SZÁMÍTÁSTECHNIKAI MÓDSZEREK A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ELMÉLETÉBEN ÉS STATISZTIKÁJÁBAN, BIOLÓGIAI ALKALMAZÁSOKKAL*

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

1. § Bevezetés

Sztochasztikus folyamatok vizsgálatára éppen a valóság teljesebb leírása érdekében került sor, abból a felismerésből kiindulva, hogy a független valószínűségi változók sorozatai túlzott idealizálást jelentenek természeti jelenségek leírásánál, hiszen szemléletünk alapján is világos, hogy a jelenségeket leíró véletlen mennyiségek időbeni egymásutánjai az esetek zömében nem lehetnek statisztikailag függetlenek. Érdemes megemlíteni, hogy a sztochasztikus folyamatok legjobban kimunkált fejezetei eredetüket a botanikából, nyelvészetből s a híradástechnikából származtatják: A *Brown*-mozgás matematikai leírása vezetett a *diffúziós folyamatok* tanulmányozásához; az élő nyelv betűi egymásutánjainak statisztikai vizsgálata a *Markov-láncok elméletéhez*, míg a *hírközlő csatornák* sztochasztikus leírásának legjobban a stacionárius folyamatok felelnek meg. Természetesen a fenti megjegyzés csak a folyamattípusok keletkezésére vonatkozólag igaz. A *diffúziós Markov-folyamatok* elméletének fejlődésében kiemelkedő hatása volt a fizikának, különösen azon körülmény felismerésének, hogy a diffúziós folyamatok *sztochasztikus differenciálegyenlet*tel írhatók le.

A természetben lejátszódó események nagy része differenciálegyenletekkel írható le — ha csak az átlagokat vesszük figyelembe. Amennyiben szükségünk van a véletlenszerű viselkedés megmagyarázására is, akkor differenciálegyenleteink sztochasztikusakká válnak.

Legegyszerűbb esetben a konstans együtthatós homogén differenciálegyenlet

$$x^{(k)}(t)+a_{k-1}x^{(k-1)}(t)+\cdots+a_0x(t)=0 \tag{1.1}$$

helyett a

$$d\xi^{(k-1)}(t)+[a_{k-1}\xi^{(k-1)}(t)+\cdots+a_0\xi(t)]\,dt=dw(t) \tag{1.2}$$

(ahol $w(t)$ a *Brown*-mozgás folyamata) sztochasztikus egyenletet vizsgáljuk, melynek realizációi véletlen függvények s $\xi(t)$ kovariancia függvénye $B(t)=M\xi(s)\xi(s+t)$ az (1.1) egyenletet elégíti ki. Az (1.2) leírásnak előnye, hogy mindössze néhány paraméter segítségével (az a_i együtthatók és a $w(t)$ *Brown*-mozgás folyamat lokális szórásnégyzete) igen bonyolult működésű rendszerek sztochasztikus viselkedése megadható.

A gyakorlatban két igen fontos kérdés merül fel:

a) Ismert a „fizikai" jelenséget leíró folyamat jellege, meg kell határozni —

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológéptudomány kérdései" című közös vitaülésén.

megfigyelések alapján — a benne szereplő paramétereket, azok minden valószínűségszámítási jellemzőjével (eloszlás, momentumok stb.) .

b) Vizsgálatot kell végezni — megfigyelési eredményekkel történő összehasonlítás útján — a folyamatot leíró differenciálegyenlet jellegére vonatkozóan. (Nem kívánok kitérni más problémákra, mint pl. a sztochasztikus rendszerek vezérlése, irányítása stb.)

Mindkét — ilyen egyszerűen feltehető — kérdésre a válaszadás nemcsak szigorúan vett valószínűségelméleti és statisztikai vizsgálatokat igényel. A megoldásokat ugyanis a legegyszerűbb esetekben is csak számológépek igénybevételével tudjuk megkapni. A továbbiakban éppen azokra az eredményekre szeretném a figyelmet felhívni, amelyek a számológép alkalmazásának jelentőségére mutatnak, így a levezetésekkel bizonyítható eredményekre csak hivatkozni fogok.

Az időben folytonos folyamatok statisztikai jellemzőinek leírására nem mindig elegendő véges sok paraméter, másrészt a folyamat nem pontos ismerete szükségessé teszi esetleges felesleges információk tárolását is. A folyamatok spektrális jellemzése a korrelációs függvény, ill. spektrál eloszlásfüggvény alapján történik. Stacionárius esetben a $B(t)$ kovariancia függvény definícióját és a spektrál eloszlással való kapcsolatát az

$$M\xi(s)\xi(s+t) = B(t) = \int e^{i\lambda t}\, dF(\lambda)$$

összefüggés adja meg (ahol az integrálás a $(-\pi, \pi)$ intervallumon ill. $(-\infty, \infty)$-ben történik attól függően, hogy diszkrét vagy folytonos idejű a folyamat).

A korrelációs. ill. spektrál eloszlásfüggvény empirikus úton történő meghatározása elképzelhetetlen elektronikus számológépek nélkül. Matematikai statisztikai vizsgálatokon túl ennek a speciális problémakörnek igen kiterjedt számítástechnikai irodalma (lásd pl. ROBINSON (1968) könyvét s az ott felsorolt irodalmat) és ma már klasszikus eredményei is vannak (vö. TUKEY (1965)) kimondottan számológépes vonatkozásokkal. A modern nagyteljesítményű számológépek programkönyvtárának tekintélyes részét alkotják az idősor elemzéssel foglalkozó programok.

Ebben a vonatkozásban a *Magyar Tudományos Akadémia* CDC 3300-as új gépe megfelelő lehetőségeket biztosít mind a matematikai kutatások továbbfejlesztéséhez, mind az alkalmazások kiterjesztéséhez. Az Akadémia intézményei kutatóinak rendelkezésére álló programkönyvtár elég gazdag ahhoz, hogy standard feladatok megoldását könnyen megkapják, másrészt a *Számítástechnikai Központ Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályán* már most is folyik az idekerülő programkönyvtár kipróbálása és bővítése.

Nem kívánok teljes és átfogó képet nyújtani a sztochasztikus folyamatok elmélete és statisztikája számológépi vonatkozásairól, csak azokat a kutatásokat említem, melyekhez hazai eredmények és kísérletezések kapcsolódnak, itt is elsősorban szeretnék néhány szerény — de véleményünk szerint előremutató — kezdeményezésről beszámolni, melyet az MTA *Számítástechnikai Központ*ban kezdtünk el.

2. § Néhány statisztikai feladat

Tekintsük a konstans együtthatós (1.2) egyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ *Gauss*-folyamatot és tegyük fel, hogy az ismeretlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatókat $\xi(t)$ egy $0 \leq t \leq T$ realizációja alapján kívánjuk becsülni. A maximum likelihood becslések meghatározásához szükség van a likelihood függvény (*Radon—Nikodym* derivált) meghatározására. Ismeretes (vö. ARATÓ (1970), [2]), hogy

$$\frac{dP_A}{d(L^k \times W_x^1)}(\xi(t)) = \tag{2.1}$$

$$= (2\pi)^{-k/2}|B(0)|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=-i}^{i}(-1)^l a_{i-l}a_{i+l}\int_0^T [\xi^{(i)}(t)]^2\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{k-1}a_k}{2}T - \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}\left(\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}\right)[\xi^{(i)}(T)\xi^{(j)}(T)+(-1)^{j-i}\xi^{(i)}(0)\xi^{(j)}(0)]\right\},$$

ahol P_A a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó mértéket $L_x^k \times W_x^1$ pedig a *Lebesgue-* és feltételes *Wiener*-mérték szorzatát jelölik. A $B(0)$ mátrix az a_i együtthatók ismert függvénye (vö. ARATÓ (1970) [2]). A (2.1) összefüggésből látható, hogy az a_i együtthatók maximum likelihood becsléseiben lényeges szerepet játszanak az

$$s_i^2 = \int_0^T (\xi^{(i)}(s))^2\,ds, \quad \left(s_i^2(t) = \int_t^T (\xi^{(i)}(s))^2\,ds\right), \quad i = \overline{0,k-1},$$

statisztikák. A

$$v(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathrm{x}) = M\{\exp i(\alpha_0 s_0^2(t) + \dots + \alpha_{k-1}s_{k-1}^2(t))|\xi(t) = x\}$$

feltételes karakterisztikus függvény kielégíti a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_{k-1}^2} + \sum_{i=0}^{k-2} x_{i+1}\frac{\partial v}{\partial x_i} - (a_{k-1}x_{k-1} + \dots + a_0 x_0)\frac{\partial v}{\partial x_{k-1}} + \tag{2.2}$$

$$+ i(\alpha_{k-1}x_{k-1}^2 + \dots + \alpha_0 x_0^2)v = 0; \quad v(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathrm{x}) = 1,$$

(lásd ARATÓ (1970) [1] disszertáció) differenciálegyenletet. A (2.2) egyenlet megoldását általános alakban nem sikerült megkapni annak ellenére, hogy a fenti s_i^2 valószínűségi változók eloszlásainak vizsgálata kapcsolatban áll a többdimenziós *Schrödinger* egyenlet megoldásának vizsgálatával (vö. GELFAND—JAGLOM (1956) cikkét). A $k=1$ (PISZARENKÓ (1961), ARATÓ (1962)) és a megfelelő kétdimenziós (ARATÓ (1962)) esetekben sikerült a megoldást előállítani, azonban a karakterisztikus függvények ismerete alapján még igen keveset tudunk mondani a nekik megfelelő eloszlásokról. Az eloszlások meghatározása olyan numerikus munkát igényelt még, mely nagyteljesítményű számológépen is több órás gépidőt használ fel (lásd ARATÓ (1968), ARATÓ—BENCZUR (1970)). Érdemes itt megemlíteni, azt a tapasztalatot, hogy az URAL-2 gépi kódban írt programok gépidőigénye megegyezik az ICT gépre ALGOL nyelven írt azonos programokéval. Természetesen a programozási munka az előbbi esetben jóval nagyobb.

Gyakorlati szempontok figyelembevételével a (2.2) egyenlet tetszőleges k-ra numerikus úton való megoldását csak abban az esetben érdemes elvégezni, ha egyben a megfelelő eloszlások meghatározása is lehetséges. Ezen út helyett a következő eljárást választottuk, annak az újabb szempontnak kielégítésére is, hogy megvizsgálhassuk a diszkrét és folytonos idejű folyamatok „közelségének" problémáját is. A folytonos idejű folyamatot diszkrét idejűvel közelítjük s ez utóbbinak *Monte-Carlo* módszerrel előállított megfelelő számú realizációjából határozzuk meg a kívánt eloszlásokat. Egy ilyen típusú feladat gépi programja — még igen jól szervezett program esetén is — százas nagyságrendű gépórát igényel az Akadémia új gépén. A csak diszkrét idejű folyamatokra vonatkozó vizsgálatok száma igen nagy (lásd pl. Cox (1966), Orcutt—Winokur (1969)), azonban nem mutatják meg a folytonos folyamatokkal való kapcsolatot. A mi vizsgálataink alapja a folytonos leírás, melynek segítségével általánosabb eredményeket is kapunk.

Ennek a problémakörnek pontos matematikai megfogalmazásával foglalkozunk a következő pontban.

Az eddigiekben nem szóltunk sztohasztikus folyamatok regressziós feladatairól, melyek megoldása ugyancsak gépi módszerekkel történhet. Legyen a megfigyelési eredmény

$$\eta(t) = b_0 f_0(t) + \dots + b_n f_n(t) + \xi(t), \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

ahol $\xi(t)$ ismert struktúrájú (adott spektrál függvénnyel, $M\xi(t)=0$ várható értékű) folyamat, $f_i(t)$ $(0 \leqq i \leqq n)$ ismert függvénnyel s becsülni kívánjuk az ismeretlen b_i paramétereket. A legismertebb becslési eljárás — általános spektrum esetén — a legkisebb négyzetek módszere. A $\xi(t)$ folyamat spektrál sűrűségének autoregressziós folyamat spektrál sűrűségével való közelítése alapján adódó becslésének aszimptotikus viselkedése (lásd pl. Ibrahimov—Rozanov (1970)) azt mutatja, hogy a módszerrel jobb eredmények várhatók korlátos megfigyelési időtartam (T) esetén is. Az ennek megfelelő program megvalósítása a közeli jövő egyik fontos feladata.

Hasonlóan szükség van a spektrál sűrűségfüggvény autoregressziós közelítéséből adódó becslések tulajdonságainak vizsgálatára korlátos megfigyelési idő esetén. Az ilyen típusú becslések előnyben részesítendők a standard becslésekkel szemben (lásd Arató 1970, [1]). Az utóbbi két feladat részbeni megoldása is csak számológéppel valósítható meg.

3. § Sztochasztikus folyamatok imitálásával kapcsolatos problémák

Időben és állapotban diszkrét sztochasztikus folyamatok számológépen történő realizálásának ma már kialakult módszerei vannak (lásd. pl. Golenkó (1965), Naylor, Bálintfy (1966)). Ezzel szemben az időben és állapotban folytonos folyamatok szimulációs problémája megoldásának csak kezdeti lépéseire került sor. A *Wiener*-(*Brown*-mozgás) folyamatot független eloszlású változó sorozatok részletösszegeivel szoktuk helyettesíteni.

Vizsgáljuk a legegyszerűbb típusú folyamatokat — az ún. diffúziós *Markov*-típusúakat. Az egyszerűség kedvéért maradjunk az egydimenziós esetnél. Az $\eta(t)$ Markov folyamat szimulációjánál a következő tételből indulunk ki (lásd Gihman—Szkorohod (1969)): ha $\eta(t)$ kielégíti a

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + \sigma(t, \eta(t))dw(t) \tag{3.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, akkor $\eta(t)$ *Markov*-folyamat, melynek átmenetvalószínűségei egyszerűen megadhatóak (a tétel megfordítása is igaz).

A (3.1) összefüggés alakjából kaphatjuk — a kezdeti eloszlás megválasztása után — az $\eta(t)$ folyamat diszkrét realizációját. Ennek az eljárásnak a megvalósításához csak a $w(t)$ *Wiener*-folyamat realizálására van szükség. A dt véges intervallumhossz megválasztásakor még nem tudunk semmit mondani a diszkrét (jelöljük ezt $\tilde{\eta}(t)$-vel) folyamat és a folytonos folyamat távolságáról. Sőt még az sem bizonyított, hogy $\tilde{\eta}(t)$ azonos *Markov*-típusú lesz.

Stacionárius Markov-folyamatoknál — többdimenziós folyamatot feltételezve — (ha még azt is feltesszük, hogy a folyamat *Gauss*-típusú) a realizálás feladata pontosan elvégezhető, ugyanis ebben az esetben a diszkrét stacionárius, *Gauss*-, *Markov*-folyamat a

$$\xi(t+1) = Q\xi(t)+\varepsilon(t+1), \tag{3.2}$$

míg a folytonos folyamat a

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt+d\mathbf{w}(t) \tag{3.3}$$

egyenletet elégíti ki, ahol az A és a Q mátrixok közötti kapcsolat a következő:

$$Q=e^{A\,dt}. \tag{3.4}$$

Az $\varepsilon(t)$ sorozat kovariancia mátrixára fennáll, hogy

$$B_\varepsilon = B(0)-e^{A\,dt}B(0)e^{A^*dt} \tag{3.5}$$

és

$$AB(0)+B(0)A^* = -B_w. \tag{3.6}$$

$(M(d\mathbf{w})(d\mathbf{w})^*=B_w\,dt)$. A Q és B_ε mátrixok egyértelműen meghatározzák a diszkrét, míg A és B_w a folytonos folyamatot. A (3.2)—(3.6) összefüggések alapján az 1. pontban említett autóregressziós folyamatok szimulációja elvégezhető a kezdeti $\xi(0)$ megadásával és független normális eloszlású $\varepsilon(t)$ változók generálásával. A diszkrét folyamat általában már nem lesz autoregressziós típusú. A (3.6) egyenlet megoldása $B(0)$-ra (ill. $B^{-1}(0)$-re) a kezdeti eloszláshoz szükséges. Általános esetben numerikus módszerekkel adódik (3.6) megoldása, autoregressziós esetben egzakt alakban is nyerhető (lásd ARATÓ (1970), [2]).

Az előző pontban említettük, hogy az egydimenziós stacionárius $\xi(t)$ *Gauss*-, *Markov*-folyamat λ csillapodási paramétere maximum likelihood becslésének karakterisztikus függvényéből még hosszas numerikus számolással lehet csak meghatározni az eloszlást (ARATÓ—BENCZUR (1970)). Ha a $\xi(t)$ folyamat helyett, mely a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)dt+dw(t)$$

egyenletnek tesz eleget, az

$$\eta(t)=\xi(t)+m, \qquad (0\leqq t\leqq T),$$

folyamat realizációja áll rendelkezésünkre, ahol a λ paraméteren kívül m is becsülendő, a számítások még bonyolultabbá válnak. Ismeretes a probléma elégséges statisztikáinak feltételes karakterisztikus függvénye az $m=0$ esetben (ARATÓ (1970), [2]), azonban — a legegyszerűbb becsléseket használva — a $\int_0^T \xi(s)ds$ és $\int_0^T \xi^2(s)ds-$ $-(\int_0^T \xi(s)ds)^2$ változók együttes karakterisztikus függvényét már nem sikerült meghatározni. A CDC 3300-as gépre írt szimulációs program — mely az időben folytonos folyamat fent leírt átírása útján készült — nemcsak a λ és m paraméterek becsléseinek viselkedéséről ad felvilágosítást, hanem arról is, hogy adott m esetén mennyire felelnek meg a diszkrét eredmények az elméletileg korábban kapottaknak. További felvilágosítást kaptunk a diszkrét és folytonos folyamatok közelségéről, valamint a megfelelő becslések eltéréséről is. Ez utóbbi kérdésre szigorú matematikai vizsgálatok és megfontolások útján semmilyen felvilágosítást nem kaptunk eddig.

A fenti programot BENCZUR ANDRÁSsal közösen készítettük. Hasonló probléma — a másodrendű egyenlet, az ún. *Langevin* egyenlet — megoldásával foglalkozik H. GAUDI ISTVÁN és GY. NÉMETH TERÉZ programja.

4. § Példák sztochasztikus folyamatok alkalmazására a modell alkotásban

4.1. A *Bush—Mosteller*-féle (lásd BUSH—MOSTELLER (1955), ATKINSON (1965)) sztochasztikus tanulási modell feltételezése esetén, amikor is az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ reakciók $(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \mathbf{p}$ bekövetkezési valószínűségei minden lépésben egy a véletlentől, a kísérleti alanytól és a kísérletezőtől is függő Q sztochasztikus mátrix lineáris leképezése útján változnak (jelölje $\tilde{\mathbf{p}}$ az új bekövetkezés valószínűségi vektort, akkor $\tilde{\mathbf{p}} = Q\mathbf{p}$), a következő problémák vetődnek fel. Kísérleti eredmények értékelésekor — a legegyszerűbb *Markov*-típusú függés feltételezése esetén is — a modellben szereplő paraméterek becslése nemlineáris egyenletrendszerek megoldására vezet, így azt csak számológép felhasználásával tudjuk konkrét esetekben elvégezni. A becslések megbízhatóságára (eloszlásaikra, momentumaikra) vonatkozóan csak aszimptotikus eredmények ismertek. A becslések pontos eloszlásainak meghatározása legtöbbször csak szimulációval végezhető el. A feladatoknak szimulációval történő megoldása lehetőséget nyújt annak a problémának a vizsgálatára is — melyet matematikai apparátussal alig tudunk kezelni — hogy mennyiben felel meg a valóságnak a linearitás feltevése, a markovitás feltételezése az eseménysorozat változásában és í.t. Szimulációs úton lehetőségünk van különböző hipotézisek hatásának összehasonlítására és ily módon a reális kísérleti eredményekkel való összevetésre. A megfelelő — lehetőleg optimális — generálási módokkal foglalkoztunk s a CDC gépen rendelkezésre állnak ilyen típusú feladatok megoldására a programok.

4.2. A motorikus neuronok s az izomműködés közötti kapcsolatok *Cetlin—Kotov*-féle modelljében (vö. CETLIN—KOTOV (1968)) választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy a természetes állapotban milyen kapcsolattal (függvényszerű — és sztochasztikus) írható le a mozgató egység (izomszálak meghatározott összessége, ahol az izomszál hossza, $x(t)$ változik), az őket gerjesztő motorikus neuronok, valamint az ugyancsak a motorikus neuronok által gerjesztett, de azokra impulzus sorozat formájában visszaható RENSHAW sejtek között. CETLIN és KOTOV szerint a megfeszített izom dinamikáját az

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t) - mg$$

egyenlet írja le, ahol az m, k, μ együtthatókat fiziológiai mérések alapján lehet megadni, mg az izom terhelése, $F(t)$ pedig a mozgató egységekből adódó feszítés értéke.

A mozgató egység működését az $f(t)$ feszítési függvény írja le, ahol első közelítésben $f(t)$ — a gerjesztés után — lineárisan változik maximális értékének eléréséig, majd exponenciálisan csökken.

Egy motorikus neuront két függvénnyel: a $\varphi_M(t)$ állapotfüggvénnyel, és a $P_M(t)$ küszöbértékfüggvénnyel írjuk le. A $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényt könnyítő (amikor is

$\varphi_M(t)$ növekszik) és fékező (amikor is $\varphi_M(t)$ csökken) külső hatások érhetik. Külső hatás hiánya esetén $\varphi_M(t)$ exponenciálisan csökken. A neuron gerjesztődik t_0-ban ha $\varphi_M(t_0) \geqq P_M(t_0)$. Gerjesztés után impulzust küld a mozgató egységbe (t_2 időkéséssel), az állapotfüggvény 0-vá válik ($\varphi_M(t_0+\varepsilon) = 0$) míg $P_M(t)$ a P_{Mi} értékkel növekszik és exponenciálisan csökkenni kezd (P_{M_0}-ig).

A motorikus neuronok $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényeit az izom hosszától függő konstans érték s $\xi(t)$ fehér zaj folyamat összege adja meg (vigyázva arra, hogy $\varphi_M(t)$ értéke nagy valószínűséggel pozitív legyen). Az egyes neuronok fehér zaj folyamatait függetleneknek tételezik fel. A *Renshaw* sejteket $\varphi_R(t)$ állapotfüggvényük, $P_R(t)$ küszöbérték-függvényük és $\vartheta_R(t)$ az utolsó gerjesztésük óta eltelt időfüggvénye jellemzi. E három függvényt elemi függvények segítségével szokás megadni.

A motorikus neuronok számát, kapcsolatukat a mozgató egységekkel, valamint a *Renshaw*-sejtekkel, táblázatban szokás megadni (esetleg véletlenszerűen is) imitálás esetén.

Ezzel a modellel sikerült megmagyarázni — elsősorban a *Renshaw*-sejtek deszinkronizáló hatását hangsúlyozva — normális viszonyok között a motorikus neuron kötegek aszinkron működését. A rendszert jellemző paraméterek változtatásával nem sikerült választ kapni patológikus jelenségekre, ami arra utal, hogy a fenti modell túl erős egyszerűsítéseket tartalmaz.

Már CETLIN—KOTOV cikkében szerepel utalás arra, hogy a motorikus neuronok véletlen pulzációja jellegének megváltoztatása megoldhatná ezeket a kérdéseket. Ha az előbb ismertetett modellben a $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényt megadó $\xi(t)$ független fehér zaj folyamatok helyett függő és stacionárius *Markov*-típusú folyamatokat tételezünk fel — ahol a

$$\xi(t) = Q\xi(t-1)+\varepsilon(t)$$

összefüggéssel leírt $\xi(t)$ folyamat Q mátrixát tekintjük a *Renshaw*-sejtek működésétől függőnek — az aszinkron és szinkron működésre Q karakterisztikus gyökeinek valós ill. komplex volta ad felvilágosítást. Komplex karakterisztikus gyökű Q mátrix esetén $\xi(t)$ véletlen periódussal működő folyamatot ír le, melynek alapján a motorikus neuron kötegek szinkron működése megmagyarázhatóvá válik. Egy ilyen típusú program elkészítése még nagyteljesítményű gép figyelembe vétele esetén is mintegy egyéves munkát vesz igénybe.

IDÉZETT IRODALOM

АРАТО, М. (1962): Оценка параметров стационарного марковского процесса, Д. А. Н. **145**, Но 1, 13—16.

(1968): Вычисление доверительных границ для параметра „затухания" комплексного стационарного гауссовского макковского просесса, *Теория вероятностей и ее прим.*, 13, Но, 3, 328—333.

(1970) [1]: *Elemi Gauss-folyamatok statisztikai problémái,* Doktori disszertáció.

[2]: Тонные формулы для плотностей мер элементарные гауссовских процессов, *Studia Sci Math. Hung.* 5, No. 1—2. 17—27.

Арато М.—Бенцзур А. (1970): Фуннкци распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского Макковского процесса, *Studia Sci. Math. Hung.* 5, №. 3—4 445—456.

ATKINSON, R.—BOWER, G.—CROTHERS, E. (1965): *An introduction to mathematical learning theory,* Wiley.

BUSH, R.—MOSTELLER, F. (1955): *Stochastic models for learning,* Wiley.

COX, D. (1966): The null distribution of the first serial correlation coefficient, *Biometrika,* **53**,623—626.
Гелфанд, И. —Йаглом, А. (1956): Интегрирование в функциональных пространствах и его применение к квантовой физике, *Успехи мат. наук* **11** (67) Но 1, 77—114.
Гихман, Й.—Скороход, А. (1968): *Стохастические дифференциальные равнения,* Киев, Наукова Думка.
Голенко, Д. (1965): Моделирование и статистический анализ псевдослучйных чисел, На З. В. М., Москва, Наука.
Ибрахимов, Й.—Розанов, Ju. (1970): *Гауссовские случайные процессы,* Москва, Наука.
NAYLOR, T.—BÁLINTFY, J.—BÜRDICH, D.—CHU KONG (1966): *Computer Simulation techniques* Wiley,
ORCUTT, G.—WINOKUR, H. (1969): First order autoregression, inference, estimation and prediction, *Econometrica,* 1—14.
ROBINSON, E. (1967): *Multichannel time series analysis with digital computer programs.* Holdan Day.
ROSENBLATT, F. (1962): *Principles of neurodinamics,* Washington, Spartan.
TUKEY, J.—COOLEY, F. (1965): *Math. of Compt.* **19**, 297.
Цетлин, М. Л.—Котов, Й. Б. (1968): Моделирование работы пула мотонейронов, На З. Ц. В. М. *Проблемы кибернетики,* Но 20.