Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 5 (1970) 17—27.

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ МЕР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

M. ARATÓ

Целью настоящей работы является определение точных формул плотности мер многомерного гауссовского стационарного марковского процесса (называемого элементарным процессом) относительно соответствующей винеровской меры. При изучении литературы оказывается, что в разных местах даются то ошибочные, то совсем неудобные для практических целей формулы, или определяются условные, при данном начальном условии, плотности (см. [4]—[7], [9]—[11]).

Хотелось бы подчеркнуть полезность формулы Дуба [3] (см. ниже лемму 1), с помощью которой во многих случаях в явном виде дается начальное распределение случайных величин.

В работе рассматриваются производные относительно стандартной винеровской меры, имеющие самостоятельный интерес, особенно в математической статистике. В разных примерах изучаются всевозможные варианты плотностей, важные для практических целей. Для полноты доказательства приводится сжатое доказательство Прохорова [8] для многомерного случая, хотя здесь рассматривается более элементарный случай постоянного переноса. Надо заметить, что абсолютная непрерывность рассматриваемых мер подробно доказывается в литературе (см. цитированную литературу).

Так как нас будет интересовать только случай процесса с непрерывными траекториями, то в дальнейшем всегда предполагается, что $C_k[0, T]$ обозначает пространство всех непрерывных на $[0, T]$ функций $\mathbf{x}^*(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t))$ со значениями в k-мерном эвклидовом пространстве R_k. Через $\mathcal{A}$ обозначаем σ-алгебру борелевских подмножеств $C_k[0, T]$, порожденную множествами вида $\{\mathbf{x}(s),\ 0 \leqq s \leqq T : \mathbf{x}(t) \in B\}$, $t \in [0, T]$, где B борелевское множество в R_k. Вероятностная мера P $(\mathsf{P}(C_k) = 1)$ определена на $\mathcal{A}$.

1. Рассматриваем многомерный стационарный марковский гауссовский процесс $\boldsymbol{\xi}^*(t) = (\xi_0(t), \ldots, \xi_{k-1}(t))$ (где $*$ обозначает сопряженную матрицу), так называемый элементарный гауссовский процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\boldsymbol{\xi}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)\,dt + d\mathbf{w}(t), \tag{1}$$

где характеристические числа матрицы A, т. е. решения λ_i уравнения $|A - \lambda E| = 0$, имеют отрицательные вещественные части $Re\,\lambda_i < 0$. Винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$ является в общем случае $l (l \leqq k)$ мерным с параметрами $\mathsf{M}d\mathbf{w}(t) = 0$, $\mathsf{M}d\mathbf{w}(t)\,d\mathbf{w}^*(t) = B_w \cdot dt$, где B_w положительно определенная матрица. В случае $l < k$ процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ состоит из k-мерного вектора $\boldsymbol{\xi}(0) \in R_k$ с начальным распределением, заданным с плотностью $f_A(\mathbf{x}_0^*)$ (см., ниже), и из процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ $(0<t\leqq T)$ в l-мерном пространстве непрерывных функций C_l. Простоты ради предположим, что в этом случае (1) имеет вид

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt}=\xi_1(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt}=\xi_2(t),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\xi_{k-l-1}(t)}{dt}=\xi_{k-l}(t),$$

$$d\xi_{k-l}(t)=\big(a_{k-l,k-1}\,\xi_{k-1}(t)+\ldots+a_{k-l,0}\,\xi_0(t)\big)dt+dw_{k-l}(t), \tag{1'}$$

$$d\xi_{k-l+1}(t)=\big(a_{k-l+1,k-1}\,\xi_{k-1}(t)+\ldots+a_{k-l+1,0}\,\xi_0(t)\big)dt+dw_{k-l+1}(t),$$

$$\vdots$$

$$d\xi_{k-1}(t)=\big(a_{k-1,k-1}\,\xi_{k-1}(t)+\ldots+a_{k-1,0}\,\xi_0(t)\big)dt+dw_{k-1}(t),$$

и пусть $C=B_w^{-1}\tilde{A}$, где $\tilde{A}=\{a_{ij}\}$, $(i=k-l,\,k-l+1,\,\ldots,\,k-1;\ j=0,1,\ldots,k-1)$. В этом случае $C_l[0,T]$ состоит из l-мерных непрерывных функций $\big(x_{k-l}(t),\ldots,x_{k-1}(t)\big)$. Если W_0^l обозначает условную меру (при условии $\mathbf{w}(0)=\mathbf{0}$) винера в пространстве $C_l[0,T]$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ является элементарным гауссовским, удовлетворяющим уравнению (1′), и P_A обозначает меру, соответствующую этому процессу в пространстве $C_l[0,T]$, то (при $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$)*

$$\frac{d\mathsf{P}_A}{dW_0^l}\big(\mathbf{x}(t)\big)=\exp\left\{\int_0^T(C\mathbf{x}(s),d\mathbf{x}(s))-\frac{1}{2}\int_0^T(\tilde{A}\mathbf{x}(s),C\mathbf{x}(s))ds\right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^*(t)=\big(x_0(t),\ldots,x_{k-1}(t)\big)\in C_l[0,T]$ и $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть L^k — мера Лебега в k-мерном пространстве и $L^k\times W_{\mathbf{x}}^l$ — произведение мер в пространстве $R_k\times C_l[0,T]$, где $W_{\mathbf{x}}^l$ условная мера винера при условии $\mathbf{x}^*(0)=\mathbf{x}=\big(x_0(0),\,x_1(0),\ldots,x_{k-1}(0)\big)$. Если $f_A(\mathbf{x})$ обозначает плотность вероятности случайного вектора $\boldsymbol{\xi}^*(0)=\big(\xi_0(0),\ldots,\xi_{k-1}(0)\big)$, то имеем следующее важное следствие.

Следствие 1. При условии теоремы 1

$$\frac{d\mathsf{P}_A}{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}\big(\mathbf{x}(t)\big)=f_A(\mathbf{x}^*(0))\exp\left\{\int_0^T(C\mathbf{x}(s),d\mathbf{x}(s))-\frac{1}{2}\int_0^T(\tilde{A}\mathbf{x}(s),C\mathbf{x}(s))ds\right\}. \tag{3}$$

Следствие 2. Если рассматриваются меры P_{A_1} и P_{A_2} с разными матрицами A_1 и A_2 в (1), но с тем же винеровским процессом $\mathbf{w}(t)$, то

$$\frac{d\mathsf{P}_{A_1}}{d\mathsf{P}_{A_2}}\big(\mathbf{x}(t)\big)=\frac{d\mathsf{P}_{A_1}}{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}\big(\mathbf{x}(t)\big)\frac{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}{d\mathsf{P}_{A_2}}\big(\mathbf{x}(t)\big)=\frac{f_{A_1}(\mathbf{x}^*(0))}{f_{A_2}(\mathbf{x}^*(0))}\cdot \tag{3. a}$$

$$\cdot\exp\left\{\int_0^T[(C_1-C_2)\mathbf{x}(s),d\mathbf{x}(s)]-\frac{1}{2}\int_0^T[(\tilde{A}_1\mathbf{x}(s),C_1\mathbf{x}(s))-(A_2\mathbf{x}(s),C_2\mathbf{x}(s)]ds\right\}.$$

Матрица ковариации процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ имеет вид

$$\mathsf{M}\boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}^*(s)=e^{A|t-s|}B, \tag{4}$$

где для матрицы B имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Матрица B удовлетворяет матричному уравнению*

$$AB+BA^*=-\tilde{B}_w, \tag{5}$$

где $\tilde{B}_w$ является $k\times k$ матрицей вида $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_w\end{pmatrix}$.

Доказательство леммы легко получить из уравнения, (1) умножая его на $\boldsymbol{\xi}^*(t)$, а потом умножая транспонированное уравнение на $\boldsymbol{\xi}(t+dt)$ и в обоих случаях беря математическое ожидание.

Замечание 1. Если A имеет вид (и в то же время $\tilde{B}_w$)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{k-1}\end{pmatrix},\quad \tilde{B}_w=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \sigma^2\end{pmatrix}, \tag{6}$$

т. е. одномерный процесс $\xi(t)$ дифференцируем $k-1$ раз и удовлетворяет уравнению

$$d\xi^{(k-1)}(t)+\big(a_0\,\xi(t)+a_1\,\xi'(t)+\ldots+a_{k-1}\,\xi^{(k-1)}(t)\big)dt=dw(t), \tag{7}$$

где $\mathsf{M}(dw)^2=\sigma^2\cdot dt$, то легко показать, что

$$B^{-1}=\frac{2}{\sigma^2}\begin{pmatrix}a_0\,a_1 & 0 & a_0\,a_3 & 0 & \ldots\\ 0 & a_1a_2-a_0\,a_3 & 0 & & \ldots\\ \vdots & & & & \end{pmatrix},\quad B^{-1}=\{b_{ij}^{-1}\}, \tag{8}$$

$$b_{ij}^{-1}=\frac{2}{\sigma^2}\cdot\begin{cases}0, & \text{при } i\equiv j+1 \pmod 2,\\ \sum\limits_{l=0}(-1)^l a_{i-l}\,a_{j+1+l}, & \text{при } i\equiv j \pmod 2,\ (i=0,1,\ldots,k-1),\end{cases}$$

где $i<j$, $a_i=0$ (при $i<0$ или $i>k$), $a_k=1$, и $b_{ij}^{-1}=b_{ji}^{-1}$.

2. Перед доказательством основной теоремы рассматриваем важные примеры, вытекающие из теоремы 1 и ее следствия 1.

Пример 1. Для стационарного гауссовского процесса, удовлетворяющего уравнению (7), с постоянными коэффициентами получается

$$\frac{dP_A}{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}(\mathbf{x}(t)) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|B|^{-\frac{1}{2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=0}^{k-1}\Bigg(\sum_{l=-i}^{i}(-1)^l a_{i-l}a_{i+l}\Bigg)\cdot$$

$$(9)\qquad \cdot\int_0^T\cdot[x^{(i)}(t)]^2\,dt+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}\Bigg(\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}\Bigg)\cdot$$

$$\cdot\big[x^{(i)}(T)x^{(j)}(T)+(-1)^{j-i}x^{(i)}(0)x^{(j)}(0)\big]+\frac{a_{k-1}a_k}{2}T\Bigg\},$$

где матрица B^{-1} имеет вид (8), где $c_{ij}=\sum_l(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}$, при $i>j$ и $c_{ij}=c_{ji}$.

Доказательство формулы (9). По формуле (3) имеем

$$\frac{dP_A}{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}(\mathbf{x}(t)) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|B|^{-\frac{1}{2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}{}'\Bigg(\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}\Bigg)\cdot$$

$$\cdot x^{(i)}(0)x^{(j)}(0)+\frac{1}{\sigma^2}\int_0^T\sum_{i=0}^{k-1}a_i x^{(i)}(t)\,dx^{(k-1)}(t)-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T\sum_{i,j=0}^{k-1}a_i a_j x^{(i)}(t)x^{(j)}(t)\,dt\Bigg\},$$

где в первой сумме $'$ обозначает, что сумма распространяется на те j, при которых $i\equiv j\ (\mathrm{mod}\ 2)$. Используя известные соотношения

$$\int_0^T x^{(k-1)}(t)\,dx^{(k-1)}(t)=\frac{1}{2}\big[(x^{(k-1)}(T))^2-(x^{(k-1)}(0))^2-\sigma^2\cdot T\big],$$

$$\int_0^T x^{(i)}(t)\,dx^{(k-1)}(t)=x^{(i)}(t)x^{(k-1)}(t)\Big|_0^T-\int_0^T x^{(i+1)}(t)x^{(k-1)}(t)\,dt,\quad i<k-1,$$

и

$$(10)\qquad \int_0^T x^{(i)}(t)x^{(i+l)}(t)\,dt=[x^{(i)}(t)x^{(i+l-1)}(t)]_0^T-[x^{(i+1)}(t)x^{(i+l-2)}(t)]_0^T\pm\ldots+\eta_l,$$

где

$$\eta_l=\begin{cases}(-1)^{\frac{l}{2}}\displaystyle\int_0^T\Big[x^{\left(i+\frac{l}{2}\right)}(t)\Big]^2dt, & \text{при четном } l,\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2}\Big[x^{\left(i+\frac{l-1}{2}\right)}\Big]_0^T, & \text{при нечетном } l.\end{cases}$$

Таким образом, мы получаем для плотности

$$\frac{dP_A}{d(L^k\times W_{\mathbf{x}}^l)}(\mathbf{x}(t)) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|B|^{-\frac{1}{2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}{}'\Bigg(\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}\Bigg)\cdot$$

$$\cdot x^{(i)}(0)x^{(j)}(0)-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{k-1}a_i[x^{(i)}(t)x^{(k-1)}(t)]_0^T-\frac{1}{2\sigma^2}[(x^{k-1})^2]_0^T+$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{k-1}a_i\sum_{l=0}{}''(-1)^l[x^{(i+1+l)}(t)x^{(k-2-l)}]_0^T+\frac{a_k a_{k-1}}{2}T+$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=0}^{k-1}a_i^2\int_0^T[x^{(i)}(t)]^2\,dt-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}a_i a_{i+j}\sum_{l=0}^{j/2}{}''(-1)^l[x^{(i+l)}(t)x^{(i+j-l-1)}(t)]_0^T\Bigg\},$$

где $''$ (при суммировании) обозначает, что последний член имеется в виду в той форме, как это указано в формуле (10), т. е. имеет вид $\int_0^T(x^{(i+j/2)}(t))^2dt$ при четном j.

Поменяв порядок суммирования и используя, что $a_k=1$ приходим к формуле (9), так как

$$\sum_{i=0}^{k-1}a_i[x^{(i)}(t)x^{(k-1)}(t)]_0^T+\sum_{i=0}^{k-1}a_i\sum_{l=0}{}''(-1)^l[x^{(i+1+l)}(t)x^{(k-2-l)}(t)]_0^T+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}a_i a_{i+j}\sum_{l=0}{}''(-1)^l[x^{(i+l)}(t)x^{(i+j-l-1)}(t)]_0^T=$$

$$=\sum_{i=0}^{k-2}a_i a_k[x^{(i)}(t)x^{(k-1)}(t)]_0^T+\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{k-2}\sum_l(-1)^l a_{i-l-1}a_k[x^{(i)}(t)x^{(j)}(t)]_0^T+$$

$$+\frac{1}{2}[(x^{(k-1)})^2]_0^T+\sum_{\substack{i=0\\ j>i}}^{k-2}\sum_{l=0}^{\min(i,k-1-(j+1))}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}[x^{(i)}(t)x^{(j)}(t)]_0^T+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\substack{l=-i\\ l\neq 0}}^{i}(-1)^l a_{i-l}a_{i+l}\int_0^T[x^{(i)}(t)]^2\,dt=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{k-1}\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}[x^{(i)}(t)x^{(j)}(t)]_0^T-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\Bigg(\sum_{\substack{l=-i\\ l\neq 0}}^{i}(-1)^l a_{i-l}a_{i+l}\Bigg)\int_0^T[x^{(i)}(t)]^2\,dt.$$

При $k=1$ получается известная формула (см. Прохоров [8], STRIEBEL [11], $a_0=\lambda>0$)

$$\frac{dP_\lambda}{d(L^1\times W_x^1)}(x(t))=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\Bigg\{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\int_0^T x^2(t)\,dt-\frac{\lambda}{2\sigma^2}[x^2(T)+x^2(0)]+\frac{\lambda T}{2}\Bigg\}.$$

При $k=2$ получаем

$$\frac{d\mathrm{P}_A}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^1)}(\mathbf{x}(t)) = \frac{a_1\sqrt{a_0}}{\pi\sigma^2}\exp\Big\{-\frac{a_0^2}{2\sigma^2}\int_0^T x^2(t)\,dt - \frac{a_1^2-2a_0}{2\sigma^2}\int_0^T [x^{(1)}(t)]^2\,dt +$$

$$+\frac{a_1T}{2} - \frac{a_0a_1}{2\sigma^2}[x^2(T)+x^2(0)] - \frac{a_1}{2\sigma^2}\big[(x^{(1)}(T))^2+(x^{(1)}(0))^2\big] -$$

$$-\frac{a_0}{\sigma^2}[x(T)x^{(1)}(T)-x(0)x^{(1)}(0)]\Big\}.$$

При $k=3$ получаем

$$\frac{d\mathrm{P}_A}{d(L^3\times W_{\mathbf{x}}^1)}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\sqrt{a_0}(a_2a_1-a_0)}{(\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{a_0^2}{2\sigma^2}\int_0^T x^2(t)\,dt - \frac{a_1^2-2a_0a_2}{2\sigma^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^T [x^{(1)}(t)]^2\,dt - \frac{a_2^2-2a_1}{2\sigma^2}\int_0^T [x^{(2)}(t)]^2\,dt + \frac{a_2T}{2} - \frac{a_0a_1}{2\sigma^2}[x^2(T)+x^2(0)] -$$

$$-\frac{a_1a_2-a_0}{2\sigma^2}\big[(x^{(1)}(T))^2+(x^{(1)}(0))^2\big] - \frac{a_2}{2\sigma^2}\big[(x^{(2)}(T))^2+(x^{(2)}(0))^2\big] - \frac{a_0a_2}{\sigma^2}\cdot$$

$$\cdot[x(T)x^{(1)}(T)-x(0)x^{(1)}(0)] - \frac{a_0}{\sigma^2}[x(T)x^{(2)}(T)+x(0)x^{(2)}(0)] -$$

$$-\frac{a_1}{\sigma^2}[x^{(1)}(T)x^{(2)}(T)-x^{(1)}(0)x^{(2)}(0)]\Big\}.$$

По этим формулам и с помощью формулы (3. a) легко определить плотность, соответствующую элементарным процессам с разными матрицами A. На этом не будем останавливаться.

Пример 2. Рассмотрим двумерный процесс, где различается три случая: *а)* корни характеристического полинома матрицы A вещественные и разные, *б)* корни комплексно сопряженные, *в)* имеется двойной корень. Во всех этих случаях предположим, что винеровский процесс $\mathbf{w}^*(t)=(w_1(t), w_2(t))$ имеет независимые компоненты.

а) Если

$$d\xi_1 = -\lambda_1\xi_1(t)\,dt + dw_1,$$

$$d\xi_2 = -\lambda_2\xi_2(t)\,dt + dw_2,$$

где $\mathsf{M}(dw_i)^2 = \sigma_i^2\cdot dt$, то

$$\frac{d\mathrm{P}_{\lambda_1,\lambda_2}}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^2)}(\mathbf{x}(t)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{2}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_i}\exp\Big\{-\frac{\lambda_i^2}{2\sigma_i^2}\int_0^T x_i^2(t)\,dt - \frac{\lambda_i}{2\sigma_i^2}[x_i^2(T)+x_i^2(0)] + \frac{\lambda_iT}{2}\Big\}.$$

б) Если

$$A = \begin{pmatrix}-\lambda & -\omega\\ \omega & -\lambda\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathsf{M}(dw_i)^2 = \sigma^2\cdot dt,$$

то

$$f_A(\mathbf{x}(0)) = \frac{\lambda}{\pi\sigma^2}\exp\Big\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}x_1^2(0) - \frac{\lambda}{\sigma^2}x_2^2(0)\Big\},$$

и

$$\frac{d\mathrm{P}_A}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^2)}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\lambda}{\pi\sigma^2}\exp\Big\{-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2\sigma^2}\int_0^T[x_1^2(t)+x_2^2(t)]\,dt -$$

$$-\frac{\lambda}{2\sigma^2}[x_1^2(T)+x_2^2(T)+x_1^2(0)+x_2^2(0)] + \lambda T + \frac{\omega}{\sigma^2}\int_0^T[x_1(t)\,dx_2(t)-x_2(t)\,dx_1(t)]\Big\}.$$

При обозначениях $x(t) = x_1(t)+ix_2(t)$, $|x(t)|^2 = x_1^2(t)+x_2^2(t)$, $x(t) = |x(t)|\,e^{i\theta(t)}$ плотность перепишется с помощью следующего соотношения

$$(\ast)\qquad \int_0^T[x_1(t)\,dx_2(t)-x_2(t)\,dx_1(t)] = \int_0^T|x(t)|^2\,d\theta.$$

Чтобы доказать $(\ast)$ заметим, что

$$\sum_j\big[x(t_j)\overline{x(t_{j-1})} - x(t_{j-1})\overline{x(t_j)}\big] =$$

$$= -2i\sum_j\big[x_2(t_j)\big(x_1(t_j)-x_1(t_{j-1})\big) - x_1(t_j)\big(x_2(t_j)-x_2(t_{j-1})\big)\big],$$

где левая сторона выражается следующим образом

$$\sum_j|x(t_j)|x(t_{j-1})|[e^{i(\theta(t_j)-\theta(t_{j-1}))} - e^{i(\theta(t_{j-1})-\theta(t_j))}] =$$

$$= \sum_j|x(t_j)|\,|x(t_{j-1})|\,2i\sin\big(\theta(t_j)-\theta(t_{j-1})\big) \sim 2i\sum_j|x(t_j)|^2\big(\theta(t_j)-\theta(t_{j-1})\big).$$

Таким образом

$$\frac{d\mathrm{P}_A}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^2)}(x(t)) = \frac{\lambda}{\pi\sigma^2}\exp\Big\{-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2\sigma^2}\int_0^T|x(t)|^2\,dt +$$

$$+\frac{\omega}{\sigma^2}\int_0^T|x(t)|^2\,d\theta + \lambda T - \frac{\lambda}{2\sigma^2}\big[|x(T)|^2+|x(0)|^2\big]\Big\}.$$

в) Если P_A обозначает меру, соответствующую процессу

$$d\xi_1 = -\lambda\xi_1(t)\,dt + \xi_2(t)\,dt + dw_1(t),$$

$$d\xi_2 = -\lambda\xi_2(t)\,dt + dw_2(t),$$

где $\mathsf{M}(dw_1)^2 = \sigma^2\cdot dt$, $\quad\mathsf{M}(dw_2)^2 = dt$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix},\quad B_w = \begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$B = \mathsf{M}\xi(t)\xi^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda(2\lambda)^2} & \frac{1}{(2\lambda)^2} \\ \frac{1}{(2\lambda)^2} & \frac{1}{2\lambda} \end{pmatrix}, \quad |B|^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2\lambda)^2}{\sqrt{1+\sigma^2(2\lambda)^2}}.$$

Таким образом

$$\frac{d\mathsf{P}_A}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^2)}(\mathbf{x}(t)) = f_A(\mathbf{x}^*(0))\exp\Big\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^T x_1(t)\,dx_1(t) + \frac{1}{\sigma^2}\int_0^T x_2(t)\,dx_1(t) +$$

$$-\lambda\int_0^T x_2(t)\,dx_2(t) - \frac{1}{2}\int_0^T\Big[\frac{\lambda^2}{\sigma^2}x_1^2(t) + \frac{1}{\sigma^2}x_2^2(t) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}x_1(t)x_2(t) + \Big(\frac{1}{\sigma^2}+\lambda^2\Big)x_2^2(t)\Big]dt,$$

и используя уже известные формулы получаем

$$\frac{d\mathsf{P}_A}{d(L^2\times W_{\mathbf{x}}^2)}(\mathbf{x}(t)) = \frac{(2\lambda)^2}{2\pi\sqrt{1+\sigma^2(2\lambda)^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_0^T\Big[\frac{\lambda^2}{\sigma^2}x_1^2(t) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}x_1(t)x_2(t) +$$

$$+\Big(\lambda^2+\frac{1}{\sigma^2}\Big)x_2^2(t)\Big]dt + T\lambda + \frac{1}{\sigma^2}\int_0^T x_2(t)\,dx_1(t) - \frac{\lambda}{2\sigma^2}x_1^2(T) - \frac{\lambda}{2}x_2^2(T) +$$

$$-\Big[\frac{\lambda}{2\sigma^2} + \frac{(2\lambda)^3}{1+\sigma^2(2\lambda)^2}\Big]x_1^2(0) - \Big[\frac{\lambda}{2} + \lambda\Big(1+\frac{1}{1+\sigma^2(2\lambda)^2}\Big)\Big]x_2^2(0) +$$

$$+\frac{(2\lambda)^2}{1+\sigma^2(2\lambda)^2}x_1(0)x_2(0)\Big\}.$$

Заметим, что в экспоненте присутствуют интегралы, не зависящие от параметра λ, что сокращается при вычислении плотности мер, соответствующих разным матрицам A.

г) Если процесс удовлетворяет уравнению

$$d\xi_1 = a_{11}\xi_1(t)\,dt + a_{12}\xi_2(t)\,dt + dw_1 + dw_2,$$

$$d\xi_2 = a_{21}\xi_1(t)\,dt + a_{22}\xi_2(t)\,dt + dw_2,$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ независимые, то $(\mathsf{M}(dw_i)^2 = dt;\ i=1,2)$

$$B_w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_w^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$(\text{и } \mathbf{x}(0) = \mathbf{o})$

$$\frac{dP_A}{dW_0^2}(\mathbf{x}(t)) = \exp\Big\{-\frac{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{21} + 2a_{21}^2}{2}\int_0^T x_1^2(t)\,dt - \frac{a_{12}^2 - 2a_{12}a_{22} + 2a_{22}^2}{2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^T x_2^2(t)\,dt + \frac{2a_{12}a_{11} - 2a_{12}a_{21} - 2a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{22}}{2}\int_0^T x_1(t)x_2(t)\,dt +$$

$$+(a_{12}-a_{22})\int_0^T x_2(t)\,dx_1(t) + (2a_{21}-a_{11})\int_0^T x_1(t)\,dx_2(t) +$$

$$+\frac{a_{11}-a_{21}}{2}[x_1^2(T) - x_1^2(0)] + \frac{2a_{22}-a_{12}}{2}[x_2^2(T) - x_2^2(0)] - \frac{2(a_{22}+a_{11}) - a_{12} - 2a_{21}}{2}T\Big\}.$$

3. Доказательство основной теоремы. В дальнейшем предположим, что $\mathbf{w}(t)$ k-мерный. Если $\mathbf{y}(t)\in C_k[0,T]$ и $d_n = (t_0^{d_n} < t_1^{d_n} < \ldots < t_m^{d_n})$ какое-нибудь разбиение отрезка $[0,T]$, каждое из которых является продолжением предыдущего и для которых $\varrho(d_n) = \max_i (t_{i+1}^{d_n} - t_i^{d_n}) \to 0$ при $n\to\infty$, то с помощью эйлерова приближения

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{y}(0),$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t_{i-1}^{d_n}) + A\mathbf{Y}(t_{i-1}^{d_n})(t - t_{i-1}^{d_n}) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_{i-1}^{d_n}),$$

$$(t_{i-1} < t \leqq t_i),$$

где

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t A\mathbf{y}(s)\,ds + \mathbf{x}(t), \quad (\mathbf{x}(0) = 0),$$

получается непрерывное отображение пространства C_k в себя

$$\pi(d_n):\ \mathbf{y}(t)\to\mathbf{Y}(t).$$

Из свойств эйлеровых приближений и теоремы 1. 10 работы [8] следует, что $\mathbf{Y}(t)\to\mathbf{y}(t)$ равномерно на каждом компакте пространства C_k, и обозначая меру процесса $\mathbf{Y}(t)$ через $(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)}$

$$(1) \qquad (\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)} \Rightarrow \mathsf{P}_A,$$

если $\varrho(d_n)\to 0$, в смысле слабой сходимости.

Имеет место следующее утверждение $(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)} \ll W_o^k$ и

$$(2) \quad p_n = \frac{d(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)}}{dW_0^k}(\mathbf{x}(t)) = \exp\Big\{\sum_{j=1}^m (C\mathbf{x}_{j-1}, \Delta\mathbf{x}_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m [A\mathbf{x}_{j-1}, C\mathbf{x}_{j-1}]\Delta t_j^{d_n}\Big\}.$$

Доказательство (2) легко получается, если рассмотреть продолжение $d_{n'}$ разбиения d_n, тогда конечные распределения меры $(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)}$ в точках $t_0^{d_{n'}}, \ldots, t_{im}^{d_n}$, абсолютно непрерывны относительно меры W_0^k в тех же точках и их плотность равна

$$\exp\frac{1}{2}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i>i_{j-1}}^{i_j}\frac{(B_w^{-1}\Delta \mathbf{x}_i^{d_{n'}}-C\mathbf{x}_{j-1}^{d_n}\Delta t_i^{d_{n'}},\ \Delta \mathbf{x}_i^{d_{n'}}-A\mathbf{x}_{j-1}^{d_n}\Delta t_i^{d_{n'}})}{\Delta t_i^{d_{n'}}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{i_m}\frac{(B_w^{-1}\Delta \mathbf{x}_i^{d_{n'}},\ \Delta \mathbf{x}_i^{d_{n'}})}{\Delta t_i^{d_{n'}}}\right\},$$

что переходит в (2), по теореме сходимости мартингалов и из того факта, что интеграл функции $\frac{d(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)}}{dW_o^k}$ равен 1 по всему пространству. Первая сумма в формуле (2) сходится W_0^k-среднем квадратичном к

$$\int_0^T (C\mathbf{x}(t),\, d\mathbf{x}(t)),$$

а вторая для всех $\mathbf{x}(t)\in C_k$ к

$$-\frac{1}{2}\int_0^T (A\mathbf{x}(t),\, C\mathbf{x}(t))dt,$$

поэтому можно выбрать такую подпоследовательность d_{n_r}, что сходимость имеет место почти всюду по W_0^k.

Так как $\ln p_n$ имеет предел и по мере P_A, легко показать, что последовательность p_n равномерно интегрируема. Но тогда

$$(\mathsf{P}_A)^{\pi(d_n)}(B)=\int_B p_n dW_o^k\to\int_B p\,dW_o^k,$$

где

$$p(\mathbf{x}(t))=\exp\left\{\int_0^T (C\mathbf{x}(t),\, d\mathbf{x}(t))-\frac{1}{2}\int_0^T (A\mathbf{x}(t),\, C\mathbf{x}(t))dt\right\}.$$

С другой стороны мы уже показали, что

$$(\mathsf{P}_A)^{(\pi d_n)}\Rightarrow \mathsf{P}_A,$$

таким образом

$$\mathsf{P}_A(B)=\int_B p\,dW_0^k$$

что и требовалось доказать.

Надо заметить, что если вместо „процесса" $\mathbf{Y}(t)$ мы рассматриваем процесс $\tilde{y}(t)$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{y}(t_{i-1})+\frac{(t-t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}(\mathbf{y}(t_i)-\mathbf{y}(t_{i-1})),\quad (t_{i-1}<t\leqq t_i),$$

то нельзя определить так легко плотность вероятности относительно W_0^k, как это сделано в формуле (2).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В.: О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах, *Успехи Мат. Наук* **21** (6) (1966) 83—152.

[2] Гирсанов, И. В.: О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теор. Вероятност.* и *Применен.* **5** (1960) 314—330.

[3] Doob, J. L.: The elementary gaussian processes, *Ann. Mdth. Statist.* **15** (1944) 229—281.

[4] Hajek, J.: On linear statistical problems in stochastic processes, *Czechoslovak Math. J.* **12** (1962) 404—444.

[5] Михалевич, В. С., Скороход, А. В.: О статистике некоторых процессов, *Труды VI Всесоюзного сов. по теории вер. и мат. стат.* (1960) 229—232.

[6] Писаренко, В. Ф.: К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума, *Радиотехн. и Электрон.* **6** (1961) 515—528.

[7] Писаренко, В. Ф.: Об оценках параметров гауссовского стационарного процесса со спектральной плотностью, *Литовск. Мат. Сб.* **2** (2) (1962) 159—167.

[8] Прохоров, Ю. В.: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теор. Вероятност. и Применен. **1** (1956) 177—238.

[9] Розанов, Ю. А.: Дополнение к книге Хэннан Э.: *Анализ временных рядов*, Москва, 1964.

[10] Скороход, А. В.: *Исследование по теории случайных процессов*, Киев.

[11] Striebel, Ch.: Densities for stochastic processes, *Ann. Math. Statist.* **30** (1959) 559—567.

[12] Халмош, П.: Теория меры, Москва, И. Л., 1953.

Вычислительный Центр Академии Наук Венгрии, Будапешт

(Поступила 6-ого января 1969 г.)