RACIONÁLIS SPEKTRÁL SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYŰ STACIONÁRIUS FOLYAMATOK VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK MEGENGEDHETŐ BECSLÉSÉRŐL

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

1. Korrekt becslések

Legyen a $\xi(t)$ valós $(0 \leqq t \leqq T)$ stacionárius (szigorú értelemben) folyamat 1 valószínűséggel folytonos és $\theta = M\xi(t)$ ismeretlen, míg a $B(t) = M(\xi(s+t)-\theta)\cdot(\xi(s)-\theta)$ kovariancia függvény legyen ismert. Adott θ esetén a folyamathoz tartozó valószínűségi mértéket, ill. várható értéket jelölje P_θ, ill. M_θ. Stacionárius folyamatok esetén van értelme θ olyan becsléseit tekinteni, melyek a koordinátarendszer megválasztásával szemben invariánsak.

Definíció. A $\hat{\theta}(\xi(t))$ funkcionált korrekt becslésének nevezzük, ha tetszőleges $-\infty < c < \infty$ esetén

$$\hat{\theta}(\xi(t)+c) = \hat{\theta}(\xi(t))+c.$$

Könyű látni, hogy pl. az $\frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(t)dt$ és a $\xi(t_0)$ funkcionál (t_0 fix) korrekt becslése θ-nak.

Jelölje a továbbiakban $\mathscr{K}$ a korrekt becslések osztályát. Ha $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$

1.1) $$M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = M_\theta(\hat{\theta}(\xi(t))-\theta)^2 = M_0(\hat{\theta}(\xi(t)))^2.$$

Független megfigyeléssorozatra a korrekt becslés fogalmát PITMAN [7] vezette be. A θ ún. lokációs paraméter *Pitman*-féle becslésének nevezzük (a várható érték létezése esetén) az

(1.2) $$u = \xi(0) - M_0(\xi(0)|\xi(t)-\xi(0), \quad 0 \leqq t \leqq T)$$

becslést. A továbbiakban a $\xi(t)-\xi(0)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ változók által generált σ-algebrát $\mathscr{A}_0^T$-vel fogjuk jelölni, s akkor

$$u = \xi(o) - M_0(\xi_{(o)}/\mathscr{A}_0^T).$$

Nyilván

$$u(\xi(t)+c) = \xi(o)+c-M_o(\xi(o)/\mathscr{A}_0^T) = u(\xi(t))+c,$$

azaz $u \in \mathscr{K}$ és

(1.3) $$M_\theta(u) = M_\theta\xi(0) - M_\theta(M_0(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T)) = \theta,$$

tehát az u torzítatlan becslése θ-nak. Az $M_0(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ és $\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ változók ortogonalitása miatt, ha $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$

(1.4) $$M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = M_0(\hat{\theta})^2 = M_0(\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathscr{A}_0^T))^2 + M_0(M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathscr{A}_0^T))^2 \geqq$$
$$\geqq M_0[\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathscr{A}_0^T)]^2.$$

Ha $\hat{\theta}$ korrekt becslés, $\hat{\theta}-M(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ is korrekt becslés marad. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ korrekt becslésekre

$$\hat{\theta}_1 - M_0(\hat{\theta}_1|\mathscr{A}_0^T) = \hat{\theta}_2 - M_0(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T), \tag{1.5}$$

ahol az egyenlőség majdnem mindenütt értendő.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$\hat{\theta}_1(\xi(t)) - \hat{\theta}_2(\xi(t)) = \hat{\theta}_1(\xi(t)-\xi(0)) - \hat{\theta}_2(\xi(t)-\xi(0)) = \\ = \hat{h}(\xi(t)-\xi(0)), \tag{1.6}$$

azaz $\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2$ a $\xi(t)-\xi(0)$ funkcionálja, melyet $\hat{h}$-val jelölünk. A feltételes várható érték jól ismert tulajdonsága alapján

$$M(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) = \hat{h}(\xi(t)-\xi(o)). \tag{1.7}$$

(1. 6) és (1. 7)-ből adódik, hogy

$$M(\hat{\theta}_1|\mathscr{A}_0^T) = M(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) + \hat{h}(\xi(t)-\xi(0)) = M(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) + \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$$

és ezzel (1. 5)-öt igazoltuk. (1. 5) speciális esete az

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt - M_0\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt\,|\mathscr{A}_0^T\right) = \xi(0) - M_0(\xi(o)|\mathscr{A}_0^T)$$

összefüggés.

(1. 4) és (1. 5) összevetéséből adódik, hogy tetszőleges $\hat{\theta}\in\mathscr{K}$-ra

$$M_0(\hat{\theta})^2 \geqq M_0(u)^2,$$

ezzel igazoltuk a következő állítást:

1. 1. TÉTEL. *A korrekt becslések osztályában u minimális szórású becslése θ-nak.*

Könnyű megmutatni, hogy

$$D^2(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) = M_0[(\xi(0)-M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T))^2|\mathscr{A}_0^T] = \\ = M_0(\xi^2(0)|\mathscr{A}_0^T) - M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T)^2. \tag{1.8}$$

Példa. Legyen P_θ a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat (θ, λ) paraméterekhez tartozó mértéke $\left(M_0\xi(t)^2 = \frac{1}{2\lambda}\right)$, tehát $\xi(t)$ elégítse ki a

$$d\,\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt + \lambda\cdot\theta dt + d\,w(t)$$

differenciálegyenletet, ahol $w(t)$ a [0, 1] paraméterű *Wiener*-folyamat.

Ismeretes (lásd pl. [1]), hogy ha $V=L\times W$ (ahol L a *Lebesgue*, W pedig a feltételes *Wiener* mérték), akkor

$$\frac{dP_\theta}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\exp\left\{-\lambda\left[-\theta(\xi(0)+\xi(T)+\lambda\int_0^T \xi(t)\,dt) + \theta^2\left(1+\frac{\lambda T}{2}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. -\frac{T}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \xi^2(t) + \frac{\xi^2(0)+\xi^2(T)}{2}\right]\right\}.$$

Ebből az összefüggésből látható, hogy a maximum likelihood becslés

$$\hat{\theta}(\xi(t)) = \frac{\xi(0)+\xi(T)+\int_0^T \xi(t)\,dt}{2+\lambda T}$$

torzítatlan becslése θ-nak, s egyben elégséges statisztika is. A *Blackwell—Kolmogorov—Rao* egyenlőtlenség alapján minimális szórású torzítatlan becslés. Exponenciális eloszlás-családról lévén szó $\hat{\theta}$ teljessége miatt (lásd pl. LEHMAN [6] 183. o.) egyetlen legjobb torzítatlan becslés.

Mivel $\hat{\theta}$ egyben korrekt becslés is, $M(\hat{\theta}(\xi(t))|\mathscr{A}_0^T)=0$ és (1. 5) alapján

$$\xi(0) - M_0(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt - M_0\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt\,|\mathscr{A}_0^T\right) = \\ = \frac{\xi(0)+\xi(T)+\lambda\int_0^T \xi(t)\,dt}{2+\lambda T},$$

ahonnan

$$M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) = -\frac{\lambda\int_0^T (\xi(t)-\xi(0))\,dt + (\xi(T)-\xi(0))}{2+\lambda T}$$

$$M\left(\frac{1}{T}\int \xi(t)dt\,|\mathscr{A}_0^T\right) = \frac{2\int_0^T (\xi(t)-\xi(0))\,dt - T(\xi(T)-\xi(0))}{T(2+\lambda T)}.$$

2. A Pitman-féle becslés

A sűrűségfüggvény létezését feltételezve az azonos eloszlású, de nem független, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta esetén a *Pitman*-féle becslést (1. 2)-től eltérő alakban is kifejezhetjük. Legyen $p_0(x_1, \ldots, x_n)$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók együttes sűrűségfüggvénye, akkor az $\eta_1=\xi_1, \eta_2=\xi_2-\xi_1, \ldots, \eta_n=\xi_n-\xi_{n-1}$ változók együttes sűrűségfüggvénye, $p_0(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_0(y_1, y_2+y_1, \ldots, y_n+y_1)$. Innen

$$M_0(\xi_1|\xi_2-\xi_1, \ldots \xi_n-\xi_1) = M_0(\xi_1|\eta_2, \ldots \eta_n) = \frac{\int t p_0(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt}{\int p_0(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt},$$

ahonnan $t=\xi_1-x$ helyettesítéssel

$$M_0(\xi_1|\mathscr{A}_2^n) = \xi_1 - \frac{\int x p_0(\xi_1-x, \xi_2-x, \ldots \xi_n-x)\,dx}{\int p_0(\xi_1-x, \xi_2-x, \ldots \xi_n-x)\,dx}$$

adódik. (1. 2)-vel összevetve a

$$\hat{\theta} = \frac{\int x p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} \tag{2. 1}$$

becslést kapjuk, mely akkor is létezik, amikor a ξ_i változók várható értéke esetleg nem létezik (pl. *Cauchy* eloszlás esetén, vö. [3]). Hasonló módon látható be, hogy

$$M_0(\xi_1^2 | \mathscr{A}_2^n) = \frac{\int t^2 p_0(t, \eta_2 + t, \dots, \eta_n + t)\, dt}{\int p_0(t, \eta_2 + t, \dots \eta_n + t)\, dt} =$$

$$= -\xi_1^2 + 2\xi_1 M(\xi_1 | \mathscr{A}_2^n) + \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}.$$

(1. 8) alapján

$$D^2(\xi_1 | \mathscr{A}_2^n) = \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} - \left(\frac{\int x p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} \right)^2. \tag{2. 2}$$

STEIN [9] bebizonyította, hogy a (2. 2) kifejezés $\frac{3}{2}$-ik hatványának várható értéke végessége esetén a (2. 1) becslés megengedhető becslése θ-nak, független megfigyelésekre. (A megengedhetőség definíciójában szereplő veszteségfüggvény itt és a továbbiakban természetesen a paramétertől való eltérés négyzetének várható értéke.) A tétel nyilván érvényben marad stacionárius sorozatokra is.

2. 1. *Példa.* Legyen a $\xi(n)$ stacionárius sorozat egyben *Gauss*-sorozat és elégítse ki a

$$\xi(n+k) + a_{k-1}\xi(n+k-1) + \dots + a_0\xi(n) = \varepsilon(n+k)$$

differenciaegyenletet, ahol az $\varepsilon(n)$ ($M\varepsilon(n) = 0$, $D^2\varepsilon(n) = 1$) független Gauss-sorozat.

Ismeretes hogy (lásd [1])

$$p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) = c_k \exp\{-\tfrac{1}{2}[(x_1, \dots, x_N) R (x_1, \dots, x_N)^*]\},$$

ahol ($a_k = 1$, $a_l = 0$, ha $l < 0$ vagy $l > k$, és *-gal a komplex konjugáltat jelöljük)

$$R = \begin{pmatrix} a_k^2 & a_k a_{k-1} & \dots & a_k a_0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_k^2 + a_{k-1}^2 & a_{k-1} a_{k-2} + a_k a_{k-1} & \dots & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & a_k^2 \end{pmatrix}$$

azaz R elemeire

$$r_{ij} = r_{ji} \quad \text{és} \quad r_{N-i\,N-j} = r_{ij}, \quad \text{és (csak az } i < \frac{N}{2} \text{ és } j > i \text{ elemekre szorítkozva)}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j + i > k + 1 \\ \sum_{l=0}^{i} a_{k-l}^2 & \text{ha} \quad a = j \\ \sum_{l=0}^{i} a_{k-l}\, a_{k+(i-j)-l}, & \text{ha} \quad j > i. \end{cases}$$

A (2. 1) *Pitman*-féle becslés

$$\frac{\int x \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - x, \dots x_N - x) R (x_1 - x, \dots x_N - x)^*\right\} dx}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - x, \dots x_N - x) R (x_1 - x, \dots x_N - x)^*\right\} dx},$$

amint arról egyszerű — de hosszadalmas — számolással meggyőződhetünk, megegyezik a maximum likelihood becsléssel. Speciálisan a $k = 1$ esetben, amikor

$$\xi(n+1) = \varrho\, \xi(n) + \varepsilon(n+1),$$

azt kapjuk, hogy

$$\xi_1 - M_0(\xi_1 | \mathscr{A}_2^N) = \frac{\xi_1 + \xi_N + (1 - \varrho) \sum_{2}^{N-1} \xi_i}{2 + (N-2)(1-\varrho)},$$

és

$$M_0(\xi_1 | A_2^N) = -\frac{(\xi_N - \xi_1) + (1-\varrho) \sum_{2}^{N-1} (\xi_i - \xi_1)}{2 + (N-2)(1-\varrho)}.$$

Az időben folytonos $\xi(t)$ stacionárius folyamat *Pitman*-féle becslésén, amikor nem létezik $\xi(t)$ várható értéke, értsük a következőt. Legyen a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó P_θ mérték abszolút folytonos Q mértékre nézve és jelölje *Radon—Nikodym* deriváltját:

$$\frac{dP_\theta}{dQ}(\xi(t)) = f_\theta(\xi(t)).$$

θ *Pitman*-féle becslése legyen

$$\hat{\theta} = \frac{\int x f_0(\xi(t) - x)\, dx}{\int f_0(\xi(t) - x)\, dx}. \tag{2. 3}$$

$\xi(t)$ várható értéke létezése esetén a (2. 3) és (1. 2) becslések megegyeznek, amint azt az időben diszkrét esetre megmutattuk. Az 1. pont példájában ily módon is megmutatható a maximum likelihood becslés és a *Pitman*-féle becslés megegyezése.

3. Megengedhető becslések

Az egydimenziós *Doob*-féle elemi *Gauss* stacionárius ([2]) folyamat esetén közvetlenül is bizonyítható a maximum likelihood, illetve a *Pitman*-féle becslés megengedhetősége. A *Stein*-féle bizonyítás kiterjesztése sztochasztikus folyamatok esetére nyitott kérdés marad, de láthatólag elvégezhető. A megengedhetőség bizonyításához HODGES és LEHMAN [5] módszerére van szükség, melyet itt a teljesség kedvéért ismétlünk.

Legyen a $\xi(t)$ stacionárius *Gauss*-folyamat $n-1$-szer differenciálható és elégítse ki a

$$d\xi^{(n-1)}(t) + [a_{n-1}\xi^{(n-1)}(t) + \dots a_0(\xi(t) - \theta)]\, dt = dw(t) \tag{3. 1}$$

differenciálegyenletet, ahol $w(t)$ az ismert Wiener-folyamat $Mdw(t)=0$, $M(dw)^2=dt$ paraméterekkel. Ismert, hogy $\xi(t)$ spektrál sűrűsége

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|(i\lambda)^n+a_{n-1}(i\lambda)^{n-1}+\ldots+a_0|^2}$$

alakú. A $\xi(t)$ folyamathoz tartozó mértéket jelöljük P_θ-val, hangsúlyozva ezzel, hogy $M_\theta\xi(t)=\theta$. Igaz a következő tétel:

3. 1. TÉTEL.
Az

$$m^* = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]+a_0\int_0^T \xi(t)\,dt}{2a_1+a_0T} \tag{3.2}$$

maximum likelihood becslés egyben Pitman-féle becslés is és az $M_\theta\xi(t)=\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$ *paraméternek megengedhető becslése.*

A tétel bizonyítását több lépésben végezzük.

3. 1. LEMMA. *Ha a* $\boldsymbol{\xi}(t)=(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$ *stacionárius folyamat eleget tesz a*

$$d\boldsymbol{\xi}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)\,dt+d\mathbf{w}(t) \tag{3.3}$$

differenciálegyenleteknek, ahol $\mathbf{w}(t)$ *n-dimenziós Wiener-folyamat (esetleg elfajult)* $M\mathbf{w}(dt)=0$ *és* $M((\mathbf{w})(dt)\mathbf{w}^*(dt)) = B_w(0)\,dt$ *kovarianciamátrixszal (A sajátértékei negatív valós résszel bírnak), akkor*

$$B(t) = M\{\boldsymbol{\xi}(s+t)\boldsymbol{\xi}^*(s)\} = e^{At}B(o), \tag{3.4}$$

és

$$AB(o)+B(o)A^* = -B_w(o), \tag{3.5}$$

illetve (3. 5)*-ből adódik, hogy*

$$B^{-1}(o)A+A^*B^{-1}(o) = -B^{-1}(o)B_w(o)B^{-1}(o). \tag{3.6}$$

A lemma bizonyítása szerepel *Doob* [2] cikkében, itt egy új, a sztochasztikus differenciálegyenletek tulajdonságain alapuló bizonyítást adunk. (3. 3)-at $d\mathbf{w}^*(t)$-vel szorozva, s várható értéket képezve ($d\mathbf{w}(t)$ és $\boldsymbol{\xi}(t)$ függetlensége miatt)

$$Md\boldsymbol{\xi}(t)\,d\mathbf{w}^*(t) = B_w(o)\,dt$$

vagy

$$M\boldsymbol{\xi}(t+dt)\,d\mathbf{w}^*(t) = B_w(o)\,dt$$

adódik. Ezt felhasználva (3. 3)-at előbb $\boldsymbol{\xi}^*(t)$-vel szorozva, illetve $\boldsymbol{\xi}(t+dt)$-t (3. 3) bal és jobb oldalának konjugáltjával szorozva s mindkétszer várható értéket képezve kapjuk a

$$B(dt)-B(o) = AB(o)\,dt$$

$$B(o)-B(dt) = B(dt)A^*\,dt+B_w(o)\,dt$$

összefüggéseket, ahonnan összeadással $B(t)$ folytonosságából következik (3. 5). A (3. 4) összefüggés

$$\lim_{t\to 0}\frac{B(t)B^{-1}(o)-E}{t} = A \quad (E \text{ az egységmátrix}),$$

következménye. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen most $\xi(t)$ $(n-1)$-szer differenciálható és

$$\begin{aligned}\xi_0(t) &= \xi(t)\\ \frac{d\xi_0(t)}{dt} &= \xi_1(t)\\ &\vdots\\ \frac{d\xi_{n-2}(t)}{dt} &= \xi_{n-1}(t)\\ d\xi_{n-1}(t) &= -(a_0(\xi_0(t)-\theta)+a_1\xi_1(t)+\ldots+a_{n-1}\xi_{n-1}(t))\,dt+dw(t),\end{aligned} \tag{3.1'}$$

azaz (3. 1′) a (3. 1) differenciálegyenlet többdimenziós megfelelője. Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1}\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B_w(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

3. 2. LEMMA. *Ha A* (3. 7) *alakú, akkor*

$$B^{-1}(0) = 2\begin{pmatrix} a_0a_1 & 0 & a_0a_3 & 0 & a_0a_5\ldots a_0a_n\\ 0 & a_1a_2-a_0a_3 & 0 & a_1a_4-a_0a_5 & 0\\ a_0a_3 & 0 & a_2a_3-a_1a_4+a_0a_5 & 0 & a_2a_n\\ \vdots & & & & \\ a_0a_n & & & & a_{n-1}a_n\end{pmatrix} \quad \textit{(ha n páratlan)}, \tag{3.8}$$

ahol $a_n=1$ *és* $a_i=0$, *ha* $i<0$ *vagy* $i>n$, *míg* $B_{ij}^{-1}(0)$ *elemeire*

$$b_{ij}^{-1} = b_{ji}^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i\equiv j+1 \pmod 2\\ 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_{i-k}a_{j+1+k}, & \text{ha} \quad i\equiv j \pmod 2,\ i<j.\end{cases}$$

A lemma helyességéről (3. 6)-ba történő behelyettesítéssel győződhetünk meg. Ezután térjünk át a (3. 1)-nek eleget tevő $\xi(t)$ $(M_0(\xi(t)) = 0)$ és $\xi(t)+\theta$ $(M(\xi(t))=\theta)$ folyamatokhoz tartozó P_0 és P_θ mértékek *Radon—Nikodym* deriváltjainak meghatározására.

3. 3. LEMMA. *Érvényes a következő összefüggés:*

$$(3.9)\qquad \frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\,\theta^2\,(a_0T+2a_1)+a_0^2\,\theta\int_0^T\xi(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}\,[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\,\xi^{(k)}(0)]\right\}.$$

Bizonyítás. Jelölje $\varphi_\theta(x_0,\dots,x_n)$ a (3. 1′) egyenletnek eleget tevő folyamat esetén $\xi_0(0),\dots,\xi_{n-1}(0)$ sűrűségfüggvényét, akkor *Szkorohod* ismert tétele ([8], 131. o.) alapján

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \frac{\varphi_\theta(\xi(0),\dots,\xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0),\dots,\xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T\alpha_i^2(\xi(t))\,dt+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T\alpha_i(\xi(t))\,dw_i(t)\right\} = \frac{\varphi_\theta(\xi_0(0),\dots,\xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0),\dots,\xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\theta^2T+a_0\theta\int_0^T dw(t)\right\},$$

ahol

$$(\alpha_0(\mathbf{x}),\dots,\alpha_{n-1}(\mathbf{x})) = (A_\theta-A)\,\mathbf{x} = (0,0,\dots,\theta a_0).$$

A (3. 2) lemma szerint

$$\frac{\varphi_\theta(\xi(0))}{\varphi_0(\xi(0))} = \exp\left\{-a_0a_1\,\theta^2+2a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\,\xi_{2k}(0)\right\},$$

másrészt a $dw(t)$ szerinti integrálást a (3. 1′) bal oldali kifejezésével helyettesítve ($\theta=0$ mellett) nyerjük, hogy

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \exp\left\{-a_0\,a_1\,\theta^2+2a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\,\xi_{2k}(0)\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\,\theta^2\,T+\right.$$
$$\left.+a_0\,\theta\int_0^T[d\xi_{n-1}(t)+a_{n-1}\xi_{n-1}(t)\,dt+\dots+a_0\,\xi_0\,dt]\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\,\theta^2\,(a_0\,T+2a_1)+a_0^2\,\theta\int_0^T\xi(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}\,[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\,\xi^{(k)}(0)]\right\},$$

s ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A jól ismert faktorizációs tétel (lásd pl. LEHMAN [6] 75. o.) szerint $a_0\int_0^T\xi(t)dt+\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}[\xi^{(k)}(\tau)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]$ elégséges statisztika és a *Blackwell—Kolmogorov—Rao*-egyenlőtlenség szerint a (3. 2) maximum likelihood becslés minimális szórású torzítatlan becslés. A *Lehmann—Scheffé*-tételből ([6], 183. o.) következik az elégséges

statisztika teljessége és hogy a (3. 2) maximum likelihood becslés az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslés. Mivel (3. 2) korrekt becslés, egyben *Pitman*-féle becslés is. A *Pitman*-féle becslés (2. 3) alapján történő közvetlen kiszámolására itt nem térünk ki.

Könnyű megmutatni (lásd pl. GRENANDER [4] 243. o.), hogy

$$(3.10)\qquad D^2\,m^* = \frac{1}{a_0\,(2a_1+a_0\,T)}.$$

Legyen $\hat\theta(\xi(t))$ a θ egy becslése és $M_\theta(\hat\theta) = \theta+b_{\hat\theta}(\theta)$. A *Cramér—Rao*-egyenlőtlenség szerint

$$(3.11)\qquad D^2_\theta(\hat\theta) = M_\theta(\hat\theta-\theta)^2-b^2_{\hat\theta}(\theta) \geqq \frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{M_\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log\dfrac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t))\right)^2}.$$

Mivel m^* elégséges statisztika (de egyszerű számolással is belátható)

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2 = \frac{1}{D^2_\theta(m^*)} = a_0\,(2a_1+a_0\,T).$$

3. 4. LEMMA. *Ha a $\hat\theta$ becslés olyan, hogy minden θ-ra teljesül a*

$$b^2_{\hat\theta}(\theta)+\frac{[1+b'_{\hat\theta}(\theta)]^2}{a_0(2a_1+a_0\,T)} \leqq \frac{1}{a_0(2a_1+a_0\,T)}$$

egyenlőtlenség, akkor $b_{\hat\theta}(\theta)\equiv 0$ $(-\infty<\theta<\infty)$.

Bizonyítás. A feltevésből következik egyrészt, hogy $|b_{\hat\theta}(\theta)|$ korlátos $(-\infty<\theta<\infty)$, másrészt, hogy $b'_\theta(\theta)$ nem lehet pozitív. Így $b_\theta(\theta)$ monoton csökkenő függvénye θ-nak, s korlátossága miatt létezik olyan $\theta_n\to-\infty$, ill. $\theta'_n\to\infty$ sorozat, hogy $b'(\theta_n)$ és $b'(\theta'_n)$ zérushoz tart. De ez csak akkor lehetséges, ha $b(\theta_n)$ és $b(\theta'_n)$ is zérushoz tart, amiből a lemma állítása következik.

Végül szükségünk van a következő, HODGES és LEHMANN-tól származó lemmára (l. [5]):

3. 5. LEMMA. *Ha a θ^* becslésre a Cramer—Rao-egyenlőtlenségben minden θ-ra egyenlőség áll fenn és tetszőleges $\hat\theta$ becslésre a*

$$(3.12)\qquad b^2_{\hat\theta}(\theta)+\frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{M_\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log\dfrac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2} \leqq b^2_{\theta^*}+D^2_\theta(\theta^*)$$

egyenlőtlenség teljesülése maga után vonja a $b_{\hat\theta}(\theta)\equiv b_{\theta^*}(\theta)$ azonosságot, akkor θ^* megengedhető becslése θ-nak.

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy ha θ-ra teljesül $M_\theta(\hat\theta-\theta)^2\leqq M_\theta(\theta^*-\theta)^2$ (minden θ-ra), akkor $\hat\theta=\theta^*$ azaz θ megengedhető. Ha

$$M_\theta(\hat\theta-\theta)^2 \leqq M_\theta(\theta^*-\theta)^2 = b^2_{\theta^*}(\theta)+\frac{[1+b'_{\theta^*}(\theta)]^2}{M_\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log\dfrac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2},$$

akkor (3.11) szerint

$$b_{\hat\theta}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2} \leqq b_{\hat\theta}^2(\theta)+D_\theta^2(\hat\theta) = M_\theta(\hat\theta-\theta)^2 \leqq$$

$$\leqq b_{\theta^*}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\theta^*}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2}$$

is teljesül, de ez azt jelenti, hogy $b_{\hat\theta}(\theta)=b_{\theta^*}(\theta)$ és egyben $b'_{\hat\theta}(\theta)=b'_{\theta^*}(\theta)$. Így tehát $D_\theta^2(\hat\theta)=D_\theta^2(\theta^*)$ és $M_\theta(\hat\theta-\theta)^2=M_\theta(\theta^*-\theta)^2$, azaz $\hat\theta=\theta^*$, amit bizonyítani kellett.

A 3. 5. és 3. 4. lemmákból közvetlenül adódik a 3. 1.tétel.

Amint az a bizonyításból látható, több dimenziós *Gauss*-stacionárius folyamatok várható értékének becsléseire a módszer nem terjeszthető ki. Független megfigyelések esetében — mint az jól ismert [10] — a megengedhetőség $n \geqq 3$ esetén (n az ismeretlen középértékek száma) nem is igaz. Kérdés, hogy kétdimenziós stacionárius *Gauss*-folyamat esetén igaz-e a megengedhetőség?

Ugyancsak érdekes megvizsgálni a minimax becslések és a (2. 3) *Pitman*-féle becslés kapcsolatát (vö. [3]).

A Cauchy-folyamat *Pitman*-becslésének vizsgálatára a későbbiekben kerül sor.

IRODALOM

[1] Arató M.: Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I, IV., *A Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13—24 és **15** (1965) 107—124.

[2] Doob, J. L.: The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.* **15** (1944) 229—281.

[3] Girschick, M. A.—Savage, L. J.: Bayes and minimax estimates for quadratic loss functions, *Proc. Second Berkeley Symp.* (1950) 53—73.

[4] Grenander, U.: Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950) No. 3, 195—277 (magyar fordítása: *MTA III. Oszt. Közleményei* (1965).

[5] Hodges, J. L.—Lehmann, E. L.: Some applications of the Cramér-Rao inequality, *Proc. Second Berkeley Symp.* (1950) 13—22.

[6] Lehmann, E. L.: *Testing Statististical Hypotheses*, 1960. (Orosz fordításban is megjelent.)

[7] Pitman, E. J. G.: The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form, *Biometrika* **30** (1938) 391—421.

[8] Скороход, А. В.: Исследования по теории случайных процессов (1961) (Angol fordításban is megjelent).

[9] Stein, Ch.: The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter. *Ann. Math. Stat.* **30** (1959) No. 4, 970—979.

[10] Stein, Ch.—James, W.: Estimation with quadratic loss, *Proc. Forth Berkeley Symp.* (1961) I., 361—379.

(Beérkezett: 1968. VI. 20.)

ON ADMISSIBLE ESTIMATION OF AN UNKNOWN MEAN OF STATIONARY PROCESSES WITH RATIONAL SPECTRAL DENSITY

by

M. Arató

Summary

For a stationary process with unknown mean there is given the definiton of the Pitman estimation in the form of (1. 2.) and (2.3), where $f_0(\xi(t))$ is the *Radon-Nikodym* derivative. It is shown that in the case of stationary *Gaussian—Markov* process the maximum likelihood and *Pitman* estimates are the same.

Theorem 3. 1. states, that the maximum likelikood estimate of the unknown mean for the *Gaussian* process (3. 1) is a *Pitman* estimate and it is admissible. There is given the inverse matrix of the correlation matrix of the variables $\xi(0), \xi'(0), \ldots, \xi^{(n-1)}(0)$ in the form (3. 8).

Selected Transl. in Math.
Statist. and Probability
Volume 10, 1971

THE ADMISSIBLE ESTIMATION OF THE UNKNOWN MEAN OF A STATIONARY PROCESS WITH RATIONAL SPECTRAL DENSITY*

M. ARATÓ

1. Correct estimates. Let $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ be a real and (strictly) stationary process and suppose that it is continuous with probability 1 and assume that $\theta = \mathrm{E}\xi(t)$ is unknown while the covariance function $B(t) = \mathrm{E}[(\xi(s+t) - \theta) \cdot (\xi(s) - \theta)]$ is known. Denote by P_θ and E_θ the probability measure and the expected value respectively which belong to the process for a given θ. In the case of stationary processes one can consider estimates of θ which are invariant with respect to the choice of the system of coordinates.

DEFINITION. The functional $\hat{\theta}(\xi(t))$ is said to be a correct estimate if

$$\hat{\theta}(\xi(t)+c) = \hat{\theta}(\xi(t)) + c$$

for arbitrary $-\infty < c < \infty$.

It is easy to see that the functionals $T^{-1}\int_0^T \xi(t)\,dt$ and $\xi(t_0)$ (t_0 fixed) are correct estimates of θ.

Let $\mathscr{K}$ be the class of correct estimates. If $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$, then

$$\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}(\xi(t))-\theta)^2 = \mathrm{E}_0(\hat{\theta}(\xi(t)))^2. \tag{1.1}$$

Pitman [7] introduced the concept of a correct estimate for sequences of independent random variables. We call the estimate

$$u = \xi(0) - \mathrm{E}_0(\xi(0)/\xi(t) - \xi(0),\quad 0 \leq t \leq T) \tag{1.2}$$

of the so-called location parameter θ a Pitman estimate (in case the expected value exists). In the following we denote the σ-algebra generated by the variables $\xi(t) - \xi(0)$ $(0 \leq t \leq T)$ by $\mathscr{A}_0^T$; then

$$u = \xi(o) - \mathrm{E}_0(\xi(o)/\mathscr{A}_0^T).$$

---

* Translation of Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 19 (1970), 89–99. (Hungarian) MR 40 #6712.

AMS 1970 subject classifications. Primary 60G10, 62F10; Secondary 60G15, 62A10.

Clearly

(1.3) $$u(\zeta(t)+c) = \zeta(o)+c-\mathrm{E}_\theta(\zeta(o)/\mathscr{A}_0^T) = u(\zeta(t))+c,$$

that is $u \in \mathscr{K}$ and

$$\mathrm{E}_\theta(u) = \mathrm{E}_\theta\zeta(0) - \mathrm{E}_\theta(\mathrm{E}_\theta(\zeta(0)|\mathscr{A}_0^T)) = \theta.$$

Therefore u is an unbiased estimate of θ. If $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$ we have, on account of the orthogonality of the variables $\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ and $\hat{\theta} - \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$,

$$\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta})^2 = \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}-\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T))^2 + \mathrm{E}_\theta(\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T))^2$$

(1.4) $$\geq \mathrm{E}_\theta[\hat{\theta}-\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)]^2.$$

If $\hat{\theta}$ is a correct estimate, then $\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ remains a correct estimate. We show that the inequality

(1.5) $$\hat{\theta}_1 - \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}_1|\mathscr{A}_0^T) = \hat{\theta}_2 - \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T)$$

is valid for arbitrary correct estimates $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$. The equality holds here almost everywhere.

It is clear that

$$\hat{\theta}_1(\zeta(t)) - \hat{\theta}_2(\zeta(t)) = \hat{\theta}_1(\zeta(t)-\zeta(0)) - \hat{\theta}_2(\zeta(t)-\zeta(0))$$

(1.6) $$= \hat{h}(\zeta(t)-\zeta(0)),$$

so that $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$ is a functional of $\xi(t)-\xi(0)$ which we denote by $\hat{h}$. It follows from a well-known property of conditional expectations that

(1.7) $$\mathrm{E}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) = \hat{h}(\zeta(t)-\zeta(o)).$$

Formulas (1.6) and (1.7) yield

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_1|\mathscr{A}_0^T) = \mathrm{E}(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) + \hat{h}(\zeta(t)-\zeta(0)) = \mathrm{E}(\hat{\theta}_2|\mathscr{A}_0^T) + \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$$

so that (1.5) is established. The relation

$$\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt - \mathrm{E}_\theta\left(\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt \,\Big|\, \mathscr{A}_0^T\right) = \zeta(0) - \mathrm{E}_\theta(\zeta(o)|\mathscr{A}_0^T)$$

is a particular case of (1.5).

It follows from (1.4) and (1.5) that

$$\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta})^2 \geq \mathrm{E}_\theta(u)^2,$$

for arbitrary $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$ and we have proved the following statement:

$$= \frac{\zeta(0)+\zeta(T)+\lambda \int_0^T \zeta(t)\,dt}{2+\lambda T},$$

hence

$$\mathrm{E}\left(\zeta(0)\,|\,\mathscr{A}_0^T\right) = -\frac{\lambda \int_0^T (\zeta(t)-\zeta(0))\,dt + (\zeta(T)-\zeta(0))}{2+\lambda T}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\int \zeta(t)\,dt\,|\,\mathscr{A}_0^T\right) = \frac{2\int_0^T (\zeta(t)-\zeta(0))\,dt - T(\zeta(T)-\zeta(0))}{T(2+\lambda T)}.$$

2. Pitman's estimates. If we assume the existence of a density function, we can express the Pitman estimate for a sample $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ of identically distributed but not independent random variables in a form which differs from (1.2). Let $p_\theta(x_1, \cdots, x_n)$ be the joint density function of the random variables $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$. The random variables $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_2 - \xi_1, \cdots, \eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}$ then have the joint density $p_0(y_1, y_2, \cdots, y_n) = p_0(y_1, y_2 + y_1, \cdots, y_n + y_1)$. Therefore

$$\mathrm{E}_\theta(\zeta_1\,|\,\zeta_2-\zeta_1, \ldots \zeta_n-\zeta_1) = \mathrm{E}_\theta(\zeta_1\,|\,\eta_2, \ldots \eta_n) = \frac{\int t p_\theta(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt}{\int p_\theta(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt},$$

hence, substituting $t = \xi_1 - x$, we obtain

$$\mathrm{E}_\theta(\zeta_1\,|\,\mathscr{A}_1^n) = \zeta_1 - \frac{\int x p_\theta(\zeta_1-x, \zeta_2-x, \ldots \zeta_n-x)\,dx}{\int p_\theta(\zeta_1-x, \zeta_2-x, \ldots \zeta_n-x)\,dx}.$$

We combine this with (1.2) and get the estimate

$$\hat{\theta} = \frac{\int x p_\theta(\zeta_1-x, \zeta_2-x, \ldots \zeta_n-x)\,dx}{\int p_\theta(\zeta_1-x, \zeta_2-x, \ldots \zeta_n-x)\,dx}. \tag{2.1}$$

This estimate exists even if the expected value of the ξ_i does not exist (for the case of the Cauchy distribution see [3]). Similarly one can see that

$$\mathrm{E}_\theta(\zeta_1^2\,|\,\mathscr{A}_1^n) = \frac{\int t^2 p_\theta(t, \eta_2+t, \ldots, \eta_n+t)\,dt}{\int p_\theta(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt} =$$

$$= -\xi_1^2 + 2\xi_1 \mathrm{E}\,(\xi_1|\mathscr{A}_1^n) + \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx}.$$

Using (1.8) one gets

$$(2.2)\ \mathrm{Var}\,(\xi_1|\mathscr{A}_1^n) = \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx} - \left(\frac{\int x p_0(\xi_1 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \ldots \xi_n - x)\, dx}\right)^2.$$

Stein [9] proved that the estimate (2.1) is an admissible estimate of θ provided that (i) the expression (2.2) raised to the power $3/2$ has a finite expected value and (ii) the observations are independent. (The loss function which occurs in the definition of admissibility is here and in the following the expected value of the squared deviation from the parameters.) Clearly, the theorem is also valid for stationary sequences.

Example 2.1. Let $\xi(n)$ be a stationary Gaussian sequence which satisfies the difference equation

$$\xi(n+k) + a_{k-1}\xi(n+k-1) + \ldots + a_0\xi(n) = \varepsilon(n+k).$$

Here $\varepsilon(n)$ $(\mathrm{E}\varepsilon(n) = 0,\ \mathrm{Var}\,\varepsilon(n) = 1)$ is an independent Gaussian sequence.

It is known (see [1]) that

$$p_0(x_1, x_2, \ldots, x_N) = c_k \exp\{-\tfrac{1}{2}[(x_1, \ldots, x_N)\, R(x_1, \ldots, x_N)^*]\},$$

where

$$R = \begin{pmatrix} a_k^2 & a_k a_{k-1} & \cdots & a_k a_0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_k^2 + a_{k-1}^2 & a_{k-1}a_{k-2} + a_k a_{k-1} & \cdots & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & a_k^2 \end{pmatrix}$$

($a_k = 1$, $a_l = 0$ if $l < 0$ or $l > k$, the asterisk $*$ denotes the complex conjugate). That is the elements of R are given by

$r_{ij} = r_{ji}$ and $r_{N-i,N-j} = r_{ij}$ and (only for elements with $i < N/2$ and $j > i$)

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } j + i > k + 1 \\ \sum_{l=0}^{i} a_{k-l}^2 & \text{if } i = j \\ \sum_{l=0}^{i} a_{k-l}\, a_{k+(i-j)-l} & \text{if } j > i. \end{cases}$$

The Pitman estimate (2.1)

$$\frac{\int x\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-x,\dots x_N-x)R(x_1-x,\dots x_N-x)'\right\}dx}{\int\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-x,\dots x_N-x)R(x_1-x,\dots x_N-x)'\right\}dx}$$

agrees with the maximum likelihood estimate; this can be seen by a simple but tedious computation.

In particular, for $k=1$ one has

$$\xi(n+1) = \varrho\,\xi(n)+\varepsilon(n+1),$$

and obtains

$$\xi_1 - \mathrm{E}_\theta(\xi_1|\mathscr{A}_2^N) = \frac{\xi_1+\xi_N+(1-\varrho)\sum_2^{N-1}\xi_i}{2+(N-2)(1-\varrho)}$$

and

$$\mathrm{E}_\theta(\xi_1|\mathscr{A}_2^N) = -\frac{(\xi_N-\xi_1)+(1-\varrho)\sum_2^{N-1}(\xi_i-\xi_1)}{2+(N-2)(1-\varrho)}.$$

We define the Pitman estimate for a time-continuous stationary process whose expectation does not exist in the following way. Let the measure P_θ which belongs to the process $\xi(t)$ be absolutely continuous with respect to a measure Q and let

$$\frac{dP_\theta}{dQ}(\xi(t)) = f_\theta(\xi(t))$$

be its Radon-Nikodým derivative.

Define the Pitman estimate of θ by

$$\hat{\theta} = \frac{\int x f_\theta(\xi(t)-x)\,dx}{\int f_\theta(\xi(t)-x)\,dx}. \tag{2.3}$$

The estimates (2.3) and (1.2) agree if the expected value of $\xi(t)$ exists; we have shown this for the time-discrete case. One can also show in this way, for the example of §1, that the maximum likelihood estimate and the Pitman estimate agree.

3. **Admissible estimates.** In case of Doob's one-dimensional, elementary, stationary Gaussian process [2] one can directly show that the maximum likelihood estimate, respectively the Pitman estimate, is admissible. The extension of Stein's proof to stochastic processes remains an open question, but it seems that the extension could be carried out. To prove the admissibility one needs the

method of Hodges and Lehmann [5] which we repeat here for the sake of completeness.

Suppose that the stationary Gaussian process is $n-1$ times differentiable and that it satisfies the differential equation

$$d\xi^{(n-1)}(t)+[a_{n-1}\xi^{(n-1)}(t)+\dots a_0(\xi(t)-\theta)]\,dt = dw(t). \tag{3.1}$$

Here $w(t)$ is the well-known Wiener process with the parameters $\mathrm{E}\,dw(t)=0$, $\mathrm{E}(dw)^2=dt$. It is known that the spectral density of $\xi(t)$ has the form

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|(i\lambda)^n+a_{n-1}(i\lambda)^{n-1}+\dots+a_0|^2}\,.$$

We denote the measure belonging to the process $\xi(t)$ by P_θ; this emphasizes that $\mathrm{E}_\theta\xi(t)=\theta$. The following theorem is valid.

THEOREM 3.1. *The maximum likelihood estimate*

$$m^*=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]+a_0\int_0^T\xi(t)\,dt}{2a_1+a_0T} \tag{3.2}$$

is also a Pitman estimate and is an admissible estimate of the parameter $\mathrm{E}_\theta\xi(t)=\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$.

The proof of the theorem is carried out in several steps.

LEMMA 3.1. *Suppose that the stationary process* $\boldsymbol{\xi}(t)=(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))$ *satisfies the differential equation*

$$d\boldsymbol{\xi}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)\,dt+d\mathbf{w}(t) \tag{3.3}$$

where $\mathbf{w}(t)$ *is an* n*-dimensional (possibly degenerate) Wiener process with* $\mathrm{E}\mathbf{w}(dt)=0$ *and with covariance matrix* $\mathrm{E}(\mathbf{w}(dt)\mathbf{w}^*(dt))=B_w(0)\,dt$ *(the eigenvalues have negative real parts). Then*

$$B(t)=\mathrm{E}\,\{\boldsymbol{\xi}(s+t)\boldsymbol{\xi}^*(s)\}=e^{At}B(0) \tag{3.4}$$

and

$$AB(0)+B(0)A^*=-B_w(0), \tag{3.5}$$

the latter equality implying that

$$B^{-1}(0)A+A^*B^{-1}(0)=-B^{-1}(0)B_w(0)B^{-1}(0). \tag{3.6}$$

The proof of the lemma is given in Doob's article [2]. We give here a new proof which is based on the properties of stochastic differential equations. We multiply (3.3) by $dw^*(t)$, take the expectation and obtain (on account of the independence of $dw(t)$ and $\xi(t)$)

$$\mathrm{E}\, d\xi(t)\, dw^*(t) = B_w(o)\, dt$$

or

$$\mathrm{E}\,\xi(t+dt)\, dw^*(t) = B_w(o)\, dt\,.$$

We use this and multiply first (3.3) by $\xi^*(t)$, then multiply $\xi(t+dt)$ by the complex conjugate of the left- and right-hand sides of (3.3). We take expectations in both cases and obtain the relation

$$B(dt) - B(o) = AB(o)\, dt$$

$$B(o) - B(dt) = B(dt)\, A^*\, dt + B_w(o)\, dt\,.$$

Since $B(t)$ is continuous one obtains (3.5) by adding the last two relations. Equation (3.4) follows from

$$\lim_{t\to 0}\frac{B(t)\,B^{-1}(o) - E}{t} = A \quad (E \text{ is the identity matrix}).$$

The lemma is proved.

Let $\xi(t)$ be $n-1$ times differentiable and

$$\zeta_0(t) = \zeta(t)$$

$$\frac{d\zeta_0(t)}{dt} = \zeta_1(t)$$

$$\vdots \tag{3.1'}$$

$$\frac{d\zeta_{n-2}(t)}{dt} = \zeta_{n-1}(t)$$

$$d\zeta_{n-1}(t) = -\big(a_0(\zeta_0(t) - \vartheta) + a_1\,\zeta_1(t) + \ldots + a_{n-1}\,\zeta_{n-1}(t)\big)\, dt + dw(t).$$

This is the multidimensional analogue of the differential equations (3.1') and (3.1). Then

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_w(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

LEMMA 3.2. *If A has the form (3.7), then*

$$B^{-1}(0) = 2\begin{pmatrix} a_0a_1 & 0 & a_0a_3 & 0 & a_0a_5 \cdots a_0a_n \\ 0 & a_1a_2 - a_0a_3 & 0 & a_1a_4 - a_0a_5 & 0 \\ a_0a_3 & 0 & a_2a_3 - a_1a_4 + a_0a_5 \; 0 & & a_2a_n \\ \vdots & & & & \\ a_0a_n & & & & a_{n-1}a_n \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

if n is odd. Here $a_n = 1$ and $a_i = 0$ if either $i < 0$ or $i > 0$, while the elements of $B_{ij}^{-1}(0)$ are

$$b_{ij}^{-1} = b_{ji}^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{if } \quad i \equiv j+1 \pmod 2 \\ 2\sum_{k=0}^{i}(-1)^k a_{i-k}a_{j+1+k}, & \text{if } \quad i \equiv j \pmod 2), i < j. \end{cases}$$

Substitution into (3.6) shows that the lemma is correct. We turn now to the derivation of the Radon-Nikodým derivatives which belong to the measures P_0 and P_θ belonging to the processes $\xi(t)$ $[E_0(\xi(t)) = 0]$ and $\xi(t) + \theta[E(\xi(t)) = \theta]$ respectively.

LEMMA 3.3. *The following relation holds*:

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\theta^2(a_0T + 2a_1) + a_0^2\theta\int_0^T \xi(t)\,dt\right.$$

$$\left. + a_0\theta\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}[\xi^{(k)}(T) + (-1)^k\xi^{(k)}(0)]\right\}. \tag{3.9}$$

PROOF. Suppose that the process satisfies equation (3.11) and let $\phi_\theta(x_0, \cdots, x_n)$ be the density function of $\xi_0(0), \cdots, \xi_{n-1}(0)$. On the basis of a well-known theorem of Skorohod ([8], p. 131, English p. 117) one has

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t))$$

$$= \frac{\varphi_\theta(\xi(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T \alpha_i^2(\xi(t))\,dt + \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T \alpha_i(\xi(t))\,dw_i(t)\right\}$$

$$= \frac{\varphi_\theta(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\theta^2T + a_0\theta\int_0^T dw(t)\right\},$$

where

$$(\alpha_0(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_{n-1}(\mathbf{x})) = (A_\theta - A)\,\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, \theta a_0).$$

According to Lemma 3.2 one has

$$\frac{\varphi_\theta(\xi(0))}{\varphi_0(\xi(0))} = \exp\left\{-a_0 a_1 \theta^2 + 2a_0\theta \sum_{k=0}^{s} a_{2k+1}\zeta_{2k}(0)\right\}.$$

On the other hand, if we replace the integration with respect to $dw(t)$ by the expression on the left-hand side of (3.1'), we obtain (for $\theta = 0$)

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\zeta(t)) = \exp\left\{-a_0 a_1 \theta^2 + 2a_0\theta \sum_{k=0}^{s} a_{2k+1}\zeta_{2k}(0)\right\}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\theta^2 T + a_0\theta\int_0^T [d\zeta_{n-1}(t) + a_{n-1}\zeta_{n-1}(t)\,dt + \dots + a_0\zeta_0\,dt]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\theta^2(a_0 T + 2a_1) + a_0^2\theta\int_0^T \zeta(t)\,dt\right.$$

$$\left. + a_0\theta\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}[\zeta^{(k)}(T) + (-1)^k\zeta^{(k)}(0)]\right\},$$

so that the lemma is proved.

According to a well-known factorization theorem (see Lehmann [*], p. 75) $a_0\int_0^T \xi(t)dt + \Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k+1}[\xi^{(k)}(T) + (-1)^k\xi^{(k)}(0)]$ is a sufficient statistic and the maximum likelihood estimate (3.2) is, according to the Blackwell-Kolmogorov-Rao inequality, a minimum variance unbiased estimate. It follows from the Lehmann-Scheffé theorem ([*], p. 183) that the sufficient statistic is complete and also that the maximum likelihood estimate (3.2) is the only minimum variance unbiased estimate. We do not go into the explicit computation here of the Pitman estimate on the basis of (2.3).

It is easy to show that (see Grenander [*], p. 243)

$$m^* = \frac{1}{a_0(2a_1 + a_0 T)}. \tag{3.10}$$

Let $\hat{\theta}(\xi(t))$ be an estimate of θ and $E_\theta(\hat{\theta}) = \theta + b_{\hat{\theta}}(\theta)$. According to the Cramér-Rao inequality

$$\operatorname{Var}_\theta^2(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 - b_{\hat{\theta}}^2(\theta) \geq \frac{(1 + b_{\hat{\theta}}'(\theta))^2}{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}(\zeta(t))\right)^2}. \tag{3.11}$$

Since m^* is a sufficient statistic, one has

$$E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{Var}_\theta(m^*)}=a_0(2a_1+a_0T).$$

(this can also be seen by means of a simple computation).

LEMMA 3.4. *If the estimate* $\hat{\theta}$ *satisfies the inequality*

$$b_{\hat\theta}^2(\theta)+\frac{[1+b'_{\hat\theta}(\theta)]^2}{a_0(2a_1+a_0T)}\le\frac{1}{a_0(2a_1+a_0T)}$$

for all θ, *then* $b_{\hat\theta}(\theta)\equiv 0$ $(-\infty<\theta<\infty)$.

PROOF. It follows from the assumption that $|b_{\hat\theta}(\theta)|$ is bounded $(-\infty<\theta<\infty)$ and that $b'_{\hat\theta}(\theta)$ is nonpositive. Therefore $b_{\hat\theta}(\theta)$ is a monotone decreasing function of θ; since it is bounded there exist sequences θ_n and θ'_n $(\theta_n\to-\infty,\ \theta'_n\to\infty)$ such that $b'(\theta_n)$ and $b'(\theta'_n)$ converge to zero. The statement of the lemma follows.

Finally we need a lemma due to Hodges and Lehmann (see [5]):

LEMMA 3.5. *If the estimate* θ^* *satisfies the Cramér-Rao inequality for every* θ *and if the validity of the inequality*

$$b_{\hat\theta}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2}\le b_{\theta^*}^2+\mathrm{Var}_\theta(\theta^*)\tag{3.12}$$

for an arbitrary estimate $\hat{\theta}$ *implies that* $b_{\hat\theta}(\theta)\equiv b_{\theta^*}(\theta)$, *then* θ^* *is an admissible estimate of* θ.

PROOF. We prove that the validity of the inequality $E_\theta(\hat\theta-\theta)^2<E_\theta(\theta^*-\theta)^2$ (for all θ) implies that $\hat\theta=\theta^*$, that is θ^* is admissible. If

$$E_\theta(\hat\theta-\theta)^2\le E_\theta(\theta^*-\theta)^2=b_{\theta^*}^2(\theta)+\frac{[1+b'_{\theta^*}(\theta)]^2}{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2},$$

then, according to (3.1), the inequality

$$\begin{aligned}b_{\hat\theta}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2}&\le b_{\hat\theta}^2(\theta)+\mathrm{Var}_\theta(\hat\theta)=E_\theta(\hat\theta-\theta)^2\\&\le b_{\theta^*}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\theta^*}(\theta))^2}{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2}\end{aligned}$$

is also satisfied. But this means that $b_{\tilde{\theta}}(\theta) = b_{\theta^*}(\theta)$ and also $b'_{\tilde{\theta}}(\theta) = b'_{\theta^*}(\theta)$. Therefore $\mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta}) = \mathrm{Var}_\theta(\theta^*)$ and $\mathrm{E}_\theta(\tilde{\theta} - \theta)^2 = \mathrm{E}_\theta(\theta^* - \theta)^2$, that is $\tilde{\theta} = \theta^*$, q.e.d.

Theorem 3.1 follows immediately from Lemmas 3.4 and 3.5.

The proof indicates that the method cannot be extended to the estimation of the expectation of multivariate, stationary Gaussian processes. It is known [10] that admissibility is not true for independent observations in case $n \geq 3$ (n is the number of unknown mean values). It is an open question whether the admissibility is true for the two-dimensional stationary Gaussian process.

It would also be interesting to study the connection between minimax estimates and the Pitman estimate (2.3).

We shall investigate Pitman estimates for the Cauchy process later.

BIBLIOGRAPHY

[1] M. Arató, *On the statistical examination of continuous state Markov processes*. I, IV, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 14 (1964), 13–34; ibid. 15 (1965), 107–124. (Hungarian) MR 37 #3645; 38 #763.

[2] J. L. Doob, *The elementary Gaussian processes*, Ann. Math. Statist. 15 (1944), 229–282. MR 6, 89.

[3] M. A. Girshick and L. J. Savage, *Bayes and minimax estimates for quadratic loss functions*, Proc. Second Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probability (1950), Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1951, pp. 53–73. MR 13, 571.

[4] U. Grenander, *Stochastic processes and statistical inference*, Ark. Mat. 1 (1950), 195–277. MR 12, 511.

[5] J. L. Hodges and E. L. Lehmann, *Some applications of the Cramér-Rao inequality*, Proc. Second Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probability (1950), Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1951, pp. 13–22. MR 13, 479.

[6] E. L. Lehmann, *Testing statistical hypotheses*, Wiley, New York, 1959. MR 21, #6654.

[7] E. J. G. Pitman, *The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form*, Biometrika 30 (1939), 391–421.

[8] A. V. Skorohod, *Studies in the theory of random processes*, Izdat. Kiev. Univ., Kiev, 1961; English transl., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965. MR 32 #3082a,b.

[9] C. M. Stein, *The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 970–979. MR 22 #278.

[10] W. James and C. M. Stein, *Estimation with quadratic loss*, Proc. Fourth Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probability, vol. 1, Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1961, pp. 361–379. MR 24 #A3025.

Received 20 June 68

Translated by:
E. Lukacs