Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 5 (1970) 11—15.

ОБ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

M. ARATÓ

1. Рассмотрим многомерный стохастический процесс $\boldsymbol{\xi}^*(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t), \dots, \xi_{k-1}(t))$, удовлетворяющий уравнению

$$d\boldsymbol{\xi}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)\,dt + d\mathbf{w}(t) \tag{1. 1}$$

где $\mathbf{w}(t)$ является непрерывным мартингалом, $\mathsf{M}d\mathbf{w}(t)=0$, $\mathsf{M}(d\mathbf{w}(t)d\mathbf{w}^*(t)) = B_w(t)\,dt$. Матрица $B_w(t)$ является симметричной и положительно определенной.

Предполагается, что элементы матрицы A являются неизвестными и оцениваются по реализаций $\boldsymbol{\xi}(t)$ на отрезке $0 \leqq t \leqq T$.

Метод наименьших квадратов для оценки параметров $\{a_{pq}\} = A$ состоит в следующем. Рассмотрим функционал траектории $\xi(t)$

$$\int_0^T [B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s)] - \frac{1}{2}\int_0^T [A\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s)]ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T [B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s), A\boldsymbol{\xi}(s)]ds + \int_0^T [B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s), d\mathbf{w}(s)], \tag{1. 2}$$

и ищем ту матрицу $\hat{A}$, при которой (1. 2) является минимальным, т. е. ищем решения уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}}\left\{\int_0^T [B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s)] - \frac{1}{2}\int_0^T [A\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}(s)A\boldsymbol{\xi}(s)]\,ds\right\} = 0; \tag{1. 3}$$

$$p, q = 0, 1, \dots, k-1.$$

Здесь $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В том случае, когда $\mathbf{w}(t)$ является винеровским процессом $B_w(s) = B_w$, и если матрица A имеет характеристические значения λ_i с отрицательной действительной части, процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ является стационарным гауссовским марковским процессом. Условная функция правдоподобия (производное Радона-Никодима меры P_A относительно меры Винера W), при условии $\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{x}$, имеет вид

$$\frac{dP_A}{dW}(\boldsymbol{\xi}(t)) = L = \exp\left\{\int_0^T [B_w^{-1}A\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s)] - \frac{1}{2}\int_0^T [A\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}A\boldsymbol{\xi}(s)]ds\right\}, \tag{1. 4}$$

и метод условного наибольшего правдоподобия совпадает методом наименьших квадратов.

Пусть $B_w^{-1}(t)=\{b_{ij}^{-1}(t)\}$, тогда уравнение (1. 3) можно переписать в следующую форму

$$\int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)d\xi_j(s)-\sum_{i,j}\hat{a}_{ji}\int_0^T b_{jp}^{-1}(s)\xi_q(s)\xi_i(s)ds=0;\quad p,q=0,1,\ldots,k-1,$$

или

$$(1.\ 3')\qquad \int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)\Big(d\xi_j(s)-\sum_i \hat{a}_{ji}\xi_i(s)ds\Big)=0;\quad p,q=0,1,\ldots,k-1.$$

Из уравнения (1. 1) следует, что

$$(1.\ 5)\qquad \int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)\Big(d\xi_j(s)-\sum_i a_{ji}\xi(s)ds\Big)=\int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)dw_j(s);$$

$$p,q=0,1,\ldots,k-1.$$

Вычитая из (1. 5) уравнение (1. 3′) получим, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)\sum_i\sqrt{T}(\hat{a}_{ji}-a_{ji})\xi_i(s)ds=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \xi_q(s)\sum_j b_{pj}^{-1}(s)dw_j(s)=\eta_{pq}(T);$$

$$(1.\ 6)\qquad p,q=0,1,\ldots,k-1.$$

Моменты правой стороны (1. 6) легко сосчитать, а именно

$$\mathsf{M}\eta_{pq}(T)=0$$

$$(1.\ 7)\qquad \mathsf{M}\eta_{pq}(T)\eta_{rs}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{M}\xi_q(t)\xi_s(t)\sum_{j_1 j_2} b_{pj_1}^{-1}(t)b_{rj_2}^{-1}(t)b_{j_1 j_2}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T b_{rp}^{-1}(t)\mathsf{M}\xi_q(t)\xi_s(t)dt,$$

при $p,q=0,1,\ldots,k-1$.

Во многих случаях выполняются следующие условия:

а) $$\frac{1}{T}\int_0^T b_{pj}^{-1}(t)\xi_q(t)\xi_i(t)dt\to b_{pjqi},\quad \text{при}\quad T\to\infty,$$

б) $\eta_{pq}(T)$ имеют асимптотически (при $T\to\infty$) нормальное распределение с матрицей вторых моментов $B=\{b_{pjqi}\}$.

Докажем следующую теорему, являющуюся обобщением известной теоремы Манн и Вальда в случае дискретного времени (см. Манн и Вальд [4]).

Теорема 1. *При условиях а), б) случайные величины $\sqrt{T}(\hat{a}_{pq}-a_{pq})$ являются асимптотически нормально распределенными (при $T\to\infty$) нулевым среднем и матрицей вторых моментов B^{-1}.*

Доказательство. По условию *а)* левая сторона (1. 6) имеет вид, при $T\to\infty$

$$B\cdot\sqrt{T}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a}).$$

Из условия *б)* следует, что правая сторона (1. 6) имеет нормальное распределение асимптотически, т. е.

$$\boldsymbol{\eta}(T)\to\boldsymbol{\eta},\quad \text{где}\quad \mathsf{M}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^*=B.$$

Тогда

$$B\cdot\sqrt{T}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})\sim\boldsymbol{\eta},\quad \sqrt{T}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})\sim B^{-1}\cdot\boldsymbol{\eta}$$

и

$$\mathsf{M}\sqrt{T}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})\sqrt{T}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})^*\sim\mathsf{M}(B^{-1}\boldsymbol{\eta})(B^{-1}\boldsymbol{\eta})^*=B^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если процесс $\mathbf{w}(t)$ имеет независимые компоненты, тогда система уравнений (1. 3) распадает на k отдельных систем (при $p=0,1,\ldots,k-1$), и при фиксированном p (1. 6) имеет следующий вид

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi_q(t)b_{pp}^{-1}(t)\sum_i\sqrt{T}(\hat{a}_{pi}-a_{pi})\xi_i(t)dt=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \xi_q(t)b_{pp}^{-1}(t)dw_p(t)=\eta_{pq}(T),$$

где

$$\mathsf{M}\eta_{pq}(T)=0,\quad \mathsf{M}\eta_{pq}(T)\eta_{ps}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T b_{pp}^{-1}(t)\mathsf{M}\xi_q(t)\xi_s(t)dt\to b_{pqs}.$$

Величины $\sqrt{T}(\hat{a}_{pq}-a_{pq})$ являются — при выполнении предположений *а)* и *б)* — асимптотически нормальными с матрицей ковариации $B_p^{-1}=\{b_{pqs}\}^{-1}$, $q,s=0,1,\ldots,k-1$.

Теорема 2. *Если $\mathbf{w}(t)$ является винеровским процессом и матрица A имеет характеристические числа с отрицательной вещественной части, тогда оценки наименьших квадратов асимптотически нормально распределены со матрицей ковариации $B^{-1}=\{b_{pr}^{-1}\mathsf{M}\xi_q(0)\xi_s(0)\}^{-1}$.*

Замечание 2. Когда винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$ является процессом с независимыми компонентами и $\mathsf{M}(dw_p)^2=\sigma_p^2\cdot dt$, $B(o)=\{\mathsf{M}\xi_s(o)\xi_q(o)\}$ матрица вторых моментов оценок $\hat{a}_{pq}, q=0,1,\ldots,k-1$ (при фиксированном p) имеет вид

$$\sigma_p^2\cdot B^{-1}(0).$$

Матрица $B(o)$ определяется из уравнения (см. Арато [1])

$$A\cdot B(0)+B(0)A^*=-B_w.$$

Доказательство теоремы 2. При условиях нашей теоремы гауссовский, стационарный, марковский процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ будет эргодическим (см. Розанов [8]) и поэтому выполняется условие *а)*. Кроме того, процесс $\boldsymbol{\xi}(t)$ обладает свойством сильного перемешивания и из

$$\mathsf{M}\eta_{pq}(T)\eta_{rs}(T)=\sigma_{rp}^{-1}\mathsf{M}\,\xi_q(0)\xi_s(0),\quad \text{где}\quad \mathsf{M}(dw_r dw_p)=\sigma_{rp}\cdot dt,$$

следует (см. Волконский—Розанов [2], Розанов [6]), что выполняется и условие *б)*. Тем самым теорема доказана.

Пример. В статье Писаренко [5] рассматривался случай одномерного стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$d\xi^{(k-1)}(t)+\left[a_{k-1}\xi^{(k-1)}(t)+\ \dots\ +a_0\xi(t)\right]dt = dw(t), \quad \text{где} \quad \mathsf{M}(dw)^2 = \sigma^2\cdot dt.$$

Из теоремы 2 следует, что оценки условного наибольшего правдоподобия являются асимптотически нормально распределенными с матрицей ковариации $\sigma^2\cdot B^{-1}(0)$. Легко показать, на основе замечания 2, что $B^{-1}(0)$ можно задать в явном виде, а именно (см. Арато [1]), если $B^{-1}(0)=\{b_{ij}^{-1}\}$,

$$b_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{при } i\neq j \pmod 2,\\ \dfrac{2}{\sigma^2}\sum\limits_l(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}, & \text{при } i\equiv j \pmod 2,\end{cases}$$

где $a_i=0$, при $i<0$, или $i>k$ $(a_k=1)$, и $b_{ij}^{-1}=b_{ji}^{-1}$.

2. Доверительные границы. В дальнейшем предположим, что выполняются условия *а)* и *б)* и, простоты ради, что процесс $\mathbf{w}(t)$ имеет независимые компоненты. Как следует из замечания 1 в этом случае можно — при фиксированном p — независимо рассматривать оценки $\hat{a}_{pq}(q=0, 1,\dots, k-1)$ для разных p. Пусть $B_p=\{b_{pqr}\}$, тогда из теоремы 1 следует, что величина

$$T\left[(\hat{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p),\ B_p(\hat{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p)\right] \tag{2. 1}$$

является асимптотически χ_k^2 распределенной величиной, при $T\to\infty$. Из условия *а)* и из одной известной леммы (см. Крамер [3] стр. 281) следует, что величина

$$T\left[(\hat{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p),\ \hat{B}_p(\hat{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p)\right] \tag{2. 2}$$

также является асимптотически χ_k^2 распределенной, где

$$\hat{B}_p = \{\hat{b}_{pqr}\} = \left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T b_{pp}^{-1}(t)\xi_q(t)\xi_r(t)\,dt\right\}.$$

Если асимптотическая нормальность имеет место равномерно, тогда для параметров a_{pq} можно построить доверительные границы. То, что в общем случае не имеет место равномерность, показывает пример стационарного процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$, когда для равномерности требуется, чтобы характеристические числа матрицы A (обозначим их через λ_i, $i=0, 1, \dots, k-1$) дожлны удовлетворять условию $Re\,\lambda_i\geqq\varepsilon>0$.

Ограничиваясь несмещенными оценками $\tilde{a}_p$ легко показать, в случае винеровского процесса $\mathbf{w}(t)$, что для матрицы вторых моментов $S = \mathsf{M}(\tilde{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p)(\tilde{\mathbf{a}}_p-\mathbf{a}_p)^*$ асимптотически выполняется условие

$$S\geqq\left\{\mathsf{M}\left(\frac{\partial\log L}{\partial a_{pr}}\cdot\frac{\partial\log L}{\partial a_{pq}}\right)\right\}^{-1}_{r,q=\overline{0,k-1}}, \quad \text{(см. (1. 4))}, \tag{2. 3}$$

и при $T\to\infty$

$$S\geqq B^{-1} = B^{-1}(0) \tag{2. 4}$$

в том смысле, что $S-B^{-1}(0)$ является положительно определенной матрицей.

Теорема 2 в этом случае означает, что оценки наименьших квадратов (условного наибольшего правдоподобия) являются, при $T\to\infty$, асимптотически эффективными, т. е. имеют меньший эллипсоид рассеивания по сравнению с любыми несмещенными оценками.

Если матрица A такая, что $\lambda_i\sim 0$, тогда $\eta_{pq}(T)$ является χ^2 распределенной величиной и доверительные границы нельзя строить по формуле (2. 2).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арато, М.: Точные формулы для плотностей мер элементарных гауссовских процессов, *Studia Sci. Math. Hungar.* **5** (1970) 17—27.

[2] Волконский, В. А. и Розанов, Ю. А.: Некоторые предельные теоремы для случайных функций, *Теор. Вероятност. и Применен.* **4** (1959) 186—207.

[3] Крамер, Г.: *Математические методы статистики,* Москва, (перевод с англ.).

[4] Mann, H. B. and Wald, A.: On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica* **11** (1943) 173—220.

[5] Писаренко, В. Ф.: Об оценках параметров гауссовского стационарного процесса со спектральной плотностью. $|P(i\lambda)|^{-2}$. *Литовский Математический сборник II,* No **2**, (1963) 159—167.

[6] Розанов, Ю. А.: An application of the central limit theorem. *Proc. Fourth Berkeley Symposium*, Vol. 2. (1960) 445—454.

[7] Розанов, Ю. А.: Дополнение редактора к книге Э. Хеннан: *Анализ временных рядов,* Наука, Москва, 1964.

[8] Розанов, Ю. А.: *Стационарные случайные процессы,* Москва, 1963.

Вычислительный Центр Академии Наук Венгрии, Будапешт

(Поступила 6-ого января 1969 г.)