MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

1.

1966. szeptember

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

Számitástechnikai Központja

K Ö Z L E M É N Y E K

1.

Budapest, 1966.

szeptember

Szerkesztő:

Szelezsán János

Technikai szerkesztő:
Hartmann Katalin

Felelős kiadó:

dr. Frey Tamás igazgató

MTA Számitástechnikai Központ

Budapest, I., Uri u. 49.

TARTALOMJEGYZÉK

Ny.2139/1966

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

1966. szeptember 1.

Bizonyos egyszerü tipusu sztochasztikus folyamatok numerikus szimulálása és paramétereinek becslése.

Arató Mátyás - Pásztorné Varga Katalin

Bevezetés.

Jelen dolgozat célja egyszerü tipusu időben és állapotban folytonos sztochasztikus folyamatok szimulálási kérdéseinek vizsgálata (speciálisan Ural-2 tipusu számológépen), s egyben ezen folyamatok bizonyos statisztikai kiértékelésének elvégzése is.

A végzett számitásoknak kettős célja volt, elsősorban előállitani olyan sztochasztikus folyamatokat, melyek konkrét fizikai tanulmányozásához igen költséges kisérleteket kellett volna elvégezni, másodsorban meg kivánjuk vizsgálni, hogy a különböző "véletlen szám" előállitási módszerek mennyiben felelnek meg a statisztikai követelményeknek.

Végül szerettünk volna előzetes becslést kapni bizonyos aszimptotikusan érvényes összefüggések érvényességi határairól is, melyeket analitikus uton jóval nehezebb megkapni. Analitikus vizsgálatok, becslések konvergenciájának gyorsaságára vonatkozóan független megfigyeléssorozatok esetén ismertek, hasonló tipusu vizsgálatokat nem független megfigyeléssorozatok esetére a szerzők nem ismernek.

Jelen vizsgálataink kapcsolódnak a [6,] [7] dolgozatokban felvetett problémakörhöz, annak bizonyos értelemben kiegészitését jelentik.

1. §. Véletlen szám előállitási módszerekről.

Alapvető feladatként rendszerint egy $[0,1]$ -ben vagy $-1,1$ -ben egyenletes eloszlásu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozat előállitása szokott jelentkezni. A megvalósitás különféle módszerei ismeretesek (lásd pl. [2]), gyakorlatilag azonban az egyes gépekre néhány utasitásból álló generálási módszert (melynek lehetőleg nagy a periodusa) szoktak kidolgozni. Az Ural-2 gépre egy ilyen eljárás a következő (lásd [3])

k+1	02	k+10	4	az előző véletlen szám szummátorba küldése
k+2	11	0003	0	eltolás balra 3 bittel
k+3	14	k+11	0	az első 20 bit megváltoztatása
k+4	26	k+10	0	az utolsó 20 bit megváltoztatása
k+5	10	k+10	0	(0,1) intervallumra redukálás
k+6	16	k+10	4	a véletlen szám kiküldése a rekeszbe
k+7	00	0000	0	kimenet
k+10		a_1		az előző véletlen szám
k+11		a_2		

(-1,1) intervallumbeli véletlen számokat a k+5 utasitás elhagyásával nyerünk. A program a k+1 -edik rekesznél kezdődik (k+1 páratlan). Ennek az eljárásnak a "jóságát" - a függetlenség figyelembevételére - éppen az ismertetésre kerülő u.n.

széria-korrelációs együttható segitségével is vizsgálat tárgyává tettük.

Általában az ilymódon előállitott sorozatoktól "teljes" függetlenséget szokás megkövetelni, ennek az ellenőrzése a magasabbrendü széria-korrelációk kiszámolásával valósitható meg. Mint látni fogjuk, ebből a szempontból a fenti módszer független változósorozatot állit elő, s ez az eljárás jóságát mutatja.

Megjegyezzük, hogy hiányzik valamilyen formában annak a természetes ténynek a bizonyitása (matematikai megfogalmazása), hogy az ilyen, lényegében "keveréseken" alapuló eljárások bizonyos értelemben a legjobbak, legalább is a sorozat tagjainak függetlenségét illetően.

Független Gauss-eloszlásu változók sorozatának előállitása.

Nem állt szándékunkban a Gauss-eloszlásu változók előállitására a lehető legjobb módszert kiválasztani, igy megelégedtünk k-darab (esetünkben $k=10$) független $[-1,1]$ -ben egyenletes eloszlásu változó összegének megfelelő normálásával /(0,1) paraméterü Gauss változókat állitottunk elő/, mégpedig olymódon, hogy a fenti - egyenletes eloszlásra szóló - eljárást ciklusban 10 véletlen szám előállitására alkalmaztuk.

2. §. Speciális Gauss folyamatok imitálása.

A $\xi(t)$, $t \in T$ paramétertől függő valószinüségi változók összességét, ahol T lehet egy $[a, b]$ intervallum vagy a $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ értékek összessége, sztochasztikus folyamatnak nevezzük. Gauss vagy normális folyamatnak nevezzük $\xi(t)$ -t, ha tetszőleges véges n és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ paraméterértékekre a $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ változók többdimenziós Gauss (vagy normális) eloszlásuak. A $\xi(t)$ folyamatot stacionáriusnak nevezzük (tágabb értelemben), ha

$$M\,\xi(t) = m$$

és az

$$M(\xi(t)-m)\,(\xi(s)-m) = B(t,s)$$

kovariancia függvény csak $t-s$ -től függ, azaz $B(t,s) = B(t-s)$. Szükebb értelemben stacionáriusnak nevezzük a $\xi(t)$ folyamatot, ha $\{\xi(t_1+k), \ldots, \xi(t_n+k)\}$ és $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)\}$ eloszlása megegyezik, tetszőleges $t_1, \ldots, t_n$ és h esetén. Gauss folyamatoknál a két definició egybeesik, mivel Gauss folyamatot az

$$m(t) = M\,\xi(t)$$

középértékfüggvény és a $B(s,t)$ kovarianciafüggvény egyértelmüen meghatározza.

A hiradástechnikában gyakran jóval kényelmesebb egy Gauss folyamatot kovariancia függvénye helyett sprektrál eloszlásával (vagy spektrál sürüségfüggvényével) megadni.

Definició szerint:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-i\omega}\, d\tau$$

és

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\,\omega} \qquad \text{(ha létezik).}$$

(Az $F(\omega)$ = const. felelne meg az un. "fehér zaj" folyamat spektrál eloszlásának.)

Ha $f(\omega) = \frac{P(i\omega)^2}{Q(i\omega)^2}$ a $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat eleget

tesz a $Q(D)\,\xi(t) = P(D)E(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletnek (P és Q polinómok, Q fokszáma $(n>m)$ nagyobb mint P-é), ahol D a differenciális szimbóluma. Az $E(t)$ folyamat m-szer differenciálható négyzetes középben, és ekkor a fenti egyenletnek tekintjük az egyetlen stacionárius megoldását - mely létezik, ha $Q(i\omega)$ -nak nincs valós gyöke.

A továbbiakban azzal a kérdéssel kivánunk foglalkozni, hogy miképen szimulálhatóak a fenti folyamatok digitális számológépeken? Az első feladat a fenti egyenletnek differencia egyenletté való átirása megadott h lépésköz esetén. (Azaz a $\xi(o), \xi(h), \ldots$ folyamat előállitása differencia egyenlet segitségével.)

A legegyszerübb esetben, amikor $P(i\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$, $Q(i\omega) = \lambda^2+\omega^2$ ismeretes, hogy a

$$d\,\xi(t) = -\lambda\,\xi(t)dt + d\,\varepsilon(t)$$

(ahol $\varepsilon(t)$ a Wiener folyamat) sztochasztikus differenciaegyenletnek eleget tevő Gauss folyamat egyben Markov tipusu is. Ennek a folyamatnak az imitálása s egyben az ismeretlen λ paraméter becslése (ill. a különböző becslések vizsgálata) a jelen dolgozat alapvető célkitüzése, de egyben rá szeretnénk mutatni az általunk alkalmazott módszer kiterjesztési lehetőségeire is.

A $\xi(o), \xi(h), \ldots, \xi(k.h), \ldots$ folyamat ugyancsak Markov és stacionárius-Gauss tipusu, igy (lásd Doob [5]) eleget tesz a

$$\xi(n.h) - \alpha\,\xi((n-1)h) = \varepsilon(n.h)$$

differenciaegyenletnek, ahol $\alpha = e^{-\lambda .h}$. Az α (ill. λ) paraméter becslésének problémái megvizsgálhatóak, ha generáljuk az egymástól független $\varepsilon(n\,h)$ Gauss eloszlásu változókat s a kiindulási $\xi(0)$ változót. Ugyanis

$$\xi(1) = \alpha\xi(o) + \varepsilon(1), \quad \xi(2) = \alpha\,\xi(1) + \varepsilon(2), \ldots$$

$\lambda = 0{,}1$ és $h = 0{,}1$ esetén $\alpha \sim 0{,}99$, tehát gyakorlatilag bennünket elég sürü beosztásu időintervallum esetén α -nak 1-hez, közeli értékei érdekelnek (természetesen negativ értékekre is stacionárius marad a folyamat). Az ilyen tipusu vizsgálatokra térünk ki a következő pontban.

Hogy ilyen irányu kisérletekre már számológépek nélkül is gondoltak, azt mutatja Quenille [4] könyve.

3. §. Az elégséges statisztikák jelentősége és a becslések milyensége.

1. Ismeretes, hogy bizonyos értelemben a maximum likelihood becslések legjobbak, ehhez azonban szükség van a likelihood függvény felirására. Feltéve, hogy a $\xi(t)$ stacionárius Gauss-Markov folyamat $M\xi(t) = m$ várható értéke is ismeretlen a $\xi(o), \xi(1), \dots, \xi(n)$ változók együttes sürüségfüggvénye (lásd [6], [7])

$$f_{\xi(o),\dots,\xi(n)}(x_o,\dots,x_n) = (2\pi)^{-(n+1)}\sigma_\xi^{-(n+1)}(1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\alpha^2)}\left[(x_o-m)^2(1-\alpha^2)+\sum_1^n(x_i-x_{i-1}-m(1-\alpha))^2\right]}$$

alaku, ahonnan látható, hogy a

$$\tilde{m}_1 = \xi(o)+\xi(n),\quad \tilde{s}_1 = \xi^2(o)+\xi^2(n),\quad \tilde{m}_2 = \sum_o^n \xi(i)$$

$$\tilde{s}_2 = \sum_o^n \xi^2(i),\quad \tilde{s}_{12} = \sum_1^n \xi(i)\,\xi(i-1)$$

mennyiségek elégséges statisztikát alkotnak. Ez számitástechnikailag azt jelenti, hogy az m és α ismeretlen paraméterek szekvenciális becsléséhez a memóriában nincs szükség az egész folyamat, hanem csak ennek az 5 mennyiségnek egy-egy rekeszben történő tárolása (ez pedig amennyiben n értéke 100-as ill. 1000-es nagyságrendü) jelentős előnyt jelent.

A

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

maximum likelihood egyenletrendszer az $\hat{m}_2$ és $\hat{\alpha}_2$ becslésekre, a következő alaku lesz:

$$\hat{m}_2 = \frac{\hat{\alpha}_2 \tilde{m}_1 + (1-\hat{\alpha}_2) \tilde{m}_2}{2\hat{\alpha}_2 + n(1-\hat{\alpha}_2)}$$

$$\hat{\alpha}_2 = (1-\hat{\alpha}_2^2)\left\{\hat{\alpha}_2 \cdot \tilde{A} + \tilde{B}\right\}$$

ahol

$$\tilde{A} = \tilde{s}_1 - 2\hat{m}_2 \tilde{m}_1 - \tilde{s}_2 + 2\hat{m}_2 \tilde{s}_1 - (n-1)(\hat{m}_2)^2$$

$$\tilde{B} = \tilde{s}_{12} - 2\hat{m}_2 \tilde{m}_2 + \hat{m}_2 \tilde{m}_1 + n(\hat{m}_2)^2$$

A 2-es index használatát a maximum likelihood becslésekre az teszi indokolttá, hogy $\hat{m}_0$, $\hat{\alpha}_0$ jelöli az egyszerü számtani közép és széria korreláció alapján kapott becsléseket, azaz

$$\hat{m}_o = \frac{1}{n+1}\,\tilde{m}_1$$

$$\hat{\alpha}_o = \frac{\tilde{s}_{12} - 2n(\hat{m}_o)^2 + \hat{m}_o \cdot m_1}{\tilde{s}_2 - \xi_n^2 - 2\,n - (\hat{m}_o)^2 + 2\hat{m}_o \cdot \xi(n)}$$

Másrészt a $\xi(o) = x_o$ feltétel melletti feltételes sürüségfüggvényből adódó maximum likelihood becsléseket $\hat{m}_1$, $\hat{\alpha}_1$ jelöléssel

$$\hat{m}_1 = \frac{\xi(n) - \xi(1) + (1-\hat{\alpha}_1)\,\tilde{m}_2}{(n+1)\,(1-\hat{\alpha}_1)}$$

(vegyük észre, hogy $\hat{m}_1$, $\hat{\alpha}_1$ és $\hat{m}_o$, $\hat{\alpha}_o$ becsléseiben különkülön is szükség van a $\xi(o)$, $\xi(n)$ és $\xi^2(o)$, $\xi^2(n)$ értékekre).

2. A kapott becslések értékelése.

Az első megjegyzés a becslésekre vonatkozóan az, hogy $\alpha < 1/2$ értékek esetén $n \geq 100$-tól a három becslésének viselkedése nem mutat lényeges eltérést, m jól becsülhető, amennyiben abszolut értékben kicsi, viszont m nagy értékei esetén $\hat{\alpha}_o$ becslés nem megfelelő.

1-hez közeli α értékekre $\hat{m}_o$ csak igen nagy n mértékek esetén lesz jó becslés, viszont $\hat{\alpha}_o$ teljesen rossz becslés.

Az $\hat{m}_1, \hat{\alpha}_1$ becslések – amint az várható is – viselkedése hasonló az $\hat{m}_2, \hat{\alpha}_2$ becslések viselkedéséhez.

Az $\hat{\alpha}_2$ becslések mindig jók s a jó közelités $m(1-\hat{\alpha}_2^2) \sim$ $\sim c$-nél (ahol $c \sim 10$) kezdődik (ez elméletileg is várható a c konstansra azonban előzetes becslés nem volt ismeretes). Ugyanilyen határtól kezdve lesznek jók az m_2 becslések is. Lényeges tulajdonsága $\hat{\alpha}_2$-nek, hogy nem lesz 1 tehát inkább – még α nagy értékeire is – alulról ad becslést.

Ismert m esetén α-becslése egyszerűbb feladat (a megfelelő képleteket nem irjuk ki) mindössze az eredmények értékelésére szoritkozunk.

Ismert m(+o) esetén az ismeretlen α-paraméterre a

$$\alpha_o^* = \frac{\sum_1^n \xi(i)\xi(i-1)}{\sum_o^{n-1} \xi^2(i)}, \quad \alpha_1^* = \frac{\sum_2^n \xi(i)\xi(i-2)}{\sum_1^{n-1} \xi(i)\xi(i-1)},$$

$$\alpha_2^* = \frac{\sum_3^n \xi(i)\,\xi(i-3)}{\sum_2^{n-1} \xi(i)\,\xi(i-2)}$$

becsléseket használva szemléltetés céljából bemutatunk n=5-től n=20-ig becsléseket, különböző α értékekre (lásd az 1-es mellékletet).

(Az adatok 8-as számrendszerben szerepelnek.)

A bemutatott becslések illusztrálják azt a megállapitást, hogy α_1^* és α_2^* figyelembevétele a becslések jóságán semmit sem javit. Ugyancsak látható, hogy α -tól függően változik a becslés jósága: kis n értékekre 10-es nagyságrendü "megfigyelés szám" esetén α-nak 1-hez (vagy-1-hez) közeli értékei egyáltalán nem becsülhetőek megbizhatóan. Erről tanuskodik a szekvenciálisan végzett becsléssorozat, mely módszer egyrészt meggyőzően bizonyitja a becslések ingadozását, de ezen tulmenően módszert szolgáltat a szükséges megbizható megfigyelésszám keresésre is, ezt a módszert a későbbiekben ki kivánjuk részleteiben is dolgozni. α kis értékeire a becslések megbizhatósága közel áll a független esethez.

Az (m,α) ismeretlen paraméterek becslésére a következő eredményeket kaptuk (lásd 2-es sz. melléklet).

A bemutatott példák egyszerü áttekintése felvilágositást nyujt a becslések milyenségének változásáról. Ebben az irányban kivánunk a későbbiekben a megfigyelések értékelési módszereivel - bonyolultabb rendszerek esetén is - foglalkozni. Az általunk használt eljárás ALGOL-ban megirt programját ismertetjük még az alábbiakban.

Idézett irodalom:

[1] J.N. Franklin: Numerical Simulation of Stationary and Nonstationali Gaussian Random Processes. SIAM Rev. 7 (1965) No 1. 68-80.

[2] D.I. Golenko: Modelirovanije i statisticeskij analiz prevdoslu caizüh cisel na E.V.M. Nauka (1965).

[3] A.Ju.Birkgan, G.P. Voskpesenskij: Programmirovanije dlja C.V.M. URAL-2 Sovjetskoje Radio (1962)

[4] M.H. Quenouille: The analysis of multiple time series, London, 1957.

[5] J.L. Doob: The elementary Gaussian processes, Ann. Math. Stat. 15. (1944) 229-281.

[6] Arató M.: Folytonos állapotu Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról I. MTA III. Oszt. Közleményei (1964) 13-34.

[7] Arató M.: -"- IV. u.o. (1965) 107-124.

```
procedure (a,m,b,r,v)' value a,m,r' real a,m' integer r'
  real array b' procedure v'
comment v(z,n) eljaaraas n db. a (-1,1)-ben egyenletes eloszlaasu
  veeletlen szaamot generaal a z vektorban;
  az a,m parameetereket becsli haarom moodszerrel.
  stacionaarius aallapot eleereese ceeljaabool eloebb 100, a
  becsleeshez fel nem hasznaalt vaaltozoo eerteeket aallitunk
  eloe, majd a becslees 100-ankeent folyamatosan toerteenik r-ig'
begin real u' real array x[1:10], v, s[1:3], y[1,2]'
  integer i,k,l,t' y[2]:=0'
for i:=-1,0,i while i_r do begin for l:=1 step 1 until 100 do
begin v(x,10)' u:=0' for k:=1 step 1 until 10 do u:=u+x[k]'
y[1]:=y[2]' y[2]:=u□sqrt (0.3)' if i=-1 then go to c'
y[2]:=a□y[1]+m□(1-a)+y[2]' if i=0 then begin i:=i+1'
s[1]:=s[1]+y[2]' v[3]:=y[2]□2' s[2]:=s[2]+v[3]' s[3]:=s[3]+y[1]□y[2]
end
end if i=0 then begin i:=i+1' v[1]:=s[1]:=y[2]' v[2]:=s[2]:=y[2]□2'
s[3]:=0' go to c end'
begin real array m,a[1:3]' real no, am1, am2'
comment az alaabbi haarom becslees eredmeenye az a,m[1:3]-ban lesz'
m[1]:=s[1]i'
a[1]:=(s[3]-2□(i-1)□m[1]□2+m[1]□(v[1]+y[2]))/(s[2]-v[3]-2□(i-1)
-m[1]□2+2□m[1]□y[2])'
a[2]:=a[1]'
for k:=1 step 1 until 10 do begin m[2]:=(y[2]-v[1]+(1-a[2])□s[1])
/((i-1)□(1-a[2]))'
a[2]:=(s[3]-2□m[2]□s[1]+(1-1)m[2]□2+m[2]□(v[1]+y[2]))/
(s[2]-v[3]-2□m[2]□s[1]+2□m[2]□y[2]+(i-1)m[2]□2) end
a[3]:=am1:=0' am2:=1'
for k:=1 step 1 until 15 do begin
m[3]:=(a[3]□(v[1]+y[2])+(1-a[3])□s[1]/(2□a[3]+i(1-a[3]))'
for
```

```
no:=a(3)-(1-a(2)□2)□a(3)□(v(2)+v(3)-2□m(3)□(v(1)+y(2))-s(2)+2□m(3)□
s(1)-(i-2)□m(3)□2)+s(3)-2□m(3)□s(1)+m(3)□(v(1)+y(2))+(1-1)□m(3)□2
while no_2□-20 do begin if no 0 then begin aml:=a(3)'
a: a(3):=(aml+am2)/2 end else if a(3)=0 then begin
a(3):=-1' go to   end' comment nincs gyoek'
else begin am2:=a(3)' goto a end end end'
 : b(i,1):-i' b(i,2):=m(1)' b(i,3):=a(1)' b(i,4):=m(2)'
b(i,5):=a(2)'
b(i,6):=m(3)' b(i,7):=a(3) end'
c: end end'
0
```

1.sz. kiegészités

$\alpha = -0,35$

n	α_2^*	α_1^*	α_0^*
5	0,457(4)	-0,563(-3)	-0,611(-1)
6	0,701(4)	-0,66(-1)	-0,65(-1)
7	0,50(2)	-0,50(-1)	-0,57(-1)
8	0,54(2)	-0,67(-1)	-0,54(-1)
9	0,77(1)	-0,62(-1)	-0,56(-1)
10	0,54(2)	-0,44	-0,70(-1)
11	0,45(1)	-0,62	-0,55
12	0,53	-0,60(-1)	-0,70(-1)
13	0,63(1)	0,65(-2)	-0,70(-1)
14	-0,71(2)	0,65(-2)	-0,64(-1)
15	-0,71(2)	-0,53(-2)	-0,70(-1)
16	0,65(2)	-0,56(-2)	-0,66(-1)
17	0,51(2)	-0,53(-1)	-0,71(-1)
18	0,46(1)	-0,51(-1)	-0,67(-1)
19	0,42(1)	-0,57(-1)	-0,67(-1)
20	0,54(1)	-0,53(-1)	-0,65(-1)
1000	-0,40	-0,63(-1)	-0,67(-1)

$\alpha = -0,3$

5	0,70(-1)	-0,77(-4)	-0,66(-1)
6	0,53(4)	-0,74(-4)	-0,56(-1)
7	0,56(4)	-0,60(-5)	-0,54(-1)
8	0,47(5)	-0,73(-5)	-0,54(-1)
9	0,54(5)	-0,51(-4)	-0,54(-1)
10	0,77(4)	-0,67(-5)	-0,70(-1)
11	0,61(5)	-0,65(+1)	-0,43
12	-0,54(-3)	-0,52(0)	-0,52
13	-0,48(-3)	-0,75(-1)	-0,43

14	0,47(-2)	-0,53(-1)	-0,42
15	-0,57	-0,56(-1)	-0,73(-1)
16	-0,54	-0,63(-1)	-0,64(-1)
17	-0,56	-0,57(-1)	-0,64(-1)
18	-0,43	-0,57(-1)	-0,64(-1)
19	-0,43	-0,56(-1)	-0,63(-1)
20	-0,45	-0,60(-1)	-0,63(-1)
1000	-0,52(-2)	-0,46(-1)	-0,63(-1)

$\alpha = +0,777$

5	-0,41	0,64(-1)	0,46
6	-0,77	0,40	0,52
7	-0,63(-1)	0,45	0,54
8	0,63(-4)	0,51	0,55
9	0,60(-1)	0,57	0,61
10	0,52	0,66	0,67
11	0,46	0,58	0,60
12	0,46	0,56	0,60
13	0,44(1)	0,70	0,64
14	0,42(1)	0,68	0,64
15	0,43(1)	0,42(1)	0,74
16	0,41(1)	0,41(1)	0,74
17	0,41(1)	0,41(1)	0,75
18	0,43(1)	0,42(1)	0,40(1)
19	0,45(1)	0,44(1)	0,42(1)
20	0,46(1)	0,45(1)	0,44(1)
1000	0,77717	0,77712	0,77705

$\alpha = -0,77$

5	0,42(3)	-0,57	-0,57(-2)
6	0,60	-0,54(1)	-0,65(-2)
7	-0,47(1)	-0,58(1)	-0,51(-1)
8	-0,43(1)	-0,44(1)	-0,61(-1)
9	-0,44(1)	-0,46(1)	-0,72(-1)
10	-0,64	-0,77	-0,67(-1)
11	-0,47	-0,57	-0,64(-1)
12	-0,53	-0,60	-0,63(-1)
13	-0,41	-0,43(1)	-0,71(-1)
14	-0,48	-0,42(1)	-0,43
15	-0,53	-0,45(1)	-0,52
16	-0,75(-1)	-0,70	-0,45
17	-0,41	-0,71	-0,45
18	-0,71(-1)	-0,68	-0,44
19	-0,57(-1)	-0,63	-0,45
20	-0,41(-1)	-0,64	-0,55
1000	-0,770	-0,771	-0,770

(zárójelben 2 hatványa szerepel)

2. sz. kiegészités

$m = o \qquad \alpha = 0,25$

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
u = 100	0,033	0,033	0,033	0,186	0,195	0,176
u = 200	-0,0002	-0,0004	-0,0006	0,184	0,184	0,174
u = 300	-0,0172	-0,0189	-0,0187	0,191	0,195	0,187
u = 500	0,0108	0,0100	0,0107	0,276	0,276	0,271
u = 1000	-0,0040	-0,0044	-0,0040	0,271	0,271	0,271
u = 3000	0,0033	0,0031	0,0033	0,245	0,245	0,244

$m = o \qquad \alpha = 0,5$

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
u = 100	-0,0302	-0,0267	-0,0308	0,572	0,574	0,525
u = 200	-0,0363	-0,0369	-0,0374	0,487	0,493	0,469
u = 300	-0,0160	-0,0145	-0,0161	0,511	0,512	0,496
u = 500	-0,0070	-0,0062	-0,0071	0,498	0,498	0,489
u = 1000	-0,0128	-0,0124	-0,0129	-0,525	0,526	0,521
u = 3000	-0,0199	-0,0196	-0,0198	0,526	0,528	0,528

$m = o \qquad = 0,998$

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
u = 100	2,123	2,232	2,092	1,01	0,875	0,875
u = 200	2,776	2,966	2,733	1,008	0,936	0,936
u = 300	3,264	3,471	3,189	1,006	0,955	0,955
u = 500	2,936	2,904	2,738	1,006	0,966	0,966
u = 1000	2,362	2,330	2,230	1,016	0,982	0,982
u = 3000	1,214	1,236	1,243	0,992	0,993	0,993
u = 5000	3,495	3,390	3,134	0,990	0,997	0,997
u = 10000	0,139	-0,101	0,109	0,998	0,998	0,998

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
n = 100	-2,61	-4,74	-2,38	1,006	1,00	0,926
n = 200	-3,00	-3,50	-3,05	1,005	0,977	0,951
n = 300	-4,60	-3,81	-5,69	0,996	0,999	0,989
n = 500	-6,89		-6,45	1,000	1,000	0,991
n = 1000	-9,28	-9,28	-7,26	1,000	0,998	0,995
n = 3000	-0,16	1,48	-0,16	0,999	0,999	0,998
n = 5000	-2,88	-4,67	-3,45	0,999	0,999	0,998

$m = 10$ $\alpha = 0,125$

	m_1	m_2	m_3	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
n = 100	10,06	10,15	10,05	1,00	0,309	0,256
n = 200	9,99	10,05	9,99	1,00	0,276	0,248
n = 300	10,00	10,04	10,00	1,000	0,205	0,191
n = 500	9,98	9,99	9,98	1,00	0,167	0,161
n = 1000	9,97	9,98	9,97	1,00	0,092	0,090
n = 3000	10,	10,	10,	0,10	0,114	0,114

$m = 10$ $\alpha = 0,25$

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
100	9,89	9,98	9,89	1,00	0,129	0,703
200	9,96	10,0	9,96	1,00	0,224	0,198
500	9,97	9,99	9,97	1,00	0,233	0,227
1000	9,98	9,99	9,98	1,	0,264	0,261
3000	10,00	10,00	10,00	1,00	0,232	0,231

m = 10; $\alpha = 0,5$

n	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
100	9,99	10,09	9,98	1,00	0,496	0,415
200	10,01	10,07	10,02	1,00	0,503	0,472
300	10,00	10,04	10,00	1,00	0,497	0,479
500	9,99	10,00	9,99	1,00	0,507	0,497
1000	9,99	10,00	9,99	1,00	0,518	0,513
3000	9,98	9,98	9,98	1,00	0,525	0,524
5000	9,98	9,98	9,98	1,00	0,520	0,519

m = 10; $\alpha = 0,875$

100	10,17		10,19	1,00	1,00	0,806
200	10,04	10,12	10,05	1,0	0,872	0,806
300	10,06	10,10	10,06	1,00	0,858	0,836
500	10,04	10,07	10,05	1,00	0,864	0,849
1000	9,96	9,98	9,96	1,00	0,880	0,841
3000	9,98	9,99	9,98	1,00	0,880	0,878
5000	10,03	10,03	10,02	1,00	0,869	0,868

m = 10; $\alpha = 0,998$

100	7,60	-7,79	7,73	1,00	1,00	0,970
200	8,74	-5,30	8,61	1,00	1,00	0,975
300	8,59	-11,13	8,25	1,00	1,00	0,972
500	8,63	-9,05	8,25	1,00	1,00	0,971
1000	8,52	-4,88	8,86	1,00	1,00	0,989
3000	6,83	8,12	7,17	1,00	0,998	0,996
5000	9,44	9,54	8,98	1,00	0,998	0,997
10000	9,90	10,99	10,14	1,00	0,999	0,998

m =-10; α= 0,998

100	-3,94	-3,96	-3,93	1,00	0,854	0,798
200	-4,41		-4,52	1,00	1,00	0,933
300	-4,51	-4,59	-4,50	1,00	0,948	0,927
500	-5,25	-5,48	-5,27	1,00	0,972	0,959
1000	-8,65	10,80	-8,50	1,00	1,00	0,994
2000	-10,17	-10,33	-10,18	1,00	0,980	0,977
12000	-10,09	-10,10	-10,07	1,00	0,985	0,985
17000	-9,44	-9,89	-9,51	1,00	0,998	0,998

m = 10; α= 0,9994

100	3,27	-15,85	3,67	1,00	1,00	0,9766
200	4,92	-4,86	4,55	1,00	1,00	0,9806
300	5,31	5,84	5,45	1,00	0,9888	0,9813
500	4,26	11,00	3,24	1,00	1,00	0,9871
1000	3,46	3,43	3,20	1,00	0,9912	0,9856
2000	8,05	7,88	5,87	1,00	0,9978	0,99596
5000	9,23	8,64	7,70	1,00	0,99889	0,99795
10000	-0,893	-4,68	-1,79	0,99965	0,99965	0,99918
12000	-2,01	-5,66	-2,76	0,99963	0,99965	0,99922

Summary

Numerical simulation of some stochastic processes of simple type and the estimation of its parameters

The aim of the present paper is the examination of the simulation problems (especially on the computer Ural-2) of some stochastic processes of simple type and at the same time the statistical analysis of these processes.

The computations had double aim: to produce stochastic processes imitativy physical processes the direct examination of which is too expensive; on the othern hand we wished to examine, how the different methods to produce pseudo-random numbers meet the statistical requirements.

At last we wished to get estimates of the validity bounds ot some asymptotic relations too hard to examine analytically. Analytical examinations for the speed of the convergence of estimates in the case of a series of indepent observations are well-known but similar examinations for the case of dependent observations are not known to the authors.

Present examinations are related to the problems, raised in papers [6], [7] and are in some sens their complements.