfahren will sie nicht auf solche Formen des Beweisens zurückführen, die im alltäglichen Leben üblich waren, sie möchte statt dessen das Streben nach Exaktheit einfach aus solchen Überlegungen ableiten, die rein mathematischer Art sind. — Es ist in der Tat sehr wohl möglich, dass zu der Entfaltung der exakten Wissenschaft — beson-

[45] B. L. v. d. Waerden : Science awakening, Groningen 1954. S. 89 ; vgl. damit O. Beckers Kritik über die holländische Ausgabe desselben Buches (1950) in Gnomon 23 (1951) 297 ff.: «Interessanter als alle Einzelheiten ist die Gesamtauffassung des Verf. von der frühgriechischen Mathematik. Die entscheidende Wendung sieht er mit Recht in dem Auftreten von Theoremen mit Beweisen. Das Motiv liegt nach ihm in der Übernahme einer nicht immer einheitlichen orientalischen Tradition (wie z. B. die verschiedene Bestimmung des Kreisinhalts durch Aegypter und Babylonier) und der sich daraus ergebenden Notwendigkeit einer kritischen Entscheidung zwischen ihnen.»

ders am Anfang, im Falle des Thales — auch solche Reflexionen beitrugen. Es ist jedoch ein Mangel dieser an sich wohl treffenden Vermutung, dass sie jene auffallende und bemerkenswerte Erscheinung völlig ausser Acht lässt, welche sonst in einem anderen Zusammenhang auch v. d. Waerden selbst mit Recht betonte, dass nämlich die griechischen Mathematiker schon sehr früh bestrebt waren, um möglichst alles, selbst die alleroffenbarsten Tatsachen peinlich exakt zu beweisen. Stellt man die zur Zeit bekannten ältesten mathematischen Beweise der Griechen zusammen, so bekommt man gar nicht den Eindruck, als ob die griechischen Mathematiker die exakte Wissenschaft mit dem Zweck zustande gebracht hätten, um solche früher «strittige Fragen» entscheiden zu können, wie z. B. die Berechnung des Kreisinhalts. Im Gegenteil, die ältesten mathematischen Ableitungen beweisen sozusagen lauter unbestreitbare, beinahe triviale Tatsachen, die aus der empirischen Praxis auch früher schon längst und ebenso tadellos bekannt sein mussten. — Nun was mag aber die ältesten Mathematiker veranlasst haben, um möglichst alles, auch offenbare und wohlbekannte Tatsachen beweisen zu wollen? — B. L. v. d. Waerdens eben erwähnte Theorie antwortet auf diese Frage nicht.

Man sieht also: die hier zusammengestellten drei verschiedenen Erklärungsversuche liefern zwar sehr gute und brauchbare Gesichtspunkte für die weitere Forschung, aber sie lösen das Problem nicht. Die Frage bleibt auch weiterhin offen: wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?

Nachdem die Wissenschaftsgeschichte das Entstehen der griechischen exakten Mathematik bisher nicht beruhigend erklären konnte, wollen wir im nächsten Kapitel mindestens skizzenhaft zusammenfassen, was man über diese Frage auf Grund unserer heutigen Kenntnisse behaupten kann. Zuerst überblicken wir die diesbezüglichen wichtigsten Angaben der antiken Überlieferung *(Punkt A)*, dann ergänzen wir diese Angaben mit einigen Feststellungen der gegenwärtigen Forschung *(Punkt B)*.

III

A) Die dreizehn Bücher der Euklidischen Elemente, die rund um 300 v. u. Z. entstanden, stellen die älteste klassisch gewordene Zusammenfassung der antiken Mathematik dar. Euklids Darstellung der Mathematik ist — trotz jener teilweise unbedingt berechtigten Einwände, die seitdem im Laufe der Jahrhunderte gegen sie vielfach erhoben wurden — bis auf den heutigen Tag sozusagen mustergültig geblieben.[46] Man kann also mit

[46] Man vgl. dazu die Worte von G. PÓLYA: o. c. in den Kapiteln «Durchführen eines Planes» (S. 96 ff.) und «Warum Beweise?» (S. 225 ff.).

Recht behaupten, dass der exakte mathematische Beweis der Griechen zur Zeit Euklids seine höchste Entwicklungsstufe eigentlich schon erreicht hatte. Die Ausbildung und Entfaltung der deduktiven Wissenschaft muss also auf die Zeit *vor* Euklid fallen. Was weiss die antike Überlieferung über dieses Zeitalter vor Euklid?

Der Verfasser der ältesten griechischen Mathematik-Geschichte war Eudemos von Rhodos, ein Schüler von Aristoteles nicht lange vor Euklid, im 4. Jahrhundert. Man findet einen kurzen Auszug seines verlorenen Werkes im Kommentar von Proklos (5. Jahrhundert n. Zw.) zum ersten Buch der Euklidischen Elemente. Das ist das berühmte «Mathematiker-Verzeichnis» von Proklos. Die wichtigsten Feststellungen dieses Verzeichnisses, die uns interessieren, sind die folgenden.

Der älteste Vertreter der griechischen Mathematik, bzw. der Geometrie, Thales im 6. Jahrhundert, soll sein Wissen in Aegypten gesammelt und von dorther diese Disziplin zu den Griechen gebracht haben. Nach dem Text soll er manches selber erfunden, und in manchem seinen Nachfolgern den Weg zu den Prinzipien gezeigt haben, dadurch, dass er einige Fragen allgemeiner, einige aber handgreiflicher (in sinnlich wahrnehmbarerer Form) auffasste *(τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον)*.[47]

Die nächste, für uns wichtige Feststellung des Verzeichnisses betrifft jenen Pythagoras, der ebenso im 6. Jahrhundert lebte. Es wird behauptet, dass Pythagoras die Beschäftigung mit der Geometrie — nach dem Wortlaut des Textes: diese «Philosophie» — verändert hätte, indem er ihr eine solche Form gab, die es ermöglichte dass sie von nun an zu einem Bestandteil der Erziehung des freien Menschen werden konnte. — Mit solchen Ausdrücken wird in unserer Quelle die Behauptung umschrieben, dass die Geometrie, bezw. die Mathematik des Pythagoras nicht mehr eine praktische, sondern schon eine theoretische Wissenschaft war. Nach antiker Auffassung steht nämlich die praktische Tätigkeit unter der Würde des freien Menschen; der Freie darf sich nur mit untätiger Betrachtung, d. h. griechisch: mit *Theorie* beschäftigen. — Man bekommt eine Ahnung davon, wie wesentlich diese Behauptung des Mathematiker-Verzeichnisses ist, erst dann, wenn man daran denkt, dass der mathematische «Satz» griechisch in der Tat *Theorema* heisst. Auch diese Benennung zeigt, dass es sich in der griechischen Mathematik nicht um die Praxis, sondern um die Theorie um ihrer selbst willen handelte. — Pythagoras soll nach dem Wortlaut des Proklos die entscheidende Wandlung dadurch in die Mathematik gebracht haben, dass er die Prinzipien der Geometrie untersuchte, und ihre Sätze vom konkreten Stoff unabhängig *(ἀύλως)* auf rein intellektuellem Wege *(νοερῶς)* erforschte.

[47] Proclus (ed. G. Friedlein) 65. — Den ganzen Text des Mathematiker-Verzeichnisses übersetzt und zum Teil kommentiert B. L. v. d. Waerden: Science awakening. S. 90 ff.

— Er, Pythagoras soll auch die Theorie der Irrationalen (oder eher: die Theorie der Proportionen?) gefunden[48] und die kosmischen (= regelmässigen) Körper konstruiert haben.

Dann wird im Verzeichnis von Proklos unter anderem noch erzählt, dass schon lange vor Euklid auch andere Männer solche systematische Werke der Mathematik, also «Elemente» geschrieben hätten, wie später Euklid. Der erste Systematiker der Mathematik war Hippokrates von Chios im 5. Jahrhundert, dann Leon in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts, und Theudios von Magnesia in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts.

Nun wollen wir jetzt sehen, inwiefern die antike Überlieferung in den genannten Punkten durch die heutige Mathematik-Geschichte ergänzt oder modifiziert werden kann.

B) Was Thales betrifft, scheint die moderne historische Forschung die Behauptungen des alten Mathematiker-Verzeichnisses nur zu bestätigen. Man darf vielleicht aus dem Bericht über Thales schliessen, dass sich auch die griechische Überlieferung des orientalischen Ursprungs der empirischen mathematischen Kenntnisse bewusst war; sie spricht ja deswegen von der Reise des Thales in Aegypten, und dass er von dorther diese Disziplin zu den Griechen gebracht hätte.[49] — Es geht zwar aus unserem Text nicht eindeutig hervor, inwiefern eigentlich schon die Geometrie des Thales als exakte Wissenschaft anzusehen sei, aber selbst über diesen Punkt lässt uns der eben zusammengefasste kurze Bericht vielleicht nicht völlig im Stiche. Es heisst nämlich, dass Thales seinen Nachfolgern den Weg zu den Prinzipien gezeigt habe; als wollte der antike Verfasser des Berichtes mit diesen Worten eben den Gedanken zum Ausdruck bringen, dass Thales selber zwar die Prinzipien der Mathematik noch nicht gefunden hätte — seine Geometrie wäre

[48] Nach der Lectio von G. FRIEDLEIN handelt es sich hier um die Theorie der *Irrationalen;* anders gelesen sollte nur von der Theorie der *Proportionen* die Rede sein.

[49] Es ist interessant, dass die antike Überlieferung, wenn sie über die altorientalische Herkunft der rein praktischen, empirischen mathematischen Kenntnisse berichtet, immer nur von Aegypten und nie von Babylon redet, obwohl die Griechen offenbar manches auch von den alten Babyloniern gelernt haben müssen. Vgl. O. BECKER (Grundlagen der Math. S. 22): «Die Griechen übernahmen weithin altorientalisches, besonders wohl *babylonisches* Material, obwohl die griechische Tradition immer nur *von Aegypten* als dem Ursprungslande der Geometrie spricht.» — Was mag wohl der Grund dieser einseitigen, sozusagen schief gewordenen Tradition sein? — Wir glauben, dass man diese Frage mindestens mit einiger Wahrscheinlichkeit beantworten kann. Auch die griechische Tradition scheint nämlich davon zu wissen, wie die Algebra auf dem Ausstrahlungsgebiet der babylonischen Kultur hochentwickelt war. Proklos sagt z. B., dass bei den Phöniziern die Kenntnis der Zahlen weit entwickelt war, eben infolge des Handels und der vielen praktischen Beschäftigung mit der Rechentechnik (FRIEDLEIN p. 65). — In der Zeit jedoch, als Eudemos im 4. Jahrhundert die erste Mathematik-Geschichte verfasste, war die griechische Mathematik schon völlig *geometrisiert.* Deswegen konnten die Griechen ihre alten Lehrmeister auf dem Gebiete der Geometrie mit einigem Recht allerdings eher in den Aegyptern als in den Babyloniern vermuten. Denn wir haben ja schon gesehen, dass die Aegypter in der Tat den Kreisinhalt z. B. genauer berechnen konnten, als die Babylonier. Man konnte also in der Zeit der geometrisierten griechischen Mathematik gewissermassen schon eine nähere Verwandtschaft mit der ägyptischen Geometrie als mit der babylonischen Algebra fühlen.

also noch keine im späteren Sinne des Wortes «definitorisch-axiomatisch begründete Wissenschaft» gewesen —, aber er hätte dennoch die erste Anleitung zu einer solchen Grundlegung erteilt. Und das alles soll dadurch geschehen sein, dass Thales einige Fragen *allgemeiner*, einige jedoch handgreiflicher auffasste. — Man hat beinahe den Eindruck, als liesse sich selbst noch diese Behauptung der Überlieferung mit bekannten historischen Tatsachen belegen. Es ist ja bekannt, dass den Begriff des geometrischen «Winkels» in der Tat Thales, oder mindestens das Zeitalter des Thales einführte; und das war gewiss eine bedeutende wissenschaftliche *Verallgemeinerung*.[50] Das Streben nach Allgemeingültigkeit muss also schon in der Wissenschaft des Thales zur Geltung gekommen sein. — Dabei betont unser Text auch die andere Seite: Thales soll andere Fragen *in handgreiflicher Form* behandelt haben. — Es ist kein Zufall, dass dieser Zug der thaletischen Wissenschaft in der Überlieferung betont wird. Kaum um einige Zeilen weiter lesen wir in demselben Bericht über Pythagoras gerade das Gegenteil dessen; Pythagoras soll die Sätze der Mathematik schon unabhängig vom konkreten Stoff *(ἀΰλως)*, auf rein intellektuellem Wege *(νοερῶς)* erforscht haben. Diese letztere Behauptung kontrastiert also die Wissenschaft des Pythagoras mit derjenigen des Thales. — Was soll aber heissen, dass Thales einige Fragen der Geometrie «in handgreiflicher Form» behandelte? — Auch diese Frage lässt sich beantworten, wenn wir zunächst die andere genauer prüfen: ob Thales seine Sätze «beweisen» konnte, und in welcher Form? — Die antike Überlieferung berichtet in der Tat von den «Beweisen» des Thales,[51] aber sie gibt, leider, nicht genau an, worin eigentlich der Beweis bestand. Die moderne Interpretation kann zu der Klärung dieses Problems in zwei Punkten beitragen; erstens kann sie nämlich daran erinnern, dass das griechische Wort für *«beweisen»*, der Terminus der mathematischen Fachsprache, *ἀποδεικνύναι* nach seiner ursprünglichen Bedeutung eigentlich nur *«zeigen»* hiess; zweitens kann aber die moderne Wissenschaftsgeschichte auch an eine Beobachtung erinnern, die ermöglicht das Beweisverfahren des Thales mit grosser Wahrscheinlichkeit zu rekonstruieren.[52] — Euklid stellt nämlich am Anfang seines ersten Buches das sog. Axiom der Kongruenz, das *ἐφαρμόζειν*-Axiom auf: «Dinge, die sich decken (= die aufeinander passen), sind gleich».[53] Das Wort *ἐφαρ*-

[50] Vgl. O. Becker: Gnomon. 23 (1951) S. 298: «Im übrigen ist gerade die Einführung des Winkelbegriffs (statt des *ṡqt)* eine wesentliche neue Errungenschaft der frühgriechischen Geometer (Scheitelwinkel, Basiswinkel, Winkel im Halbkreis), die von weittragenden Folgen war (Winkelsumme im Dreieck, woraus vielerlei abgeleitet werden konnte).»

[51] Sieh Proclus (ed. Friedlein) 157.

[52] Ich fasse im folgenden die Beobachtungen von K. v. Fritz (s. oben die Anm. 21) — teilweise auch über seine Feststellungen hinausgehend — zusammen.

[53] Eucl. I *Κοιναὶ ἔννοιαι* 7: *τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ'ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.* «quae inter se congruunt, aequalia sunt» (I. L. Heibergs Übersetzung). «Was sich deckt, ist gleich» (A. Becker). «Les choses qui coincident l'une avec l'autre sont égales entre elles» (P. Tannery).

μόζειν («auf einander passen») kommt jedoch später bei Euklid nirgends in einem Lehrsatz, nur in diesem Axiom und in den Beweisen einiger Lehrsätze vor. Es ist also auffallend, dass ein Axiom zwar so allgemein formuliert und dann doch eigentlich nur für zwei Sätze gebraucht werde, obwohl sich — wie man bemerkte — manche Unstimmigkeiten in den Gleichheitsdefinitionen bei Euklid leicht hätten vermeiden lassen, wenn von der Deckungsmethode ein etwas reichlicher Gebrauch gemacht worden wäre.[54] Euklid ist also offensichtlich bestrebt, das Anwenden des genannten Axioms möglichst zu vermeiden. Wir wissen jedoch aus dem Text von Proklos, dass man früher die empirische Methode des Aufeinanderpassens, die *ἐφαρμόζειν*-Methode auch in solchen Beweisen benutzte, die bei Euklid gar nicht mehr vorkommen. «Diese Methode muss also einmal in viel weiterem Umfang angewendet worden sein, als dies bei Euklid der Fall ist. Sie scheint auf den ersten Anfang der griechischen Mathematik zurückzugehen, und es ist dann nicht leicht, es als einen reinen Zufall zu betrachten, *dass von den fünf Sätzen, die dem Thales in der antiken Überlieferung zugeschrieben werden, vier sich direkt und der fünfte indirekt mit der Deckungsmethode beweisen lassen.*»[55] Geht man noch weiter, so findet man, dass bei Proklos in der Tat ein Beweis mit der empirischen Deckungsmethode auch für einen solchen Satz genannt wird, von dem es früher hiess, dass er schon durch Thales auf irgendeine Weise «bewiesen» worden sei.[56] Man kann also auf Grund dieser Beobachtungen annehmen, dass das Beweisverfahren des Thales wohl eben in der Anwendung jener empirischen Deckungsmethode bestand, welche man früher zwar reichlich verwandte, später jedoch möglichst auszuschalten versuchte.[57] Thales hat also seine Sätze wohl dadurch bewiesen, dass er die von ihm behandelten geometrischen Figuren «auf einander passte», und die Wahrheit seiner Behauptungen auf diese Weise *veranschaulichte*, «zeigte». Im ursprünglichen Sinne des Wortes *ἀποδεικνύναι* war es wirklich ein «Beweis» — allerdings noch von einer völlig anschaulichen, empirischen Art. — Es ist wohl möglich, die Worte von Proklos, dass nämlich Thales manches in der Geometrie noch «in handgreiflicher Form» behandelte, in diesem Sinne zu verstehen,

[54] K. v. Fritz : o. c. S. 77.

[55] K. v. Fritz : ebd.

[56] Proclus (ed. Friedlein) p. 157. – Es handelt sich hier um den «Satz», der besagt, dass «der Durchmesser den Kreis halbiert». Euklid hat diesen «Satz» in die 17. Definition seines ersten Buches aufgenommen; dadurch wurde jedoch seine Definition überbestimmt, vgl. K. v. Fritz : o. c.

[57] K. v. Fritz : o. c. S. 94 : «Dass im Anfang die *anschauliche* Evidenz eine nicht unbeträchtliche Rolle gespielt hat, zeigt die in einem frühen Stadium reichliche Verwendung der Deckungsmethode, während umgekehrt die fortschreitende, wenn auch bis auf Euklid nicht vollständige Ausschaltung dieser Methode und das sichtliche Bestreben Euklids, den letzten Überbleibseln der Methode, die er nicht vermeiden kann, ein axiomatisches Fundament zu geben und sie auch sonst ihres empirischen Charakters so sehr als möglich zu entkleiden, Reidemeister Recht geben : das Charakteristische der griechischen Mathematik ist, dass sich in ihr die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht.»

d. h. also, dass für Thales die Evidenz noch die empirische, anschauliche Evidenz war. Zu seiner Zeit erfolgte also noch nicht jene grundsätzliche Wandlung in der griechischen Wissenschaft, die im Mathematiker-Verzeichnis von Proklos der Tätigkeit des Pythagoras zugeschrieben wird.

Was Pythagoras anbelangt, ist die heutige Wissenschaft den Behauptungen des Mathematiker-Verzeichnisses gegenüber sehr skeptisch. Unsere ältesten Quellen über Pythagoras scheinen nämlich noch gar nichts davon zu wissen, dass er ein grosser Mathematiker und Philosoph gewesen wäre.[58] Versucht man die ersten Anfänge der späteren Pythagoras-Legende wiederherzustellen, so stösst man schliesslich auf eine Bewegung, eine Art «pythagoreischer Romantik», die gegen Ende des 5. und am Anfang des 4. Jahrhunderts in den aristokratischen und zugleich spekulativ und religiös ergriffenen Kreisen Unteritaliens und Siziliens sich ausgebreitet hatte.[59] Aller Wahrscheinlichkeit nach ist der «Philosoph und Mathematiker Pythagoras» erst die Schöpfung dieser Zeit und dieser Kreise. Es kann auch kein Zufall sein, dass Platon und Aristoteles meistens nur die Pythagoreer erwähnen, aber so gut wie niemals von Pythagoras selbst reden. Die moderne Forschung hat auch über jene mathematischen Entdeckungen, die in der späteren Überlieferung dem Pythagoras zugeschrieben werden, feststellen können, dass diese zum Teil aus viel älteren Zeiten stammen, zum Teil aber erst späteren Ursprungs als das 6. Jahrhundert v. u. Z. sind.[60] — Nach all dem wird es wohl niemanden mehr wundernehmen, dass man den Bericht des Mathematiker-Verzeichnisses über Pythagoras sehr skeptisch auffasste; man erklärte auch ihn für einen Teil der Pythagoras-Legende. — Es empfiehlt sich jedoch in dieser Beziehung einige Vorsicht. Denn man darf doch nicht vergessen, dass auch sehr zuverlässige antike Quellen hie und da über die arithmetischen Studien der Pythagoreer des 5. Jahrhunderts berichten. Aristoteles behauptet sogar, dass es die Pythagoreer waren, die sich als erste mit *μαθήματα* befassten.[61] Ebenso war auch nach Platon[62] die grösste und erste von den Wissenschaften der Pythagoreer die Lehre von den Zahlen. Und die moderne Forschung hat in der Tat vermocht — wie man es bald sehen wird —, mindestens einen Teil der pythagoreischen Wissenschaft des 5. Jahrhunderts wiederherzustellen. Vergleicht man aber die zurückeroberte pythagoreische Mathe-

[58] K. Reinhardt: Parmenides und die Geschichte der griech. Philosophie, Bonn 1916 S. 233 f. — In demselben Sinne spricht über Pythagoras auch E. Frank: Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle/Saale 1923. S. 67 und dazu besonders die Anm. 166 auf S. 356.

[59] K. Reinhardt: o. c. S. 232.

[60] Vgl. K. Reidemeister: Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949. S. 20 und 51—52; E. Sachs: Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917.

[61] Aristoteles, Met. 5. 985 b 23—24. — Die Pythagoreer verstanden unter «Mathema» ein geordnetes System mit Beweisen; zur Deutung des Wortes vgl. K. Reidemeister: o. c. S 52: *μάθημα* «eine Zusammenstellung mathematischer Sätze und *Beweise*».

[62] Platon, Epinomis 990 C.

matik damit, was im Verzeichnis von Proklos über Pythagoras selbst berichtet wird, so muss man erstaunt feststellen, dass die Behauptungen der antiken Quelle über Pythagoras, wenn auch nicht auf diese halb-legendenhafte Gestalt, so doch mindestens auf die Wissenschaft der Pythagoreer zuzutreffen scheinen. Diese Mathematik ist in der Tat schon auf Prinzipien gebaut, und sie erforscht ihre Sätze wirklich «vom konkreten Stoff unabhängig und auf rein intellektuellem Wege». Deswegen kam auch K. Reidemeister zu dem Schlusse, dass die Begründer der exakten Wissenschaft eigentlich die Pythagoreer des 5. Jahrhunderts gewesen seien.[63] Man hat also beinahe den Eindruck, als hätte das Verzeichnis von Proklos diese Feststellung nur zurückprojiziert auf jenen legendenhaften Pythagoras, den die Sekte der Pythagoreer zu ihrem Namengeber wählte. — Damit ist natürlich das Entstehen der exakten Wissenschaft noch gar nicht erklärt, aber man weiss mindestens von einer merkwürdigen Übereinstimmung zwischen der antiken Überlieferung und der modernen Forschung: die Tradition schreibt die Begründung der exakten Wissenschaft dem Pythagoras zu, während die moderne Rekonstruktion die erste Vertreterin der deduktiven Mathematik in der Arithmetik der Pythagoreer erblickt.

Aus dem kurzen Bericht des Proklos über die ältesten Systematiker der deduktiven Wissenschaft interessiert uns am meisten der Name des Hippokrates. Der grösste und berühmteste Geometriker des 5. Jahrhunderts, Hippokrates, von der Insel Chios gebürtig, hat sich nach der Tradition längere Zeit (etwa von 450—430) in Athen aufgehalten. Er soll seinen Lebensunterhalt hier durch «Unterricht in Geometrie» verdient haben.[64] Nach Proklos war Hippokrates der erste, der «Elemente» zusammengestellt hatte. Die heutige Forschung bezweifelt die Glaubwürdigkeit dieses Berichts überhaupt nicht. Denn wir können uns ja ein sehr zuverlässiges Bild vom mathematischen Wissen des Hippokrates verschaffen. Es ist nämlich der wörtliche Bericht des Eudemos von Rhodos über die sog. «Quadratur der Möndchen» (*μηνίσκοι*, lunulae) des Hippokrates glücklicherweise erhalten geblieben,[65] und auf Grund dieser kostbaren «Inkunabel» der voreuklidischen Geometrie erscheint uns die Wissenschaft des Hippokrates in einem solchen Licht, dass man es für möglich hält: Hippokrates hat allerdings schon versuchen können die mathematischen Kenntnisse seiner Zeit in eine streng aufgebaute logische Ordnung zusammenzufassen. — Dabei wird die Angabe des Proklos über diese erste systematische Darstellung der griechischen

[63] K. REIDEMEISTER: o. c. S. 52. — Wir wollen uns mit dieser Feststellung von K. REIDEMEISTER im letzten Kapitel der vorliegenden Arbeit ausführlicher beschäftigen.

[64] Zur allgemeinen Orientierung sowohl über Hippokrates, wie auch über die Frühgeschichte der griechischen Wissenschaft vgl. man das sehr unterhaltende Büchlein von G. HAUSER: Die Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid. Luzern 1955.

[65] Man findet diesen Bericht des Eudemos bei Simplikios, dem Aristoteles-Kommentator des 6. Jahrhunderts n. Zw.; vgl. dazu O. BECKER: Grundlagen der Mathematik, S. 29 ff.

Mathematik schon im 5. Jahrhundert v. u. Z. merkwürdigerweise auch von einer anderen Seite her, durch die moderne Forschung sozusagen bestätigt. Die neueste Forschung ist nämlich völlig unabhängig von diesem Bericht über die «Elemente des Hippokrates» zur Vermutung gekommen, dass es schon im 5. Jahrhundert, also in der Zeit vor 400, auch einen schriftlich fixierten Lehrgang der Zahlentheorie geben musste, welcher später ohne erhebliche Änderungen, evtl. nur verkürzt in das VII. Buch der Euklidischen Elemente übernommen wurde.[66] Die Elemente des Hippokrates und dieser vermutete «Lehrgang der Zahlentheorie» müssen aller Wahrscheinlichkeit nach mathematische Werke derselben Art gewesen sein. — Lehrreich ist für uns der Bericht des Proklos über Hippokrates darum, weil man auf Grund dessen eine sehr wichtige Vermutung aufstellen kann. Hat Hippokrates in der Mitte oder in der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts schon versuchen können, das mathematische Wissen seiner Zeit in systematischer Ordnung zusammenzufassen, so müssen die Anfänge der deduktiven Wissenschaft allerdings auf die Zeit *vor* Hippokrates fallen.

Die allzu knappen Angaben des Mathematiker-Verzeichnisses lassen sich einigermassen damit ergänzen, was die moderne historische Forschung aus der voreuklidischen Mathematik der Griechen rekonstruieren konnte. Am wichtigsten sind für uns in diesem Zusammenhang zwei Arbeiten; die eine von O. Becker aus dem Jahre 1936, und die andere von B. L. v. d. Waerden aus 1947/49.

O. Becker hat nämlich aus dem IX. Buch der Euklidischen Elemente die sog. altpythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden aussondern können.[67] Es ist ihm nachzuweisen gelungen, dass die letzten sechzehn Sätze dieses Buches bei Euklid eigentlich nur einen Anhang darstellen, den entweder der Verfasser der Elemente selbst, oder mindestens einer seiner ältesten Herausgeber noch im Altertum der Aufbewahrung am Ende der Rolle aus Pietätsgründen für würdig befand. Mit diesen sechzehn Sätzen hängt bei Euklid am Ende des X. Buches der 27. Appendix (ed. Heiberg) zusammen. Diese insgesamt 17 Sätze bilden die sozusagen vollständige Lehre vom Geraden und Ungeraden, deren Entstehungszeit durch O. Becker auf die Mitte oder auf die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts gesetzt wird. Die Datierung ist zwar nur vermutlich, aber diese Sätze stellen allerdings das älteste zur Zeit bekannte griechische «Mathema» dar.

Ähnlicherweise konnte B. L. v. d. Waerden feststellen, dass die ersten 36 Sätze des VII. Euklidischen Buches noch aus der Zeit vor 400 stammen.[68]

[66] Vgl. B. L. v. d. Waerden: Math. Ann. 120 (1947/49) 145–146.

[67] O. Becker: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente, Quellen und Studien zur Gesch. der Math., Abt. B. Bd. 3 (1936) 533–553.

[68] B. L. v. d. Waerden: Die Arithmetik der Pythagoreer I., Math. Ann. 120 (1947/49) 127–153.

Bei Boetius (5. Jahrhundert n. Zw.) ist nämlich ein mathematischer Beweis des Archytas (430—360) erhalten geblieben.[69] In seinem peinlich exakten Beweis setzt nun Archytas die Kenntnis solcher mathematischer Sätze voraus, die man im VII. und VIII. Buch bei Euklid wiederfindet. Wir müssen also annehmen, dass die durch Archytas als bekannt vorausgesetzten mathematischen Sätze zu seiner Zeit in der Tat schon in irgendeinem mathematischen Handbuch schriftlich fixiert waren. Prüft man aber die logische Aufeinanderfolge sämtlicher Sätze, die nach dem Zeugnis des erhaltenen Archytas-Beweises diesem alten Mathematiker schon als schriftlich fertig vorliegendes Gedankengut bekannt sein mussten, so bekommt man ein geschlossenes Ganzes, nämlich die ersten 36 Sätze des VII. Euklidischen Buches. Dieses kompakte Ganze ist nach v. d. Waerden ein pythagoreischer Lehrgang der Zahlentheorie aus dem 5. Jahrhundert, oder mindestens ein Teil von einem solchen Lehrgang.

Überblickt man nun diese Ergebnisse der modernen Forschung und jene alte Überlieferung, die wir eben besprochen hatten, so lassen sich die wichtigsten Angaben, die uns interessieren, in den folgenden fünf Punkten zusammenfassen :

1. Der erste griechische Mathematiker des 6. Jahrhunderts, Thales hat in seinen «Beweisen» nur noch die Evidenz der Anschaulichkeit erstrebt. Seine Wissenschaft war noch vorwiegend empirischer Art.

2. Entweder in der Mitte oder noch in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts entstand die pythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden (Eucl. IX 21—36 und X App. 27), das älteste zur Zeit bekannte deduktive Lehrstück der Griechen.

3. Um die Mitte des 5. Jahrhunderts war Hippokrates von Chios, der Verfasser der Möndchen-Quadratur, in Athen tätig ; er war der erste, der schon Elemente zusammengestellt hatte.[70]

4. Man hat noch im 5. Jahrhundert jenen Lehrgang der pythagoreischen Zahlentheorie zusammengestellt und schriftlich fixiert, der für uns bei Euklid in den Sätzen 1—36 des VII. Buches erhalten blieb.

5. Zwischen 430 und 360 v. u. Z. lebte Archytas, der noch jene alte Auffassung vertrat, nach welcher die Arithmetik der Geometrie vorzuziehen sei. In der Zeit nach ihm erfolgte die Geometrisierung der griechischen Arithmetik.

Dies sind die wichtigsten Angaben, die man bei der Beantwortung der Frage, wie die deduktive Mathematik entstand, berücksichtigen muss.

Was die Beweise, die Deduktionsart dieser alten (in den Punkten 2, 3, 4 und 5 zusammengefassten) griechischen Mathematik betrifft, kann man

[69] Boetius, De inst. mus. III 11 (ed. G. Friedlein) 1867. 285.

[70] Die mathematischen Sätze, die Hippokrates von Chios schon kennen musste, werden bei G. Hauser : o. c. 105 ff, zusammengestellt.

folgendes feststellen. Bereits sehr früh waren in der pythagoreischen Mathematik die Ansprüche an die Strenge der Beweise sehr hoch. Das sehen wir etwa an der Lehre vom Geraden und Ungeraden im IX. Buch der Elemente. Sätze, wie Eucl. IX 21—29, sind jedem Rechner selbstverständlich, werden aber ausdrücklich formuliert und bewiesen. Andere Sätze, wie IX 30—32 sind sofort auch in sich einleuchtend, werden aber dennoch peinlich exakt aus noch einfacheren Tatsachen abgeleitet. — In dem Hippokrates-Fragment über die Quadratur der Möndchen werden Ungleichungen, die man ohne weiteres aus einer Figur hätte entnehmen können, auf das sorgfältigste bewiesen. (Man begnügt sich also nicht mehr mit der bloss anschaulichen Evidenz !) — Dasselbe gilt für sämtliche Sätze und Beweise des VII. Buches bei Euklid. — Bei Archytas wird die genaue Ausführung aller einzelnen Beweisschritte sogar bis zur Pedanterie übertrieben.[71]

Man sieht also, dass es so gut wie unmöglich ist, irgendeinen Übergang zu beobachten zwischen dem Beweisverfahren des Thales und jenem anderen, welches die Pythagoreer vertreten. Es kann auch gar nicht davon die Rede sein, dass der strenge deduktive Beweis der Mathematik irgendwie langsam und tastend sich ausgebildet hätte. Die neue Art der Beweisführung ist in ihrer vollen Strenge auf einmal plötzlich da bei den Pythagoreern, ohne dass man es sich vorläufig erklären könnte, wie sie eigentlich zustande kam. Wir müssen eben einfach feststellen, dass in der verhältnismässig kurzen Zeitspanne zwischen Thales und den Pythagoreern die deduktive Wissenschaft irgendwie zur Welt gekommen ist. — Es bliebe nur noch zu erklären, wie und warum eigentlich diese plötzliche und überraschende Wandlung eintrat?

IV

Die bisherigen Betrachtungen haben die Vermutung nahegelegt, dass die deduktive Mathematik eigentlich die Schöpfung der Pythagoreer gewesen sei. Denn sie haben jene ältesten mathematischen Sätze und Beweise zusammengestellt, auf Grund welcher man schon auf das Vorhandensein einer deduktiven Wissenschaft schliessen kann. Aber darüber haben wir noch gar nichts sagen können: was eigentlich die Pythagoreer zu diesem bedeutenden Schritt veranlasst haben mag? Wie kamen sie überhaupt auf den Gedanken, dass eine Behauptung mathematischen Inhalts sich auch in solcher Form beweisen lässt, nicht nur in der Art, wie es zu seiner Zeit Thales noch getan hatte? Und wie ist es möglich, dass sie zu einer so frühen Zeit schon so strenge Beweise lieferten, dass man sie auch später noch kaum über-

[71] Die Charakterisierung dieser Sätze sieh bei v. d. Waerden: Math. Ann. 120 139—140, bezw. bei G. Hauser: o. c. S. 107 (über Hippokrates).

treffen konnte? Denn bemerken wir sogleich, dass das allererstaunlichste an der Wissenschaft der Pythagoreer gerade die Strenge ihrer Beweise ist.[72]

Die frühere Forschung scheint nur die Tatsache selbst festgelegt zu haben — nämlich in der Behauptung, dass die wissenschaftliche Mathematik der Griechen mit den Pythagoreern beginnt —, aber sie hat eine Antwort auf die vorhin genannten Fragen noch überhaupt nicht versucht. K. Reidemeister vertrat z. B. den eben erwähnten Gedanken, dass also die Pythagoreer die Begründer der wissenschaftlichen Mathematik sind, mit den folgenden Worten:

«Die Pythagoreer entdeckten die Möglichkeit, mathematische Tatbestände auf Hypothesen zurückzuführen, aus denen diese Tatbestände durch *Denken* gefolgert werden können. Damit entdeckten sie aber zugleich einen Weg, der aus dem Anschaulichen heraus zu geometrischen Tatsachen führt, die *nur* dem Denken zugänglich sind.»[73]

Überlegt man sich diese Worte, so wird man in der Tat kaum etwas an ihnen auszusetzen haben, denn sie beschreiben ja tadellos die Leistung der Pythagoreer. Sie haben wirklich die mathematischen Tatbestände (die auch sinnlich wahrnehmbar sind!) auf Hypothesen (also auf rein gedankliche Elemente) zurückgeführt. Kein Wunder, dass dieselben mathematischen Tatbestände aus den Hypothesen durch Denken gefolgert werden konnten. Der Weg führte nicht nur aus dem Anschaulichen, sinnlich Wahrnehmbaren heraus zu dem rein Gedanklichen, sondern auch umgekehrt, vom Gedanklichen zurück zu dem sinnlich Wahrnehmbaren. Das überraschende war eher, dass man von den Hypothesen auch zu solchen anderen Tatsachen gelangen konnte, die nicht mehr anschaulich, *nur* dem Denken zugänglich sind. K. Reidemeister versäumt es auch nicht diese Errungenschaft der Pythagoreer an einem Beispiel zu illustrieren. Wie er schreibt: «Die pythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden gipfelt nämlich in dem Nachweis, dass die Diagonale d eines Quadrates und die Quadratseite s desselben nicht mit derselben Einheitsstrecke e gemessen werden können. (Das heisst in der Sprache der Mathematik: die *Inkommensurabilität*

[72] Die logische Strenge der pythagoreischen Mathematik überrascht selbst die besten Kenner dieses Zeitalters. O. Becker bemerkt z. B. in seiner Kritik über v. d. Waerdens Buch (Science awakening) zu jener Vermutung, dass Euklids VII. Buch noch aus der Zeit vor 400 stammt: «die vollendete Form von 7 könnte durch eine spätere Überarbeitung, etwa durch die Mathematiker der Akademie zustande gekommen sein». — Man versteht, wodurch dieser leichte Zweifel des Kritikers ausgelöst wurde. Die Komposition des VII. Euklidischen Buches ist nämlich so geschlossen kompakt, dass selbst Becker sich fragen musste: ob man doch so etwas schon im 5. Jahrhundert zustande bringen konnte? — Aber kaum ist der Zweifel aufgetaucht, so musste er schon vor dem stärkeren Argument weichen: «Indessen macht der Verfasser (d. h. v. d. Waerden) dagegen das gewichtige Argument geltend, dass bei einer streng logischen Untersuchung, wie sie die Begründung der Zahlentheorie in 7 darstellt, eine Unterscheidung von Inhalt und Form untunlich ist.» — O. Beckers Worte findet man in Gnomon 23 1951 S. 299.

[73] K. Reidemeister: o. c. S. 52.

der Quadratdiagonale zur Seite.) Das lässt sich nicht veranschaulichen (man kann die Inkommensurabilität wirklich nicht mehr sinnlich wahrnehmen) — wie sich etwa der Satz des Pythagoras veranschaulichen lässt —, nur denken und erschliessen.»[74] — Natürlich kann man mit diesen Feststellungen einverstanden sein, es fragt sich nur, ob wir daraus auch verstehen, wieso eigentlich die Pythagoreer auf den rätselhaften Einfall kamen, die sinnlich wahrnehmbaren mathematischen Tatbestände auf Hypothesen zurückzuführen? Was wollten sie überhaupt mit ihren Hypothesen erreichen? Denn es ist ja kaum denkbar, dass sie im voraus geahnt hätten: auf dem Wege der Hypothesen werden sie einmal auch so etwas entdecken, was man gar nicht mehr veranschaulichen, nur denken und erschliessen kann, wie z. B. die eben erwähnte Inkommensurabilität. — Mit einem Wort: die vorigen Zitate von Reidemeister beschreiben zwar die Tatsachen genau, und sie erklären, was eigentlich in der pythagoreischen Mathematik vor sich ging, aber sie geben dennoch keine *historische* Erklärung dafür. Man versteht aus ihnen nicht wie das alles stattfinden konnte.

Will man das Entstehen der deduktiven Wissenschaft historisch erklären, so muss man vor allem die Methoden des Beweisens im Falle jener Sätze genauer untersuchen, die nach unserem heutigen Wissen aus der ältesten Zeit der deduktiven Mathematik stammen. O. Becker, der die Lehre vom Geraden und Ungeraden in ihrer ursprünglichen Form wiederherstellte, hat selber gezeigt, wie man eine solche Untersuchung anstellen kann, und sein Beispiel überzeugt auch davon, dass eine solche Prüfung manches Licht auf diese frühe Epoche der Wissenschaft werfen kann. Er konnte z. B. den archaischen Charakter jener Züge nachweisen, die für die altpythagoreische Lehre kennzeichnend sind. Ähnlich wollen wir jetzt das allgemeine Beweisverfahren der ältesten mathematischen Sätze untersuchen.

Vor allem interessiert uns die Frage, ob man jene Erklärung bestätigen könnte, die K. v. Fritz versuchte (vgl. das II. Kapitel dieser Arbeit), als er die Entfaltung des mathematischen Beweisverfahrens mit derjenigen der Logik verglich? Wie steht es im Falle der ältesten mathematischen Sätze? Ist es wirklich so, dass schon im 5. Jahrhundert die komplizierten Sätze im Beweis auf einfachere Prämissen zurückgeführt wurden? Nehmen wir z. B. einen Satz aus der Lehre vom Geraden und Ungeraden.

Der Satz Eucl. IX 22 besagt: *Setzt man beliebigviele ungerade Zahlen zusammen und ist ihre Anzahl gerade, so muss die Summe gerade sein.* — Dieser Satz wird in seinem Beweis in der Tat auf den noch einfacheren IX 21. zurückgeführt: *Setzt man beliebigviele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade.* Der Gedankengang des Beweises für den Satz IX 22. ist der folgende: Nachdem wir beliebigviele ungerade Zahlen zu addieren haben,

[74] Ebd. — Das Zitat ist mit meinen eigenen Worten (in Klammern) ergänzt.

deren Anzahl jedoch gerade ist, können wir zuerst aus jeder ungeraden Zahl die Einheit subtrahieren. Dadurch werden die gegebenen ungeraden Zahlen zu geraden Zahlen, da im Sinne der 7. Definition des VII. Buches *die ungerade Zahl sich eben um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet*. Die subtrahierten Einheiten zusammen bilden auch eine gerade Zahl, da ja ursprünglich ungerade Zahlen *in gerader Anzahl* gegeben waren. Wir haben also eigentlich nur gerade Zahlen zu addieren, für welche der Satz IX 21. gültig ist. — Der Beweis besteht also in diesem Fall tatsächlich daraus, dass der «kompliziertere» Satz (IX 22.) auf die einfachere Prämisse (Satz IX 21.) zurückgeführt wird. Ähnlich wird auch der Satz IX 21. in seinem Beweis auf die noch einfachere Definition der geraden Zahl (VII Def. 6), als auf seine Prämisse zurückgeführt.

Man wäre also geneigt, auf Grund solcher direkter Beweise, die in der Tat auch schon in der ältesten Zeit benutzt wurden, jene Theorie restlos zu bejahen, welche den Ursprung der mathematischen Deduktion eben in dieser Art von Beweis erblickt. — Man wird jedoch diese Frage etwas vorsichtiger behandeln wollen, wenn man daran denkt, dass neben dem direkten Beweis schon in der ältesten Zeit häufig auch eine völlig andere Art des Beweisverfahrens benutzt wurde. Es lohnt sich vor allem eine kurze Statistik der pythagoreischen Beweise zu überblicken.

Die Lehre vom Geraden und Ungeraden besteht insgesamt aus 17 Sätzen. Von diesen Sätzen sind die Beweise einiger nicht in ihrer ursprünglichen Form überliefert. Euklid hat nämlich die alten Beweise hie und da überarbeitet, weil er dadurch die ganze Lehre mindestens äusserlich enger in das Gefüge seines Werkes hineinbauen wollte. O. Becker hat allerdings gezeigt, dass man selbst in diesen Fällen die alte Form des Beweises ziemlich leicht wiederherstellen kann. — Nun ist es aber interessant, dass von diesen 17 Sätzen 5 mit indirekter Methode bewiesen werden; in einem 6. Fall ist der Beweis nicht nur indirekt, sondern darüber hinausgehend: eine *deductio ad absurdum*. Zieht man auch die Rekonstruktionen von Becker in Betracht, so steigt die Anzahl der indirekten Beweise noch höher, nämlich auf 8. Beinahe zur Hälfte werden also die Sätze über das Gerade und Ungerade indirekt bewiesen. Diese verhältnismässig häufige Anwendung des indirekten Beweises fällt selbstverständlich auf. Man fragt sich unwillkürlich, ob dem indirekten Beweis nicht eine ganz besondere Bedeutung zukäme, nachdem er ja doch so oft benutzt wurde?

Man wird in dieser Vermutung noch weiter bestärkt, wenn man den Beweis jenes Archytas-Satzes prüft, welcher für v. d. Waerden die Gelegenheit bot, um die pythagoreische Herkunft des VII. Euklidischen Buches nachzuweisen. Sowohl der Satz des Archytas, wie auch die meisten jener Sätze, die zu seinem Stammbaum gehören, werden indirekt bewiesen. Von den ersten 36 Sätzen des VII. Euklidischen Buches sind die Beweise in 15

Fällen indirekt. Ja, es gibt auch solche Sätze in diesem VII. Buch, die heute zwar auf den ersten Blick so aussehen, als hätten sie einen direkten Beweis, aber prüft man sie genauer, so stellt es sich bald heraus, dass der Gedankengang ihres Beweises eigentlich indirekt war, und nur später oberflächlich auf einen direkten Beweis umgeändert wurde. So z. B. der Satz Eucl. VII 19., der heute zwar einen direkten Beweis besitzt, aber man sieht an diesem Beweis, dass sein Gedankengang ursprünglich indirekt war.

Wie könnte man nun diese häufige Verwendung des indirekten Beweises erklären? Denn es ist offenbar, dass jene Vermutung, die K. v. Fritz für die Entfaltung des direkten Beweises versuchte, in diesem Falle versagt. Es handelt sich ja bei der Anwendung des indirekten Beweises gar nicht darum, dass man eine «einfachere» Prämisse für den «komplizierteren» Satz sucht. Der indirekte Beweis ist die Frucht einer völlig anderen logischen Überlegung. — Es wird sich vor allem lohnen, die Frage zu stellen, wie etwa heutzutage ein Mathematiker den indirekten Beweis unter dem Gesichtspunkt der Heuristik beurteilt?[75] — B. L. v. d. Waerden erteilt einmal den folgenden heuristischen Rat: [76]

«Wird nicht eine Konstruktion, sondern ein Beweis verlangt, so sucht man oft mit Vorteil einen *indirekten Beweis*. Man nimmt an, die Behauptung sei falsch, man zieht auch noch das Gegebene heran, und man schliesst so lange weiter, bis man auf einen Widerspruch kommt. Oft gelingt es nachher, den Beweis direkt zu führen, aber zu finden ist der indirekte Beweis manchmal leichter, weil man dabei mehr voraussetzen kann, nämlich das Gegebene und die Falschheit des Behaupteten. Von beiden Seiten aus schliessend, hat man eine Chance, sich in der Mitte zu treffen.»

Interessant sind diese Worte des modernen Mathematikers für uns nicht nur deswegen, weil sie den psychologischen Vorgang des mathematischen Entdeckens einigermassen beleuchten, sondern auch darum, weil sie eine völlig neue Perspektive vor der historischen Frage eröffnen: wie man einst wohl auf den Gedanken des deduktiven Beweises kam. Der Mathematiker behauptet, dass wenn man einen Beweis liefern will, oft der Versuch eines indirekten Beweises vorteilhaft sei. Wohl gelingt es nachher, denselben Beweis auch direkt zu führen, aber zu finden ist der indirekte Beweis

[75] Wir verzichten also einstweilen darauf, die Frage des indirekten Beweises auch über den Bereich der blossen mathematischen Heuristik hinausgehend ausführlicher zu erörtern. Bekanntlich ist die Schule des mathematischen Intuitionismus bestrebt, die Verwendung dieser Beweisform einzuschränken. Wir sind zwar der Meinung, dass es wirklich nützlich wäre, die Gesichtspunkte des Intuitionismus auch in der Erforschung der griechischen Mathematik-Geschichte zu berücksichtigen, wie es z. B. O. BECKER in seinen Eudoxos-Studien getan hatte. Eine noch eingehendere Untersuchung könnte wohl nachweisen, dass das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten anders im 5. und anders im 4. Jahrhundert verwandt wurde. Aber wir wollten mit dieser Frage das Problem vorläufig nicht weiter komplizieren.

[76] «Einfall und Überlegung in der Mathematik», Elemente der Mathematik, Bd. VIII. Basel 1953, S. 123.

manchmal doch leichter. Es stehen uns ja im Falle eines solchen Beweisverfahrens mehr Möglichkeiten zur Verfügung. — Liest man diese Worte aufmerksam genug, und vergleicht man sie mit der Tatsache, dass nach unserer Statistik der indirekte Beweis in der Wissenschaft der Pythagoreer, also schon in der ältesten Zeit der deduktiven Mathematik, so oft verwandt wurde, so muss man sich unwillkürlich fragen: *ob der indirekte Beweis nicht von Anfang an eines der allerwesentlichsten Werkzeuge der deduktiven Mathematik war?* — Um diese Frage beantworten zu können, prüfen wir genauer einige Fälle des indirekten Beweisverfahrens an Beispielen der ältesten griechischen Mathematik.[77]

Den ältesten bekannten indirekten Beweis liefert Euklid in der Lehre vom Geraden und Ungeraden für den Satz IX 30. *Eine ungerade Zahl muss, wenn sie eine gerade Zahl misst, auch deren Hälfte messen.* Dieser Satz wird in seinem Beweis auf den vorangehenden IX 29. zurückgeführt, aber *nicht* direkt, sondern durch einen indirekten Schluss. (Der vorangehende Satz IX 29. besagt, dass «*das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist*».) Zu dem Beweis unseres Satzes (IX 30.) muss man vor allem nachweisen, dass der Quotient einer geraden und einer anderen ungeraden Zahl *nur* gerade sein kann. Ist nämlich dieser Nachweis erbracht, so folgt daraus schon selbstverständlich der Satz selbst: *Eine ungerade Zahl muss, wenn sie eine gerade Zahl misst, auch deren Hälfte messen.* — Nun besteht der indirekte Beweis dessen, dass der Quotient einer geraden und einer anderen ungeraden Zahl *nur* gerade sein kann, aus dem folgenden Gedankengang:

Bekannt sind im Sinne des Satzes selbst: der Dividend (eine gerade Zahl) und der Teiler (eine ungerade Zahl). Ob der Quotient wirklich eine gerade Zahl ist, wissen wir noch nicht, wir wollen es erst beweisen. Ehe wir noch den Beweis versuchten, erinnern wir uns daran, dass das Produkt des Teilers und des Quotienten selbstverständlich den Dividenden ergibt. In unserem Fall ergibt also das Produkt des Teilers (einer ungeraden Zahl) mit dem Quotienten (einer anderen Zahl, von der wir noch nicht wissen, ob sie wirklich gerade ist) den Dividenden, der doch eine gerade Zahl ist. Wie könnte man nun beweisen, dass der Quotient in der Tat eine gerade Zahl ist? — Nehmen wir das *Gegenteil* dessen an, was wir beweisen wollen: sei der Quotient eine «ungerade» Zahl; und nun prüfen wir, was aus dieser Annahme folgt. Ist der Quotient ebenso eine «ungerade» Zahl, wie der Teiler, so muss auch das Produkt der beiden eine «ungerade» Zahl sein, da ja im Sinne des vorangehenden Satzes (IX 29.): *das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist.* In unserem Fall ist jedoch das Produkt des Teilers und des Quotienten (der

[77] Zum folgenden vgl. man auch meine frühere Arbeit «Eleatica» in Acta Antiqua III 67–103. Die Ergebnisse meiner früheren Untersuchungen (Acta Ant. Hung. 1 [1950] 377–410, II 17–62 und 243–289) werden selbstverständlich auch in der vorliegenden Arbeit immer benutzt, auch wenn ich nicht jedesmal auf sie ausdrücklich hinweise.

Dividend) im Sinne des geprüften Satzes selbst: *eine gerade Zahl.* Wir sind also bei einem *Widerspruch* angelangt, zum Zeichen dessen, dass unsere Denkweise falsch war. Es ist also *nicht möglich,* dass der Quotient in dem gegebenen Fall «ungerade Zahl» sei, sie muss gerade sein. Und damit ist der gewünschte Beweis erbracht.

Wir haben den Beweis, den wir prüfen wollen, nicht wörtlich zitiert, statt dessen nur den Euklidischen Gedankengang *haargenau* — dabei selbstverständlich auch mit Interpretation ergänzt! — wiedergegeben, weil eigentlich nur auf diese Weise die Kontrolle der einzelnen Gedankenschritte möglich wird. Nun wollen wir jetzt sehen, was sich von dem erbrachten indirekten Beweis feststellen lässt.

Man sieht vor allem, dass das indirekte Verfahren daraus besteht, dass man eigentlich *nicht* den fraglichen Satz selbst *beweist,* sondern statt dessen das Gegenteil des Satzes *widerlegt.* Wir wollten ja nachweisen, dass die geprüfte Zahl (der Quotient) eine gerade ist, aber statt des direkten Beweises dieser Behauptung haben wir die gegenteilige Behauptung — «die geprüfte Zahl wäre ungerade» — widerlegt. Diese Form des Beweisens hat überhaupt deswegen den Namen «indirekt» bekommen, weil sie eigentlich kein Beweis, sondern eine Widerlegung ist. Nicht der geprüfte Satz wird bewiesen, sondern sein Gegenteil widerlegt. Man wird also eine Behauptung durch indirekten Schluss so beweisen können, dass man zuerst das Gegenteil der Behauptung aufstellt, und dann zeigt man, dass diese gegenteilige Behauptung falsch ist.

Schon auf Grund dieser völlig einfachen Feststellung über die Tatsache selbst, worin eigentlich das indirekte Beweisverfahren besteht, lassen sich sehr wesentliche Vermutungen auch darüber aufstellen: was alles eigentlich zur Handhabung des indirekten Beweises unerlässlich notwendig ist? Um einen indirekten Beweis führen zu können, muss man vor allem davon überzeugt sein, dass eine Behauptung entweder *wahr* oder *nicht wahr* ist; ausser diesen beiden Möglichkeiten gibt es eine dritte überhaupt nicht. (Entweder ist ein Ding *A*, oder *Non-A; tertium non datur.*) Ja, man muss diese grundlegende Erkenntnis jeder Logik sich schon so felsenfest angeeignet haben, dass man auch davon überzeugt sei, dass der Beweis irgendeiner Behauptung *(A)* der Widerlegung ihres Gegenteils *(Non-A)* äquivalent ist. Solange man das alles nicht genau und unerschütterlich fest weiss, wird man unter keinen Umständen auf den Gedanken kommen, einen solchen indirekten Beweis, wie der vorige ist, zu führen.

Betrachtet man jedoch den eben dargestellten indirekten Beweis genauer, so entdeckt man bald, dass sich auch noch ein anderer sehr wesentlicher Zug an diesem logischen Verfahren beobachten lässt. Es ist nämlich auffallend, wie man eigentlich die Falschheit einer Behauptung im Laufe des Beweisvorganges entdeckt. — Wir haben die Behauptung aufgestellt, dass der Quotient — nicht wie es richtig: *gerade*, sondern wie es eigentlich falsch ist, dass er nämlich — eine «ungerade» Zahl wäre. Als wir diese Behauptung aufstellten, konnten wir natürlich im voraus noch nicht wissen, dass sie sich als falsch erweisen wird; das hat sich erst später herausgestellt. Denn wir haben aus unserer (falschen) Behauptung Schlüsse gezogen. Wir dachten nämlich: wenn der Quotient eine «ungerade Zahl» ist, dann muss — im Sinne unserer früheren und schon gesicherten Kenntnis, nämlich im Sinne des vorangehenden Satzes (IX 29.) — auch der Dividend eine «ungerade Zahl» sein. Damit sind wir aber bei einem *Widerspruch* angelangt — denn wir wissen ja, dass der Dividend im gegebenen Falle nicht eine «ungerade», sondern eine gerade Zahl ist —, und der *Widerspruch* war das Zeichen dessen, dass unsere Denkweise falsch war. — Ehe wir noch weitergingen, müssen wir genau verstehen, was es eigentlich heisst, dass wir im Laufe der Gedankenführung *bei einem Widerspruch angelangt sind?* Worin bestand denn der «Widerspruch»? — Diese auf den ersten Blick keineswegs völlig durchsichtige Redeweise heisst diesmal nur folgendes: Wir sind im Laufe unserer Gedanken zu der Behauptung gekommen: «*Der Dividend ist eine ungerade Zahl.*» Am Anfang jedoch, als wir den Satz hörten, den wir zu beweisen hatten, hiess es: «*Der Dividend ist eine gerade Zahl.*» Die beiden Behauptungen — «er ist ungerade Zahl» und «er ist eine gerade Zahl» — widersprechen sich. Die beiden Sätze können natürlich nicht auf einmal (gleichzeitig) wahr sein, denn entweder ist ein Ding *A*, oder *Non-A*, *tertium non datur*, und ausserdem kann von zwei solchen gegenteiligen Behauptungen immer nur die eine *wahr* sein, die andere ist notwendigerweise *nicht wahr*. — Die Redeweise also, dass wir «bei einem Widerspruch angelangt sind», heisst eigentlich so viel, dass wir zu einer Behauptung gekommen sind, welche einer anderen, schon früher als wahr erkannten Behauptung widerspricht. Die beiden Behauptungen können nicht vereinigt werden, weil ihre Vereinigung einen *inneren Widerspruch* des Gedankens («dieselbe Zahl ist gerade *und* ungerade») erzeugte. Darum ist das Auftauchen des *Widerspruches* ein Zeichen dafür, dass die Gedankenführung irgendwo falsch war.

Sehr bezeichnend ist also für den behandelten indirekten Beweis auch die Auffassung, dass der «innere Widerspruch» des Gedankens ein Zeichen für seine Falschheit ist. Der Gedanke, der sich selbst widerspricht, kann nicht wahr sein. Daraus folgt natürlich auch soviel: wahr ist nur der Gedanke, der sich selbst nicht widerspricht, also: *der widerspruchsfreie Gedanke*. Die Widerspruchsfreiheit als einziges logisches Kriterium[78] für die Wahrheit

[78] Im täglichen Leben ist man gewohnt eine Behauptung für wahr zu halten, wenn sie mit der praktischen Erfahrung übereinstimmt. Dagegen gibt es ein *logisches Kriterium* für die Wahrheit einer Behauptung *ausser der Widerspruchsfreiheit* eigentlich kaum. Man muss jede Behauptung — natürlich einzig und allein von dem Gesichtspunkte der Logik aus betrachtet — solange für wahr halten, bis es nicht gelingt, irgendeinen Widerspruch in ihr nachzuweisen. Man kann den Widerspruch in einer Behauptung, wie

irgendwelcher Behauptung muss selbstverständlich demjenigen, der einen indirekten Beweis verfasst, bekannt sein. Um diese These genauer zu illustrieren, wollen wir — ehe wir noch weitergingen und die Konsequenzen aus den Feststellungen über den indirekten Beweis im allgemeinen zögen — mindestens noch an einem Beispiel aus der ältesten griechischen Mathematik das indirekte Beweisverfahren ausführlicher untersuchen.

Der Satz Eucl. VII 31., dessen pythagoreischer Ursprung aus dem 5. Jahrhundert durch v. d. Waerden nachgewiesen wurde, besagt: *Jede zusammengesetzte Zahl wird von irgendeiner Primzahl gemessen.* Zu dem Euklidischen Beweis dieses Satzes muss man die folgenden Definitionen des VII. Buches kennen:

Def. 2: *Zahl ist die (endliche) Menge von Einheiten.*
Def. 11: *Primzahl ist die nur die Einheit zum Teiler hat.*
Def. 13: *Zusammengesetzte Zahl (= Nicht-Primzahl) ist diejenige, die irgendeine andere Zahl zum Teiler hat.*

Der Beweis des Satzes (VII 31.) lautet bei Euklid folgendermassen. — Sei a eine beliebige zusammengesetzte Zahl. Wir wollen beweisen, dass diese zusammengesetzte Zahl irgendeinen Primzahl-Teiler besitzt. Nachdem a eine zusammengesetzte Zahl ist, muss sie eine andere Zahl, b zum Teiler haben (Def. 13). Diese Zahl b kann nur Primzahl oder Nicht-Primzahl (= zusammengesetzte Zahl) sein; eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Ist b eine Primzahl, so ist der Satz (VII 31.) bewiesen; ist jedoch b eine zusammengesetzte Zahl, so muss sie einen Teiler c besitzen (Def. 13), der selbstverständlich auch ein Teiler von a ist. Nun kann aber c wieder entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Im ersten Fall ist der Satz bewiesen, denn wir haben eine Primzahl c, die Teiler von b und dadurch auch derjenige von a ist. Ist aber c eine zusammengesetzte Zahl (= Nicht-Primzahl), so prüft man weiter ihren Teiler d usw. — Der Beweis betont, dass man auf diese Weise schliesslich einen Primzahl-Teiler der zusammengesetzten Zahl a finden wird. Sollte man nämlich nie den gesuchten Primzahl-Teiler finden, und wären die Teiler von a lauter zusammengesetzte Zahlen, so hiesse es, dass die Zahl a unendlich viele immer kleiner werdende Teiler besitzt, was jedoch im Bereiche der Zahlen unmöglich ist.

Überblickt man die eben dargestellte Gedankenkette des Beweisvorganges, so muss man zugeben, dass die einzelnen Glieder der Behauptung

bekannt, dadurch nachweisen, dass man Schlüsse (Konsequenzen) aus der Behauptung zieht, und dass man das Verhältnis dieser Konsequenzen zu anderen, schon für wahr geltenden Sätzen prüft. Gerät man auf diese Weise in Widerspruch mit einem schon wahr anerkannten Satz, so kann die anfangs aufgestellte Behauptung nicht mehr als wahr gelten, denn man hat ihren widerspruchsvollen Charakter erkannt. (Allerdings müsste man einmal noch nachweisen können, dass es auch beim *richtigen* Schlüsse-Ziehen aus irgendeiner Behauptung auf das *Vermeiden des Widerspruches* ankommt!)

immer durch das Motiv der «Widerspruchfreiheit» aneinander gereiht werden. Die Zahl b muss z. B. deswegen entweder Primzahl oder Nicht-Primzahl (= zusammengesetzte Zahl) sein, weil der dritte Fall («sie ist Primzahl *und* Nicht-Primzahl») innerer Widerspruch des Gedankens wäre, also unmöglich ist. Sollte der erste Fall zutreffen — «b ist Primzahl» —, so braucht man nicht weiterzugehen, da die Aufgabe gelöst ist; im zweiten Fall jedoch — «b ist Nicht-Primzahl» — kann das *dreiteilige Kettenglied des Gedankens* auch für ihren Teiler wiederholt werden: *Primzahl — Nicht-Primzahl — dritter Fall unmöglich;* erster Fall — gelöst; zweiter Fall — man wiederholt von vorne den Gedanken. — Dass aber wirklich die indirekt nachgewiesene Widerspruchsfreiheit des Gedankens sozusagen die Grundlage des ganzen Beweises ist, ersieht man besonders aus dem letzten Schritt. Die Behauptung «A», die man diesmal indirekt begründet, heisst: *«das dargestellte Vorgehen des Suchens ist ein e n d l i c h e r Prozess, man f i n d e t am Schluss die gesuchte Primzahl».* Der indirekte Beweis dieser Behauptung besteht darin, dass man ihr Gegenteil, «Non-A» aufstellt, um es zu widerlegen: *«das dargestellte Vorgehen des Suchens ist ein u n e n d l i c h e r Prozess, man findet die gesuchte Primzahl n i e».* Um die Falschheit dieser letzteren Behauptung nachweisen zu können, zieht man aus ihr solange Schlüsse, bis der innere Widerspruch des Gedankens offenbar wird. — Hört der Prozess des Suchens «nie» auf, dann heisst es soviel, dass wir immer nur solche Teiler der Zahl a finden, die auch selber zusammengesetzte Zahlen sind. Jene Zahlen aber, die sich im Laufe des Suchens als Teiler von a erweisen, sind nicht nur alle kleiner als a, sondern sie werden ausserdem mit dem Vorwärtsgehen des Prozesses immer auch noch kleiner. Hört also der Prozess nie auf, so besitzt die Zahl a unendlich viele immer kleiner werdende Teiler, die auch selber alle zusammengesetzte Zahlen sind. Aber diese letztere Behauptung lässt sich ja nicht vereinigen mit der Definition 2: *Zahl ist die (endliche) Menge von Einheiten,* sie kann also nicht aus unendlich vielen zusammengesetzten Zahlen bestehen. Wir sind also auf den gesuchten «Widerspruch» gestossen, zum Zeichen dessen, dass die Behauptung «Non-A» nicht wahr sein kann, ihr Gegenteil, die Behauptung «A» ist wahr.

Lehrreich ist der letzte indirekte Beweis auch darum, weil er zufälligerweise auch noch das Problem beleuchten kann: wie man wohl überhaupt auf den Gedanken der mathematischen *Definition* kam. Prüft man nämlich den Satz Eucl. VII 31. und seinen eben behandelten Beweis genauer, so entdeckt man gleich einen merkwürdigen historischen Zusammenhang. Dieser Beweis betont ja, dass keine auch noch so grosse zusammengesetzte Zahl *unendlich viele immer kleiner werdende Teiler haben kann.* Aber wer hat im 5. Jahrhundert v. u. Z. das «Gegenteil dieser Behauptung» aufgestellt, oder mindestens etwas, was so aussieht, als wäre es das «Gegenteil dieser Behauptung»? — Bekanntlich war es der Eleate Zenon, der behauptete, dass jede Strecke AB *die unendlich vielen immer kleiner werdenden Teiler* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ besitzt.[79] Der Verfasser unseres Beweises will Zenons Behauptung auch gar nicht widerlegen; er betont nur, dass der ähnliche Prozess «im Bereiche der Zahlen» unmöglich ist, weil er im Widerspruch mit der Definition der Zahl stünde. Man hat also — mindestens in diesem Fall — die mathematische Definition so formuliert, dass sie die Grundlage für die Widerspruchsfreiheit jener Behauptungen (Sätze) sei, die man auf sie baute.

Schliessen wir diese kurze Betrachtung über das Motiv der Widerspruchsfreiheit mit einer Vermutung über das indirekte Beweisverfahren, die prinzipiell wichtig sein kann. Ist nämlich die Widerspruchsfreiheit das einzige logische Kriterium für die Wahrheit einer Behauptung, so muss der indirekte Beweis überhaupt sozusagen *die primäre logische Beweisart* sein. Ihm gegenüber kann der direkte Beweis nur *sekundärer logischer Art* sein. Allerdings müssen wir noch zum Verständnis dieser prinzipiell wichtigen Vermutung erklären, was wir eigentlich in dieser Beziehung unter «primär» und «sekundär» verstehen. Fangen wir mit dem leichteren Terminus «sekundär» an. Wie soll man die Behauptung verstehen, dass der direkte Beweis «sekundärer logischer Art» ist? — Die Wahrheit einer Behauptung kann auf dem Wege der Logik mit direkter Methode nur so gezeigt werden, dass man jene Behauptung, deren Wahrheit nachzuweisen ist, mit einer anderen solchen Behauptung verknüpft, deren Wahrheit ihrerseits schon von früher her erkannt ist. Die Behauptung also, die zu beweisen war, wird darum als wahr erscheinen, weil man erkennt, dass sie irgendwie aus einer anderen schon früher als wahr anerkannten Behauptung folgt. Wohl können also auch durch den direkten Beweis die wahren Behauptungen in eine sozusagen unendliche Kette der «Wahrheiten» hineingefügt werden. Aber mit direkter Methode können wir nie eine solche letzte Behauptung finden, deren Wahrheit oder Unwahrheit wir bloss mit logischen Mitteln feststellen könnten. Deswegen sagen wir, dass der direkte Beweis «sekundärer logischer Art» ist. — Dagegen ist der indirekte Beweis «primärer logischer Art». Denn es gibt in der Tat mindestens *eine* solche Behauptung, deren Unwahrheit man bloss mit logischen Mitteln erkennen kann. Die Behauptung nämlich, die sich selbst widerspricht, kann, ohne Rücksicht auf ihren konkreten Inhalt, unmöglich wahr sein. Der indirekte Beweis baut eben immer auf diese *primäre logische Erkenntnis*. Man zieht solange immer wieder Schlüsse aus der geprüften Behauptung, d. h. man überlegt sich alle Konsequenzen des aufgestellten Satzes, bis man bei dem offenbaren Selbstwiderspruch des Gedankens anlangt. Nur so kann ein indirekter Beweis gelingen. — Ist aber der indirekte Beweis dem direkten gegenüber *logisch primär*, so muss diese Art des Beweisverfahrens auch historisch ursprünglicher sein, als der direkte Beweis. In der Tat beginnt

[79] Vgl. Aristoteles phys. Z 9. 239 b 9 ff. und 2.233 a 21.

die historische Entfaltung der Logik — wie wir bald daran erinnern müssen — mit dem Erscheinen des indirekten Beweises.

Nun kommen wir aber zu den Schlüssen zurück, die sich aus der Betrachtung des indirekten Beweisverfahrens für die Geschichte der griechischen Mathematik ergeben. Das Vorhandensein, ja das häufige Verwenden dieser Art des Beweises in der pythagoreischen Mathematik des 5. Jahrhunderts zeigt, dass zu dieser Zeit den griechischen Mathematikern eine hochentwickelte Logik schon sehr gut bekannt sein musste. Ohne eine schon vorhandene und bewusst angewandte Logik ist ja die deduktive Mathematik gar nicht möglich, denn die mathematische Deduktion ist im Grunde überhaupt nichts anderes, als die bewusste Anwendung der Logik auf Behauptungen mathematischen Inhalts. Es fragt sich nur: woher eigentlich diese Logik kommt? Haben die Mathematiker sie fertig von anderen übernommen, oder haben sie sie etwa selber ausgebildet, indem sie sich mit ihrem eigenen Forschungsobjekt beschäftigten? — Wir wollen zunächst beide Möglichkeiten offen ins Auge fassen ohne dass wir uns dabei schon im voraus auf bekannte historische Tatsachen beriefen.

Gesetzt, dass die Pythagoreer diese Logik selber gefunden hätten, indem sie sich mit jenen empirischen Kenntnissen mathematischen Inhalts intensiv beschäftigten, welche sie fertig vorgefunden hatten, so fragt es sich : was hat sie denn zu dieser über ein solches Objekt bis dahin allerdings völlig unversuchten Gedankentätigkeit veranlasst? Dass sie damit irgendwelche praktische Zwecke gehabt hätten, ist nach all dem, was wir oben entwickelten, völlig unwahrscheinlich. Es bleibt also die andere Möglichkeit : sie müssen diese Beschäftigung aus rein intellektuellem Interesse betrieben haben. Es interessierte sie also nicht so sehr das tatsächliche Material ihrer Forschung — die früheren empirischen Kenntnisse mathematischen Inhalts —, als eher das Gedankliche, welches sie an diesem Material erprobten, also die Logik. Aber wie soll dann die Logik doch aus den empirischen Kenntnissen der früheren Mathematik erwachsen sein? — Auf diese Frage gibt es gar keine Antwort. Sollen also die pythagoreischen Mathematiker selber die Logik erfunden haben, so bleibt es unerklärt, wie sie es eigentlich fertig brachten.

Wenden wir uns nun jetzt der anderen Möglichkeit zu, dass nämlich die Pythagoreer die Logik nicht gefunden, sondern übernommen, und ursprünglich sie nur auf ihr speziales Gebiet, nämlich auf die empirischen Kenntnisse der früheren Mathematik angewandt hätten, so eröffnen sich gleich wahre historische Perspektiven vor uns. Wir können uns nämlich sofort auf jene Eleaten berufen, die am Ende des 6. und am Anfang des 5. Jahrhunderts gerade in Süditalien sehr nahe bei der Heimat der Pythagoreer tätig waren. — Wir brauchen uns wohl nicht zu wiederholen und noch einmal umständlich zeigen, wie die Eleaten die Logik entdeckt hatten.[80] Statt dessen wird

[80] Vgl. Acta Ant. Hung. 2 (1953) 17—62 und 243—289.

es vielleicht genügen, nur kurz anzuzeigen, wie in der Tat alle für die pythagoreische Mathematik kennzeichnenden Züge schon früher in der Logik der Eleaten vorhanden waren.

Fangen wir damit an, dass das älteste Beispiel eines griechischen indirekten Beweisverfahrens eben aus dem Lehrgedicht des Parmenides bekannt ist.[81] Parmenides verwendet ja dasselbe Schema, welches wir oben in der Behandlung des indirekten Beweises für den Satz Eucl. VII 31. ausführlicher entwickelten. Nur besitzt bei Parmenides «das dreiteilige Kettenglied des Gedankens» noch die einfachere Form : 1. «das Seiende ist», 2. «das Seiende ist nicht» und 3. «das Seiende ist und ist auch nicht» *(tertium exclusum)*. Er, Parmenides war es ja, der zum ersten Male in der Geschichte des europäischen Denkens die These vertrat, dass das einzige Kriterium für die Wahrheit die Widerspruchsfreiheit ist. Wie könnte aber die Widerspruchsfreiheit, dieses Negativum nachgewiesen werden? — Am leichtestens durch die Widerlegung der gegenteiligen Behauptung, durch das Herausstellen ihres inneren Widerspruches. Deswegen hat Parmenides nie etwas «bewiesen», nur das Gegenteil seiner Behauptung widerlegt. Das ist die Art der Eleaten : durch Nachweis des inneren Widerspruches die gegenteilige Behauptung zu widerlegen.

Leitet man die von den Pythagoreern angewandte Logik von den Eleaten her ab, so wird auch jene grundsätzliche Wandlung auf einmal verständlich, die plötzlich in der Mathematik eintrat. — Wir haben schon betont, dass die Pythagoreer sich nicht mehr mit der empirischen, anschaulichen Evidenz begnügten. Sie wollten auch die alleroffenbarsten Tatsachen der täglichen Erfahrung «deduktiv» beweisen, ja sie standen beinahe feindlich der Praxis gegenüber. Man kann das alles gar nicht verstehen und erklären, wenn man die Logik einfach aus der Beschäftigung mit den praktischen mathematischen Kenntnissen ableiten will. Ja das ist beinahe sinnwidrig : warum sollte man auf einmal gar nichts mehr von der praktischen Erfahrung hören, gerade im Fall solcher Kenntnisse, die aus der praktischen Erfahrung stammten und für den praktischen Gebrauch bestimmt waren? — Aber es wird alles sofort klar und verständlich, wenn man bedenkt, dass diese Wandlung in der Mathematik eigentlich nur *eine Erbschaft der Eleaten-Logik* war. Die Eleaten haben nämlich jede sinnliche Erfahrung verworfen, weil sie auf rein spekulativem Wege den «inneren Widerspruch» in den sinnlichen Erfahrungen entdeckten. Denn unsere Sinnesorgane täuschen uns ja vor, als wären die widerspruchsvollen Erscheinungen, wie «Entstehen», «Vergehen», «Sich-Verändern», «Sich-Bewegen» usw. alle wahr. Aber wie könnte etwas wahr sein, was sich selbst widerspricht? Nach Parmenides steckt nämlich in allen diesen Dingen der Widerspruch des Seins und Nicht-Seins. Deswegen ver-

[81] Vgl. A. GIGON : Der Ursprung der griechischen Philosophie. Basel 1945. S. 251 : «die These wird (bei Parmenides) durch Widerlegung des Gegenteils bewiesen».

kündet er das neue Erkenntnis-Programm : «Lass dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen, deinen Blick den ziellosen, dein Gehör das brausende und deine Zunge walten zu lassen ; nein, *mit dem Verstande* bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich dir riet, zur Entscheidung!» — Die pythagoreischen Mathematiker des 5. Jahrhunderts haben sich eben an dieses Programm gehalten, deswegen verachteten sie das bloss Anschauliche, und deswegen erstrebten sie rein gedankliche Beweise. Die Widerspruchsfreiheit des Gedankens ist also eigentlich infolge des eleatischen Erkenntnis-Programms zum einzigen Kriterium der mathematischen Wahrheit geworden.

*

Die Mathematik war in der vorgriechischen Zeit lediglich eine Sammlung von erfahrungsmässigen, praktischen Kenntnissen. Dadurch, dass die ersten Pythagoreer am Ende des 6. oder spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts versuchten, die logische Methode der Eleaten auf diese bis dahin nur empirischen Kenntnisse zu verwenden, ist eine überraschende Entwicklung ermöglicht worden. Die Mathematik ist dasselbe geworden, was wir heute unter diesem Namen verstehen : eine deduktive Wissenschaft. Aber auch umgekehrt : auch die Logik hat dadurch jenes Gebiet gefunden, welches ihr am entsprechendsten war. Von nun an förderte nicht nur die Logik die deduktive Wissenschaft, sondern auch die Mathematik trug ihrerseits zu der weiteren Entfaltung der Logik bei. (Darum steht in mancher Hinsicht die Logik der späteren Mathematiker auf einer höheren Stufe, wie z. B. diejenige des Aristoteles.)

Es wäre jedoch verkehrt zu glauben, dass die Anwendung der Logik auf die mathematischen Kenntnisse schon in der ältesten Zeit der Entwicklung die Wissenschaft nur in positiver Richtung beeinflusste. Zum Teil war diese Wirkung in der alten Zeit auch von negativer Art. Es ist z. B. bekannt, wie weit entwickelt in den vorgriechischen Kulturen das Rechnen mit den Brüchen war. Die deduktive Mathematik der Griechen konnte jedoch mit den Brüchen nichts anfangen ; sie musste sie eben im Interesse der logischen «Widerspruchsfreiheit der Mathematik» beiseiteschieben. Wie der Platonische Sokrates es einmal erklärt : «Du weisst doch, dass die Mathematiker lachen würden, wenn man versuchte die Einheit zu zerlegen, und sie liessen es nicht gelten. Wolltest du nämlich die Einheit zerlegen, so würden sie sie statt dessen vervielfältigen. *Denn sie wollten es ja vermeiden, dass die Einheit jemals etwas anderes als sie selbst sei.* Wenn sie dann jemand fragte : Ihr Wunderlichen, von was für Zahlen sprecht ihr eigentlich? Wo ist denn eine Einheit, wie ihr sie fordert, nämlich etwas in sich völlig Gleiches, Unterschiedsloses, keine Teile Enthaltendes? Was würden sie darauf wohl antworten? —

Dass sie lediglich von *gedachten* Zahlen sprechen, die man nur erschliessen und nicht sinnlich wahrnehmen kann.»[82]

Kein Wunder, dass auf diese Weise das praktische Rechnen mit Brüchen sich nicht weiterentwickeln konnte; es blieb auch noch in byzantinischer Zeit dasselbe, was es im alten Aegypten war.[83]

А. САБО

КАКИМ ОБРАЗОМ СТАЛА МАТЕМАТИКА ДЕДУКТИВНОЙ НАУКОЙ?

(Резюме)

Статья имеет целью доказать следующие три тезиса: 1. греческая математика — как дедуктивная дисциплина — возникла не позднее первой половины V столетия до н. э. под влиянием элеатской философии; 2. перед тем это были элеаты, которые в истории европейской философии впервые сформулировали вернейшие основные принципы логики (этот пункт обработан в статье не слишком подробно, так как автор опубликовал уже несколько этюдов об этом вопросе в Acta Antiqua); 3. дедуктивная математика невозможна, пока математик не может опираться на какую-нибудь логику, употребляемую им вполне сознательно.

В соответствии с этим статья распределена на четыре главы.

В первой главе автор указывает на изменение, происшедшее во взглядах, относящихся к возникновению и оценке греческой математики. В последнее время углубились наши знания относительно математики древнего Египта и Вавилонии. О многих тезисах, приписанных недавно еще грекам, оказалось, что они были известны и ранее. Греков нельзя считать основателями математики в старинном смысле слова. Одновременно с этим выяснилось и то, что названные народы древнего Востока хотя и опередили греков во многих отношениях и сделали даже почины в области математики, которые стали плодотворными только начиная с эпохи Возрождения, все же не сыграли никакой роли в возникновении дедуктивной математики. Понятия о доказательстве, тезисе, дефиниции, аксиоме и постулате, без которых дедуктивная математика немыслима, были созданы греками.

Во второй главе автор приводит мнения, опубликованные в последнее время в связи с возникновением греческой философии. Особенное внимание уделяется трем мнениям.

1. Дефиниционно-аксиоматическая основа греческой математики недавно была сравнена К. Фрицом с корнями логики Аристотеля. Мнение Фрица довольно правдоподобно, но проблема является слишком упрощенной. Точка зрения автора, равно как и его наблюдения правильны, но созданная с их помощью теория, имеющая расплывчатые контуры, слишком неуверена; да и сама проблема не поставлена с необходимой ясностью.

2. Другое мнение — теория двух венгерских математиков, Д. Алексича и И. Феньё — представляет собой очень остроумную комбинацию. Названные ученые стремились применить исторический материализм к возникновению математики и логики. Однако, данные, служившие основой для этой теории, — к сожалению — довольно шатки. Не соответствует фактам и предположение авторов, по которому дедуктивная математика у греков была создана потребностями практики. Несмотря на то, что автор статьи несогласен с мнением Алексича и Феньё, он все же пользуется выводами, почерпнутыми из изложений названных авторов.

3. Третье мнение было высказано швейцарским математиком Б. Л. в. д. Варденом. По смыслу этой теории греки дошли до создания дедуктивной математики, когда, ознакомившись с различными математическими взглядами египтян и вавилонян, им нужно было решить, который лучше из них. Хотя эта теория и пригодна к объяснению некоторых подробностей, но для решения всей проблемы недостаточна.

[82] Platon, Staat VII 525 D—526 A.

[83] Vgl. dazu A. Frenkians Worte (zitiert oben in Anmerkung 7). Es ist übrigens bekannt, dass die Griechen unter anderem auch darum die Lehre von den Proportionen so weit entwickelten, weil sie auf diesem Wege die Brüche aus der Mathematik eliminieren konnten.

В третьей главе составлены, сгруппированы и проанализированы старые и новые научно-исторические данные, на которые опирается мнение самого автора.

В четвертой главе имеется статистика о способах доказательства, употребляемых в самых древних тезисах греческой математики. Из этой статистики явствует, что в начальном периоде истории дедуктивной математики греки очень часто прибегали к непосредственным доказательствам — факт, который, кажется, ускользнул от внимания исследователей. Учитывая один из практических советов современной математической эвристики, относящийся к непосредственному доказательству (см. Waerden, Einfall und Überlegung in der Mathematik. Elemente der Mathematik VIII [1953] 123), автор статьи выдвигает вопрос, не является ли непосредственное доказательство самым древним способом доказательства в области дедуктивной математики? Сперва автор считается с этой возможностью только в виде трудовой гипотезы, а затем это предположение принимает вид утверждения. — Наконец, автор рассматривает вопрос о происхождении непосредственного доказательства. По мнению автора оно было внесено в греческую математику извне. Математика стала дедуктивной дисциплиной именно потому, что пифагорейцы, следовавшие по следам элеатов в некоторых отношениях, применили этот вид доказательства к бывшим дотоле только эмпирическими и практическими установлениями математики.