Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 51—64*

DIFFÚZIÓS FOLYAMATOK ISMERETLEN PARAMÉTERÉNEK BAYES-FÉLE BECSLÉSÉRŐL

ARATÓ MÁTYÁS
Budapest

A *Bayes-tétel* absztrakt alakjának, valamint diffúziós típusú folyamatok *Radon—Nikodym* deriváltjának ismeretében vizsgálja a dolgozat a diffúziós folyamat ismeretlen paraméterének aposteriori eloszlását. Ha az ismeretlen paraméter normális eloszlású és a diffúziós folyamat sztohasztikus egyenlettel történő előállításában lineárisan szerepel, az aposteriori eloszlás is normális lesz. Az egy- és többdimenziós, konstans együtthatójú sztohasztikus egyenletnek elegettevő *Markov folyamatok* konkrét vizsgálatokban korábban is szerepeltek. A dolgozat példáiban más becslésekkel való kapcsolat vizsgálata is szerepel.

1. Bevezetés

A paraméter becslési eljárások közül a *Bayes*-féle eljárás átvitele a klasszikus független megfigyelési sorozatokra vonatkozó feladatokról sztohasztikus folyamatokra önmagában is érdekes feladat. Ebben a dolgozatban elsősorban a feladat absztrakt terekre történő átfogalmazásának problémakörével foglalkozom. A Bayes-i hozzállás természetességét a többdimenziós *Markov-folyamatok* nemlineáris filtrációja feladatának megoldása szolgáltatja (vö. [4], [8]). Legyen ugyanis a $\zeta(t)=$ $=(\theta(t), \xi(t))$ folyamat kétdimenziós *Markov-típusú*, melynek $\theta(t)$ komponense nem figyelhető meg. Kérdés, a $\xi(t)$ folyamat megfigyelése alapján, a $0\leqq s\leqq t$ intervallumban, hogyan becsülhető $\theta(t_0)$ (t_0 fix) értéke valamilyen értelemben legjobban. Az ismeretlen — valószínűségi változó — paraméter vizsgálata innen speciálisan a $\theta(t, \omega)\equiv\theta(\omega)$ esetben adódik. Ennek a speciális esetnek a vizsgálata jóval egyszerűbb az általánosnál, a meggondolások elsősorban mértékelméleti jellegűek és a *Bayes-tétel* absztrakt terekre történő megfogalmazására vezethetők vissza. A dolgozatban elsősorban a normális aposteriori eloszlás kérdésével foglalkozom s több példán keresztül is megmutatom az eljárás hasznosságát.

A Bayes-féle módszer azonban a legtöbb esetben csak közelítésként használható s nem teszi feleslegessé azokat az eredményeket, amelyek a paraméter becslések pontos eloszlásaira vonatkoznak. A dolgozatban szereplő eredmények levezethetők a nem lineáris filtrációra vonatkozó igen általános feltevések melletti eredményekből (lásd Lipcer és Sirjájev összefoglaló jellegű [8] cikkét), ahol a négyzetes középben legjobb közelítés várható értékére és szórására sztohasztikus differenciálegyenletet vezetnek be a szerzők. Ezeknek az egyenleteknek a megoldásait adják a legegyszerűbb esetben $(\theta(t, \omega)=\theta(\omega))$ jelen dolgozat eredményei.

2. A Bayes-tétel absztrakt alakja

Legyenek az $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn $\theta(\omega)$ és $\xi(\omega)$ véletlen elemek valamilyen mérhető térbeli értékekkel, mely tereket jelölje $(\Theta, \mathfrak{B}_\theta)$, ill. $(\Sigma, \mathfrak{B}_\xi)$. Legyenek továbbá $\mathfrak{F}_\theta=\sigma\{\omega\colon \theta(\omega)\}$, $\mathfrak{F}_\xi=\sigma\{\omega\colon \xi(\omega)\}$ a θ, illetve a ξ által generált σ-algebrák. Az $(\Omega, \mathfrak{F}_\theta)$, ill. $(\Omega, \mathfrak{F}_\xi)$ mérhető tereken a mértékeket jelölje P_θ, ill. P_ξ (azaz $\mathbf{P}$ megszorítását ezeken a σ-algebrákon).

Ha $A\in\mathfrak{F}_\xi$ feltételes valószínűsége $\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)=P_\xi(A, \omega)$[1] reguláris mérték (lásd a definíciót LOÈVE [7] vagy ARATÓ [1]), igaz a következő összefüggés:

$$P_\xi(A) = \int_\Omega P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)$$

$\left(\text{azaz } B\in\mathfrak{F}_\theta \text{ esetén } P_\xi(AB) = \int_B P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)\right)$

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathfrak{F}_\xi$ és $\mathfrak{F}_\theta$ σ-algebrák szeparábilisak, azaz léteznek olyan $B_j\in\mathfrak{F}_\xi$ (ill. $B_j'\in\mathfrak{F}_\theta$) $j=1, 2,\dots$, halmazsorozatok, amelyekre $\sigma\{B_j\}=\mathfrak{F}_\xi$ (ill. $\sigma\{B_j'\}=\mathfrak{F}_\theta$). Ha létezik olyan $\mathbf{Q}$ mérték, hogy $P_\xi(\cdot, \tilde\omega)\ll\mathbf{Q}$, P_θ m.m. $\tilde\omega$-ra és a $P_\theta(\omega, B)=\mathbf{E}(I_B(\omega)|\mathfrak{F}_\xi)$ mértékre ugyancsak teljesül a regularitási feltétel, valamint $P_\theta(\omega, \cdot)\ll\mathbf{Q}$, P_ξ m.m. ω-ra, akkor a szeparábilitási feltétel teljesülése esetén létezik az $(\Omega\times\Omega, \mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta)$ mérhető téren olyan $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$—mérhető

$$f_\xi(\omega, \tilde\omega) = \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde\omega)}{d\mathbf{Q}}(\omega), \quad (\mathbf{Q}\times P_\theta \text{ m.m.}),$$

[illetve

$$f_\theta(\omega, \tilde\omega) = \frac{dP_\theta(\omega, \cdot)}{d\mathbf{Q}}(\tilde\omega), \quad (P_\xi\times \mathbf{Q} \text{ m.m.})\Big]$$

hogy, $A\in\mathfrak{F}_\xi$ esetén,

$$P_\xi(A) = \int_\Omega P_\xi(A, \tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega) = \int_\Omega\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)$$

[illetve, $B\in\mathfrak{F}_\theta$ esetén,

$$P_\theta(B) = \int_\Omega P_\theta(\omega, B)\mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde\omega)\mathbf{Q}(d\tilde\omega)\mathbf{P}(d\omega).\Big]$$

A bizonyítás megtalálható DOOB [5] könyve 554. oldalán. Legyen $g(\omega)=g(\theta(\omega))$ $\mathfrak{F}_\theta$-mérhető függvény, amelyre $E|g(\omega)|<\infty$ és vezessük be a következő halmazfüggvényt

$$G(A) = \int_\Omega g(\omega)P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega), \quad A\in\mathfrak{F}_\xi. \tag{2.0}$$

Speciálisan $g(\omega)=I_B(\omega)$ esetén adódik $P_\xi(AB)$. A *Bayes*-féle tétel megszámlálható értékű valószínűségi változók esetében a következőt állítja. Legyenek $\xi(\omega)$ lehetséges

[1] $I_A(\omega)$ jelöli az A halmaz indikátor függvényét.

értékei $x_1, x_2, \ldots$ míg $\theta(\omega)$ lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$; akkor fix k és i értékekre

$$\mathbf{P}(\theta=y_k|\xi=x_i) = \frac{\mathbf{P}(\xi=x_i|\theta=y_k)\mathbf{P}(\theta=y_k)}{\sum_j \mathbf{P}(\xi=x_i|\theta=y_j)\mathbf{P}(\theta=y_j)}. \tag{2.1}$$

Ha ξ és θ valószínűségi változók $h(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel és külön-külön $f_\xi(x)$, illetve $f_\theta(y)$ sűrűségfüggvénnyel és

$$f_\xi(x|y) = \frac{h(x,y)}{f_\theta(y)} \quad (\text{ha } f_\theta(y) > 0), \quad f_\theta(y|x) = \frac{h(x,y)}{f_\xi(x)} \quad (\text{ha } f_\xi(x) > 0),$$

feltételes sűrűségfüggvényekkel rendelkeznek, a *Bayes-féle tétel* a következő

$$f_\theta(y|x) = \frac{f_\xi(x|y)f_\theta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|t)f_\theta(t)\,dt}, \tag{2.2}$$

vagy

$$\mathbf{P}\{\theta\in B|\mathfrak{F}_\xi\} = \frac{\int_B f_\xi(x|y)f_\theta(y)\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|y)f_\theta(y)\,dy} = \frac{\int_B f_\xi(x|y)\,dF_\theta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|y)\,dF_\theta(y)},$$

ahol $F_\theta(y)$ a θ változó eloszlásfüggvénye.

Legyen az $(\Omega, \mathfrak{A})$ tér leképezése a számegyenes *Borel-halmazaira* az $\omega\to\xi(\omega)$ leképezés esetén I_ξ, míg az $\omega\to\theta(\omega)$ leképezés esetén I_θ. Ha C *Borel-halmaz*, legyen $\mu(C)=\mathbf{P}\{T_\xi^{-1}(C)\}$, illetve $\nu(C)=\mathbf{P}\{T_\theta^{-1}(C)\}$, akkor $A\in\mathfrak{F}_\xi$ esetén

$$P_\xi(A) = \mu(T_\xi A), \quad P_\theta(A) = \nu(T_\theta A),$$

vagy

$$P_\xi(A) = \mathbf{P}(\xi^{-1}(C)), \quad P_\theta(A) = \mathbf{P}(\theta^{-1}(C)), \quad \text{ahol} \quad C = T_\xi A.$$

Ha a μ és ν mértékek abszolút folytonosak az L *Lebesque-mértékre* nézve, jelölje

$$\frac{d\mu}{dL}(\omega) = \frac{d\mu}{dL}(\xi(\omega)),$$

ill.

$$\frac{d\nu}{dL}(\omega) = \frac{d\nu}{dL}(\theta(\omega)),$$

azt a valószínűségi változót, melyet $\frac{d\mu}{dL}(x)$-ből kapunk, ha x helyébe a $\xi(\omega)$ valószínűségi változót, illetve $\frac{d\nu}{dL}(y)$-ban az y változót θ-val helyettesítjük. A $P_\xi(A, \tilde{\omega})$ feltételes valószínűség bevezetése a síkon a $\mu(T_\xi A, y)$ halmazfüggvény (y-ban ν m.m.) bevezetését jelenti. Hasonlóan vezethetjük be a $P_\theta(\omega, B)$-nak megfelelő $\nu(x, T_\theta B)$ halmazfüggvényt is. Az együttes sűrűségfüggvény létezése, valamint a feltételes sűrűségek létezése azt fejezi ki, hogy

$$f_\xi(x|y) = \frac{d\mu(\cdot, y)}{dL}(x),$$

$$f_\theta(y|x) = \frac{d\nu(x, \cdot)}{dL}(y),$$

és

$$f_\xi(x) = \frac{d\mu}{dL}(x), \quad f_\theta(y) = \frac{d\nu}{dL}(y).$$

A (2.2) összefüggés absztrakt alakjában $f_\theta(\omega, \tilde{\omega})$ megfelelője $f_\theta(y|x)$, míg $f_\xi(\omega, \tilde{\omega})$ megfelelője $f_\xi(x|y)$, mely függvényeket az $y=\theta(\omega)$, ill. $x=\xi(\omega)$ helyettesítéssel kapunk $f_\theta(y|x)$, ill. $f_\xi(x|y)$-ból

(2.2′)
$$f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) f_\theta(\tilde{\omega})}{\int\limits_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) f_\theta(\tilde{\omega}) \mathbf{P}(d\tilde{\omega})} =$$

$$= \frac{f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) \int\limits_\Omega f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) \mathbf{Q}(d\omega)}{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) \mathbf{Q}(d\omega) \mathbf{P}(d\tilde{\omega})},$$

vagy

$$P_\theta(\omega, B) = \big(\nu(\xi(\omega), T_\theta B)\big) = \frac{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega T_B(\tilde{\omega}) f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) \mathbf{Q}(d\omega) \mathbf{P}(d\tilde{\omega})}{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) \mathbf{Q}(d\omega) \mathbf{P}(d\tilde{\omega})}.$$

A (2.1) összefüggést $A_i \in \mathfrak{F}_\xi$ $(\bigcup_i A_i = \Omega,\ A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j)$ és $B_j \in \mathfrak{F}_\theta$ $(\bigcup_j B_j = \Omega,$ $B_i \cap B_j = \emptyset$, ha $i \neq j)$ elemekre felírva, adódik

(2.1′)
$$P_\theta(B_k, A_i) = \frac{P_\xi(A_i, B_k) P_\theta(B_k)}{\sum\limits_j P_\xi(A_i, B_j) P_\theta(B_j)}.$$

A (2.2′) összefüggés bizonyítása tetszőleges véletlen ξ, θ elemekre egyszerűen elvégezhető, ha a mértékekről feltesszük a regularitást és a σ-algebrákról a szeparabilitást (lásd pl. LOÈVE [7] könyve 371—384. oldalai, vagy DOOB [5] könyve 35. és 554—555. oldalai alapján).

Igen hasznos segédeszköz a következő egyszerű lemma, ahol θ, ξ absztrakt értékű véletlen elemek.

2.1. LEMMA. a) Ha $g(\omega) = g(\theta(\omega))$ és $\mathbf{E}|g| < \infty$, akkor a (2.0)-ban definált $G \ll P_\xi$ és

(2.3)
$$\mathbf{E}\{g(\theta(\omega)) | \mathfrak{F}_\xi\} = \frac{dG}{dP_\xi}(\omega), \quad (P_\xi \text{ m.m.}).$$

b) Ha $\mathbf{E}|g|<\infty$, a $P_\xi(A, \omega)$ feltételes valószínűség reguláris ($A\in\mathfrak{F}_\xi$, $\omega\in\Omega$) és $P_\xi(\cdot, \omega)\ll\mathbf{Q}(\cdot)$ (P_θ m.m.), ahol $\mathbf{Q}$ egy mérték az $(\Omega, \mathfrak{F}_\xi)$ mérhető téren, akkor

$$P_\xi \ll \mathbf{Q}, \quad G \ll \mathbf{Q}. \tag{2.4}$$

c) Ha a) és b) feltételein kívül az $\mathfrak{F}_\xi$ σ-algebra még szeparábilis is, akkor az $(\Omega\times\Omega, \mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta)$ mérhető téren létezik olyan $f_\xi(\omega, \tilde{\omega})$ $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$-mérhető függvény, hogy

$$f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega), \quad [\mathbf{Q}\times P_\theta \text{ m.m.}], \tag{2.5}$$

ahol $A\in\mathfrak{F}_\xi$.

d) Az előbbi feltételek mellett

$$\frac{dG}{d\mathbf{Q}}(\omega) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})\frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega)\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega}), \tag{2.6}$$

$$\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega) = \int_\Omega \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega)\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) = \int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) \tag{2.7}$$

és

$$0 < \frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega) < \infty \quad [P_\xi \text{ m.m.}], \tag{2.8}$$

$$\mathbf{E}[g(\omega)|\mathfrak{F}_\xi] = \frac{dG}{dP_\xi}(\omega) = \frac{\frac{dG}{d\mathbf{Q}}(\omega)}{\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega)} = \frac{\int_\Omega g(\tilde{\omega})f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})}{\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})} \tag{2.9}$$

e) Ha a szeparábilis $\mathfrak{F}_\theta$ σ-algebrán $P_\theta(\omega, B)$ feltételes valószínűség reguláris és $P_\theta(\omega, \cdot)\ll\mathbf{Q}(P_\xi$ m.m.), akkor az

$$f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{dP_\theta(\omega, \cdot)}{d\mathbf{Q}}(\tilde{\omega})$$

jelöléssel

$$f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{Q}(d\omega)}{\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\left(\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{Q}(d\omega)\right)\mathbf{P}(d\tilde{\omega})}. \tag{2.10}$$

A lemma bizonyítása. Mivel $\mathbf{E}\{g(\theta(\omega))|\mathfrak{F}_\xi\}$ $\mathfrak{F}_\xi$-mérhető (2.3) bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges $A\in\mathfrak{F}_\xi$ halmazra

$$\mathbf{E}\{I_A(\omega)\mathbf{E}(g|\mathfrak{F}_\xi)\} = G(A).$$

Ez viszont a következő egyenlőségsorozat következménye,

$$\mathbf{E}\{I_A(\omega)\mathbf{E}(g|\mathfrak{F}_\xi)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(I_A(\omega)g(\omega)|\mathfrak{F}_\xi)\} = \mathbf{E}\,(I_A(\omega)g(\omega)) =$$
$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}(I_A(\omega)g(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)\} = \mathbf{E}\{g(\omega)\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)\} =$$
$$= \mathbf{E}\{g(\omega)P_\xi(A, \omega)\} = G(A).$$

(2.4) a $P_\xi(A)=\int_\Omega P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)$ előállításból és (2.3)-ból adódik. Az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$-mérhető

$f_\xi(\omega, \tilde\omega)$ létezése, mely $\mathbf{Q}\times P_\theta$ m.m. eleget tesz (2.5)-nek a már említett *Doob*-féle konstrukció ([5], 554. o.) átvitele az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\xi$ esetről az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$ esetre.

(2.6) bizonyítása következik $f_\xi(\omega, \tilde\omega)$ mérhetőségéből, (2.5)-ből és a *Fubini-tételből*, ugyanis

$$G(A) = \int_\Omega g(\tilde\omega)P(A, \tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega) = \int_\Omega g(\tilde\omega)\Big[\int_A f_\xi(\omega, \tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\Big]\mathbf{P}(d\tilde\omega) =$$

$$= \int_A \Big[\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde\omega)g(\tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)\Big]\mathbf{Q}(d\omega).$$

Ahol $\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde\omega)g(\tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)$ $\mathfrak{F}_\xi$-mérhető és b) szerint $G\ll\mathbf{Q}$, ahonnan a *Radon—Nikodym-derivált* egyértelműségéből adódik (2.6). (2.7) a (2.6) összefüggés speciális esete $(g(\omega)\equiv 1)$ és a differenciálás és integrálás felcserélhetőségét bizonyítja. (2.8) következménye a $P_\xi\ll\mathbf{Q}$ abszolút folytonosságnak és azon halmaz valószínűsége, ahol $\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}=0$ 0-val egyenlő. A $P_\xi\ll\mathbf{Q}$, $G\ll P_\xi$, $G\ll\mathbf{Q}$ láncból és az ismert deriválási szabályból adódik

$$\frac{dG}{d\mathbf{Q}} = \frac{dG}{dP_\xi}\cdot\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}},$$

ahonnan (2.3), (2.6), (2.7) felhasználásával kapjuk a (2.9) összefüggést. Az előbbiek megismétlésével adódik (2.10). A lemma bizonyítása ezzel kész.

3. Diffúziós típusú folyamatok sűrűségfüggvényei

Legyen az $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn $(\mathfrak{F}_t, 0\leqq t\leqq T)$ σ-algebrák monoton nem csökkenő sokasága $(\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{A})$, $(w(t), \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ standard *Brown-mozgás folyamat*, azaz folytonos, négyzetesen integrálható martingál a $w(0)=0$, $\mathbf{E}[(w(t)-w(s))^2|\mathfrak{F}_s] = t-s$ (1-valószínűséggel), $t\geqq s$, feltételekkel.

Jelölje a $[0, T]$ -ben folytonos $x = \{x(t), 0\leqq t\leqq T\}$, $x(0) = 0$, függvények mérhető terét $(C_{[0,T]}, \mathbf{B})$, ahol $\mathbf{B} = \sigma\{x: x(s), 0\leqq s\leqq T\}$. Legyen továbbá $\mathbf{B}_t = \sigma\{x: x(s), s\leqq t\}$.

Ha $B[0, T]$ a *Borel-mérhető halmazok* σ-algebrája, legyen az $\alpha(t, x)$ funkcionál $B[0, T]\times\mathbf{B}$-mérhetőségen kívül minden t-re $B[0, T]\times\mathbf{B}_t$-mérhető is, azaz „független" a jövőtől.

Legyen $\theta(\omega)$ n-dimenziós valószínűségi változó $(n\geqq 1$, fix) $\mathbf{P}(\theta(\omega)\in B)=P_\theta(B)$ eloszlással az R^n euklideszi tér B *Borel-halmazain.* Legyen $\theta(\omega)$ független a $w(t)-w(0)$ $(t>0$ tetszőleges) változóktól.

Legyen a $\xi(t, \omega)$ folyamat $\mathfrak{F}_t$-mérhető és folytonos.

3.1. Definició. A $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ folyamatot a $\theta=\theta(\omega)$ paramétertől függő diffúziós típusúnak nevezzük, ha minden θ értékre létezik olyan a jövőtől független $a_\theta(t, x)$ funkcionál, hogy

$$\mathbf{P}\Big\{\int_0^T |\alpha_\theta(t, \xi(t))|\,dt < \infty\Big\} = 1$$

$\big(\alpha_\theta(t,\xi)\equiv a_\theta(t,\xi(\omega)),\ \xi(\omega)=\{\xi(t),\ 0\leqq t\leqq T\}\big)$ és minden $0\leqq t\leqq T$ értékre

$$\xi(t)=\int_0^t \alpha_\theta(s,\xi(s))\,ds+w(t),\quad \text{(1 valószínűséggel)}. \tag{3.1}$$

Feltesszük, hogy $\xi(t)$ minden θ-ra diffúziós típusú és $\xi(s,\omega)$ $\sigma\{\omega\colon \theta(\omega),\ w(u),\ u\leqq s\}$-mérhető minden $0\leqq s\leqq T$ értékre.

Ha $\theta(\omega)$ a fenti tulajdonságokkal rendelkező valószínűségi változó, a (3.1) differenciálegyenlet megoldása létezik. Legyen $\mu_\xi(B)=\mathbf{P}\{\omega\colon \xi(\omega)\in B\}$, $\mu_w(B)=\mathbf{P}\{\omega\colon w(\omega)\in B\}$.

Ha θ vektor értékű valószínűségi változó, a $P_\xi(A,\omega)=\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)$ mérték reguláris (Doob [5], 35. o.); így felhasználva, hogy minden θ értékre (Lipcer—Sirjájev [10], 5. tétele alapján)

$$\frac{d\mu_{\xi,\theta}}{d\mu_w}(w)=\exp\Big\{\int_0^T \alpha_\theta(t,w(t))dw(t)-\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,w(t))\,dt\Big\},\quad (\mathbf{P}\ \text{m.m.}) \tag{3.2}$$

és

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_{\xi,\theta}}(\xi)=\exp\Big\{-\int_0^T \alpha_\theta(t,\xi(t))d\xi(t)+\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,\xi(t))\,dt\Big\},\quad (\mathbf{P}\ \text{m.m.}) \tag{3.3}$$

a 2. szakasz jelöléseivel (ha $\mathbf{Q}=\mu_w$ *Wiener-mérték*, L a *Lebesque-mérték*) a következőt kapjuk:

$$f_\xi(\omega,\tilde\omega)=\frac{d\mu_{\xi,\theta}}{d\mu_w}(x,y)\Big|_{\substack{x=\xi\\ y=\theta}}= \tag{3.4}$$

$$=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,\xi(t))\,dt+\int_0^T \alpha_\theta(t,\xi(t))d\xi(t)\Big\},$$

$$f_\theta(\tilde\omega)=\frac{dP_\theta}{dL}(y)\Big|_{y=\theta}. \tag{3.5}$$

Egyszerűség kedvéért legyen θ egydimenziós, akkor a (3.4) és (3.5) összefüggésekből adódik a következő tétel.

3.1. Tétel. Legyen az $\alpha_\theta(t,x)$ funkcionál θ-ban lineáris, azaz $\alpha_\theta(t,x)=-\theta g(t,x)$ és θ legyen $N(m_0,\sigma^2)$ (normális eloszlású m_0 várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel), akkor θ aposteriori eloszlása normális

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t)=\frac{\dfrac{m_0}{\sigma^2}-\displaystyle\int_0^t g(s,\xi(s))\,d\xi(s)}{\dfrac{1}{\sigma^2}+\displaystyle\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E}((\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t))^2|\mathfrak{F}_\xi^t)=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma^2}+\displaystyle\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. A feltevések szerint

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\theta - m_0)}{2\sigma^2}},$$

$$f_\xi(\omega, \theta) = \exp\left\{-\theta \int_0^t g(s, \xi(s))d\xi(s) - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds\right\}$$

és a (2.10) *Bayes formula* alapján $\sqrt{2\pi}\,\sigma$-val való egyszerűsítés után

$$f_\theta(\omega, \theta) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\theta - m_0)^2}{2\sigma^2} - \theta \int_0^t g(s, \xi)d\xi - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(u - m_0)^2}{2\sigma^2} - u \int_0^t g(s, \xi)d\xi - \frac{u^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right\} du} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds\right] + \theta\left[\frac{m_0}{\sigma^2} + \int_0^t g(s, \xi(s))\,d\xi(s)\right] - \frac{m_0^2}{2\sigma^2}\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right] + u\left[\frac{m_0}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi(s))\,d\xi(s)\right] - \frac{m_0^2}{2\sigma^2}\right\} du}.$$

Innen egyszerűsítéssel, valamint

$$v = u\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))\,ds}$$

helyettesítéssel az

$$f_\theta(\omega, \theta) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right] + \theta\left[\frac{m_\theta}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi)d\xi\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}}\left[\frac{m_\theta}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,d\xi\right]\right\} dv}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan a normális eloszlás sűrűségfüggvényének integrálját ismerve

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + at\right\} dt = \sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{a^2}{2}\right\}\right)$$

adódik, hogy

$$f_\theta(\omega, \theta) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}{2}\left[\theta - \frac{\left(\frac{m_0}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi)\,d\xi\right)}{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}\right]^2\right\},$$

amit bizonyítani akartunk.

Következmény. Az $|m_0|<\infty$ és $\sigma\to\infty$ esetben[2] a jól ismert

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t) = -\frac{\int\limits_0^t g(s,\xi(s))d\xi(s)}{\int\limits_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}$$

maximum likelihood becslést kapjuk a θ paraméterre, melynek szórásnégyzete

$$\mathbf{E}((\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t))^2|\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{1}{\int\limits_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}.$$

Hasonló tétel bizonyítható a többdimenziós diffúziós típusú folyamatokra is, ennek kimondása helyett inkább példákra szorítkozunk.

Ismeretes, hogy θ aposteriori eloszlásának szórásnégyzete (lásd LIPCER—SIRJÁJEV [9] 5. tétel) $\gamma(t)=\mathbf{E}((\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t)-\theta)^2|\mathfrak{F}_\xi^t)$, ha $\xi(t)$ a (3.1) diffúziós folyamat, kielégíti a

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -[g(t,\xi(t))\gamma(t)]^2 \tag{3.8}$$

Riccati-típusú differenciálegyenletet. A 3.1 tételben megadott összefüggésből közvetlen számolással meggyőződhetünk, hogy a $\gamma(t)$-re adott (3.7) megoldás kielégíti a (3.8) egyenletet.

4. A 3.1 tételre vonatkozó példák

1. PÉLDA. Legyen θ egy (m,σ^2) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ha a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ független normális eloszlású változók $(\theta, 1)$ paraméterűek, akkor θ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^n$ feltétel mellett normális eloszlás

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\frac{m}{\sigma^2}+\sum\limits_1^n \xi_i}{\frac{1}{\gamma^2}+n},\qquad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n))^2|\mathfrak{F}_\xi^n\} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}+n} \tag{4.1}$$

középértékkel, ill. szórásnégyzettel. (4.1)-ből $\sigma=\infty$ esetén $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_1^n \xi_i, \frac{1}{n}\right)$ paraméterű normális eloszlás adódik. Ha θ egy $(\xi_0, 1)$ paraméterű normális eloszlású változó (ahol ξ_0 az első megfigyelés)

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\sum\limits_{i=0}^n \xi_i}{n+1},\qquad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n))^2|\mathfrak{F}_\xi^n\} = \frac{1}{n+1}.$$

Vegyük észre, hogy ismeretlen szórásnégyzet esetén az aposteriori eloszlás csak akkor normális, ha paraméternek az $\frac{1}{\sigma_0^2}=\frac{1}{D^2\xi}$ mennyiséget vesszük.

[2] A $\sigma\to\infty$ eset az egész egyenesen egyenletes eloszlás megfelelője.

2. PÉLDA. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók *Gauss—Markov-folyamat* elemei ($\mathbf{E}\xi_k=0$), azaz elégítsék ki a következő differencia egyenletet

$$\xi_k = \varrho\xi_{k-1}+\varepsilon_k, \quad \mathbf{E}\varepsilon_k = 0, \quad \mathbf{D}^2\varepsilon_k = 1, \quad \xi_0 = x_0 \quad \text{(fix)},$$

ahol ϱ normális eloszlású (ϱ_0, γ^2) paraméterekkel[3]. ϱ feltételes eloszlása normális

$$(4.2)\quad \mathbf{E}(\varrho\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\dfrac{\varrho_0}{\gamma^2}+\sum\limits_1^n \xi_i\xi_{i-1}}{\dfrac{1}{\gamma^2}+\sum\limits_1^n \xi_{i-1}^2}, \quad \mathbf{E}\{(\varrho-\mathbf{E}(\varrho\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n\} = \left\{\frac{1}{\gamma^2}+\sum_1^n \xi_{i-1}^2\right\}^{-1}$$

paraméterekkel. $\gamma\to\infty$ esetén ϱ becslésére a jólismert széria korrelációs együttható adódik. Ha a $\mathbf{D}^2\xi_k=1$ szórásnégyzetet rögzítjük $\mathbf{D}^2\varepsilon_k = (1-\varrho^2)$ lesz, s ha ϱ apriori eloszlása normális is, feltételes eloszlása nem lesz az. Ennek oka, hogy ϱ a ξ_k változók differencia egyenletében nem lineárisan szerepel (ε_k együtthatójában!). Ugyancsak elvész a feltételes normalitás, ha ξ_0 kezdeti eloszlását is figyelembe vesszük.

3. PÉLDA. (lásd LIPCER—SIRJÁJEV [8]). Legyen $\theta=\mathbf{E}\xi(t)$ normális eloszlású

$$f_\theta(\beta) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}(\beta-x_0)^2\right\}, \quad \xi(0) = x_0$$

sűrűséggel, ahol, $\xi(t)$ stacionárius *Gauss—Markov-folyamat* $\dfrac{\sigma^2}{2\lambda}e^{-\lambda|t|}$ kovariancia függvénnyel. θ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ feltétel mellett normális

$$(4.3)\qquad \mathbf{E}(\theta\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{\xi(t)+\xi(0)+\lambda\int\limits_0^t \xi(s)\,ds}{2+\lambda t},$$

$$(4.4)\qquad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \frac{\sigma^2/\lambda}{2+\lambda t}$$

paraméterekkel.

4. PÉLDA. A $\xi(t)$ *Gauss—Markov-folyamat* λ paramétere legyen (λ_0, γ^2) paraméterű *Gauss-eloszlású* változó, $\xi(0)=x_0$. λ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ „megfigyelés" esetén normális

$$(4.5)\qquad \mathbf{E}(\lambda\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{\lambda_0}{1+\gamma^2\int\limits_0^t \xi^2(s)\,ds} - \frac{\xi^2(t)-\xi^2(0)-t}{2\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+\int\limits_0^t \xi^2(s)\,ds\right)},$$

$$(4.6)\qquad \mathbf{E}\{(\lambda-\mathbf{E}(\lambda\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \frac{1}{\dfrac{1}{\gamma^2}+\int\limits_0^t \xi^2(s)\,ds}.$$

paraméterekkel.

[3] Ha ξ_0 stacionárius eloszlású és $|\varrho|<1$, a folyamat stacinárius lesz. Ugyanez igaz a 4. és 6. példában szereplő $\xi(t)$ folyamatra a $\lambda>0$ esetben is.

A fenti példák, valamint a 3.1 tétel alapján világos, hogy a $\xi(t)$ folyamat ismeretlen, lineárisan előforduló paramétereinek feltételes sűrűségét tekintve a $\xi(0)=x_0$ feltétel mellett, ha az ismeretlen paraméter apriori eloszlása normális az a posteriori eloszlása is normális lesz. A többdimenziós esetben csak az elemi *Gauss-folyamatra* mondunk ki tételt. Az általánosítás szemmel látható és könnyen elvégezhető.

4.1. TÉTEL. Legyen az elemi *Gauss-folyamat* előállításában szereplő

$$d\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t)\,dt + d\mathbf{w}(t), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}), \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=0,k-1}^{j=0,k-1},$$

$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ mátrix elemeinek apriori eloszlása normális $(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0k-1}, \alpha_{10}, \ldots,$ $\ldots, \alpha_{1k-1}, \alpha_{k-10}, \ldots, \alpha_{k-1k-1})$ várható értékkel és Γ_0 kovariancia mátrixszal. Legyen $\boldsymbol{\zeta}(0)=\mathbf{x}(0)$. A feltételek teljesülése eseten $\mathbf{A}$ elemeinek feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ feltétel mellett normális eloszlás

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \Gamma(t)\Big[\Gamma_0\boldsymbol{\alpha} + \int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\,d\boldsymbol{\xi}(s)\Big], \tag{4.7}$$

$$\mathbf{E}\{(\mathbf{A}-\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))(\mathbf{A}-\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^*\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \Gamma(t) = \Big[\Gamma_0^{-1} + \int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big]^{-1} \tag{4.8}$$

várható értékkel, ill. szórásnégyzettel (ha Γ_0 nem elfajult). Elfajult Γ_0 esetén a következő előállítás érvényes:

$$\Gamma(t) = \Big[I + \Gamma_0 \int_0^t \mathbf{A}^* B_w^{-1}\mathbf{A}\,ds\Big]^{-1}\Gamma_0.$$

Bizonyítás. Az egydimenziós esethez hasonlóan járhatunk el. A sűrűségfüggvény képlete alapján (lásd ARATÓ [3])

$$\frac{d^{k^2}\mathbf{P}\{\mathbf{A} < \boldsymbol{\beta}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\}}{(d\boldsymbol{\beta})^{k^2}} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]\right\}\frac{dP_\beta}{dw}\{\xi\}}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]\right\}\frac{dP_\beta}{dw}\{\xi\}\,d\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}), \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})] + \int_0^t (B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s))\,ds\right\}}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}), \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})] + \int_0^t (B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s))\,ds\right\}d\boldsymbol{\beta}}$$

ahonnan a 3.1. tétel bizonyításához hasonló átalakításokkal jutunk az állítás igazolásához. A nevező

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big[\boldsymbol{\beta}, \Big(\Gamma_0^{-1} + \int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big)\boldsymbol{\beta}\Big] + \boldsymbol{\beta}\Big[\Gamma_0^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \int_0^t (\boldsymbol{\xi}^*(s), B_w^{-1}\,d\boldsymbol{\xi}(s))\Big]\right\}d\boldsymbol{\beta} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{k^2}{2}}\Big[\Gamma_0^{-1} + \int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big]^{-1}\exp\left\{\frac{1}{2}\Big[\Gamma_0^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\,d\boldsymbol{\xi}(s)\Big]^2\Gamma(t)\right\}$$

alakú, ahonnan már adódik (4.7) és (4.8).

5. PÉLDA. Legyen $\zeta(t)=(\xi_1(t), \xi_2(t))$ komplex stacionárius *Gauss—Markov-folyamat* θ_1, θ_2 paraméterekkel, azaz elégítse ki a

$$d\xi_1(t) = -[\theta_1\xi_1(t)+\theta_2\xi_2(t)]\,dt+dw_1(t),$$
$$d\xi_2(t) = -[\theta_1\xi_2(t)-\theta_2\xi_1(t)]\,dt+dw_2(t),$$

differenciálegyenletet.

Ha $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$ $\mathbf{m}_0, \Gamma_0$ paraméterű *Gauss-eloszlású* valószínűségi változó, akkor a 4.1 tétel alapján

$$\Gamma(t) = \left[\Gamma_0^{-1}+\int_0^t [\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds\cdot I\right]^{-1}.$$

Ha $\Gamma_0 = 0$,

$$\Gamma(t) = I\cdot\left[\int_0^t [\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds\right]^{-1}$$

és

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t] = \frac{1}{\int_0^t [\xi_1^2+\xi_2^2]\,ds}\int_0^t \begin{pmatrix}-\xi_1\,d\xi_1-\xi_2\,d\xi_2\\ -\xi_2\,d\xi_1+\xi_1\,d\xi_2\end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

azaz

$$\theta_1(t) = \theta_1-\frac{\int_0^t \xi_1(s)\,dw_1(s)+\int_0^t \xi_2(s)\,dw_2(s)}{\int_0^t [\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds},$$

$$\theta_2(t) = \theta_2-\frac{\int_0^t [\xi_2\,dw_1-\xi_1\,dw_2]}{\int_0^t [\xi_1^2+\xi_2^2]\,ds}.$$

Mivel $\xi(0)$ kovariancia mátrixa $\begin{pmatrix}\frac{1}{2\theta_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\theta_1}\end{pmatrix}$ független θ_2-től a $\theta_2(t)$ becslés megegyezik θ_2 maximum likelihood becslésével. A $\theta_1(t)$ becslés csak aszimptotikusan ekvivalens θ_1 maximum likelihood becslésével.

6. PÉLDA. Ha a $\xi(t)$ egydimenziós *Gauss—Markov-folyamat* várható értéke és λ paramétere is ismeretlen, azaz $\xi(t)$ kielégíti a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt+\lambda m\,dt+dw(t) \tag{4.10}$$

egyenletet, ahol $(\lambda, m)=\boldsymbol{\theta}$ normális eloszlású a $\boldsymbol{\theta}(t)$ feltételes eloszlás nem lesz normális, mivel (4.10)-ben λ, m nem lineárisan fordulnak elő. Feltéve, hogy az ismeretlen paraméterek λ és $\lambda m = a$, melyek kezdeti eloszlása normális (λ_0, a_0), $\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_1} \end{pmatrix}$ paraméterekkel, a $\boldsymbol{\theta}(t)$ feltételes eloszlása $(\lambda(t), a(t))$ középértékű és $\Gamma(t)$ szórású normális eloszlású lesz. Ha $\Gamma_0^{-1} = 0$, akkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\Gamma(t) = \frac{\begin{pmatrix} t & \int_0^t \xi(s)\,ds \\ \int_0^t \xi(s)\,ds & \int_0^t \xi^2(s)\,ds \end{pmatrix}}{t\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \left(\int_0^t \xi(s)\,ds\right)^2},$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} [\xi(t)-\xi(0)]\int_0^t \xi(s)\,ds - \frac{t}{2}\left(\xi^2(t)-\xi^2(0)-t\right) \\ [\xi(t)-\xi(0)]\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \xi(s)\,ds\,[\xi^2(t)-\xi^2(0)-t] \end{pmatrix}}{t\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \left(\int_0^t \xi(s)\,ds\right)^2}.$$

IRODALOM

[1] ARATÓ, M., *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe* (Bolyai jegyzet, Budapest, 1968).

[2] ARATÓ, M., „Elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái", doktori értekezés. Budapest, 1972.

[3] ARATÓ, M., «Точные формулы для плотностей мер элементарных гауссовских процессов», *Studia Sci. Math. Hung.* **5** (1970) 17—27.

[4] BUCY, R. S. and KÁLMÁN, R. E., "New results in linear filtering and prediction theory", *J. Basic Eng.* (*Trans. ASME*) **83 D** (1961) 95—108.

[5] DOOB, J. L., *Stochastic Processes* (John Wiley, New York, 1953)

[6] KALLIANPUR, G. and STRIEBEL, C., "Estimation of stochastic systems; arbitrary system processes with additive white noise observation errors", *AMS* **39** (1968) 786—801.

[7] LOEVE, M., *Probability Theory* (John Wiley, New York, 1953).

[8] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов,» *Труды МИАН* **104** (1968) 135—180.

[9] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «О плотности вероятностных мер процессов диффизионного типа,» *Изв. А. Н. СССР* **33** (1969) 1120—1131.

[10] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской,» *Изв. А. Н. СССР* **36** (1972) 847—889.

(Beérkezett: 1974. március 14.)

ARATÓ MÁTYÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ON BAYES' ESTIMATION OF THE UNKNOWN PARAMETER OF DIFFUSION TYPE PROCESSES

M. ARATÓ

Using the abstract form (2.10) of Bayes theorem and the Radon—Nikodym derivative (3.3) for diffusion type processes the aposteriori distribution of the unknown parameter θ of process $\xi(t)$ with form (3.1) is investigated.

Theorem 3.1. states that if functional $\alpha_\theta(t, \xi)$ is linear in θ the aposteriori distribution is normal if the apriori one is also normal.

Somes examples are studied in one and multidimensional cases.