MTA SZTAKI Közlemények 33/1985 p. 29-35

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АДАПТИВНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Карабутов Н.Н.
Хадреви И.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ И СПЛАВОВ

Адаптивные наблюдатели /АН/ широко применяются в системах управления для решения задачи идентификации параметров и состояния объектов управления по экспериментальным данным о входе и выходе объекта. АН принято делить на два типа: явные и неявные в зависимости от того, каким образом в системе идентификации решается проблема оценки состояния. При синтезе адаптивных наблюдателей основное внимание уделяется обеспечению устойчивости системы идентификации. Получению условий, гарантирующих устойчивость АН, описываемых системой детерминированных дифференциальных уравнений, посвящено достаточно много работ. В отличие от этого исследованию качества работы адаптивных идентификаторов состояния в условиях действия случайных возмущений уделялось недостаточно много внимания. В основном изучалась проблема устойчивости АН явного типа [1—5], причем явного ограничения на интенсивность действующих помех, за исключением работы [5], получено не было.

В данной работе исследуется стохастическая устойчивость АН неявного типа линейных динамических объектов, уравнения которых приведены к неминимальной идентификационной форме, с помощью стохастического варианта метода векторных функций Ляпунова.

Рассмотрим вполне управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнением

$$\tilde{x}^{(m)} + \tilde{a}_m \tilde{x}^{(m-1)} + \ldots + \tilde{a}_1 x = \tilde{b} u,$$

$$\tilde{y} = \tilde{x} + \xi^y, \qquad (1)$$

$$\tilde{u} = u + \xi^u,$$

где $\tilde{y}, \tilde{u}$ — измеряемый выход и вход объекта; $\tilde{a}_1 \ \ldots, \tilde{a}_m, \tilde{b}$ — неизвестные параметры; ξ^u, ξ^y — независимые центрированные случайные винеровские процессы типа белого шума

$$M\ \{\xi^u(t)\} = 0, \quad M\ \{\xi^u(t)\xi^u(\tau)\} = \sigma_u^2 \delta\,(t-\tau),$$

$$M\ \{\xi^y(t)\} = 0, \quad M\ \{\xi^y(t)\xi^y(\tau)\} = \sigma_y^2 \delta\,(t-\tau).$$

$M\{\cdot\}$ — знак математического ожидания, σ — интенсивность шумов измерения, δ — дельта-функция Дирака.

Считаем, что для входного воздействия $u(t)$ выполняется условие $D_0 : u(t)$ содержит не менее $(m+1)/2$ синусоидальных составлющих, $u(t) \neq 0$, $|u(t)| \leqslant U < \infty$.

Для оценки неизвестных параметров объекта управления (1) применяется система адаптивной идентификации, описываемая матричным стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито [6] :

$$dE = QE\,dt + D\sigma_y\,d\eta, \tag{2}$$

где $E(t) = [e_1(t) : \Delta A_3^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$; $E \in R^{2m}$; $e_1(t) = \hat{y}(t) - y(t)$; $\hat{y}(t)$ — выход АН, $\Delta A_3(t)$ — вектор рассогласования между параметрами АН и объекта, приведенного к неминимальной иденификационной форме [6, 7] ;

$\Delta A_3 = \hat{A}_3(t) - A_3$; $A_3 = [a_1, \ldots, a_m, b_2, \ldots, b_m]^{\mathrm{T}}$ — вектор неизвестных параметров объекта в новом представлении.

Матрица $Q \in R^{2m \times 2m}$ и вектор $D \in R^{2m}$ задаются выражениями

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda & Z^{\mathrm{T}} \\ \hline \Gamma Z & 0 \end{array}\right],$$

$$D^{\mathrm{T}} = [\beta \,|\, (-\tilde{S}e_1\,dt + Z dt + \tilde{S}\sigma_y\,d\eta)^{\mathrm{T}}\Gamma], \quad \tilde{S}^{\mathrm{T}} = [1 \,|\, 0^{\mathrm{T}}],$$

где $d\xi^y = \sigma_y d\eta$, η — независимый винеровский белый шум; $\lambda_1 > 0$ — некоторое число; $Z(t) \in R^{2m-1}$, $Z(t) = [y(t) : W_1^{\mathrm{T}}(t) : W_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$; $W_1(t)$; $W_2(t)$ — векторы вспомогательных сигналов, получаемые путем пропускания выхода и входа объекта (1) через динамическую систему [6]

$$\dot{W}_i = \Lambda^{\mathrm{T}} W_i + H_i\,\omega_i; \quad i = 1, 2, \quad \omega_1 = y(t); \quad \omega_2 = u(t);$$

$$W_1(t_0) = W_{10}; \quad W_2(t_0) = W_{20}; \quad \Lambda \in R^{(m-1)\times(m-1)} \quad -$$

—квазидиагональная матрица; $H_1 \in R^{m-1}$; $H_2 \in R^{m-1}$ — векторы с постоянными параметрами, выбираемые так, чтобы пара $(\Lambda^{\mathrm{T}}, H_i)$, $i = 1, 2$ была управляемой; $\Gamma \in R^{(2m-1)\times(2m-1)}$ — диагональная матрица с положительными диагональными членами.

Вектор $E(t)$ характеризует отклонение движения системы с АН от опорного движения $(\hat{x}^*(t), x^*(t), A_3)$. При этом предполагается, что $\hat{x}^*(t_0) = x^*(t_0)$.

Задача анализа стохастической устойчивости системы с АН сводится к определению условий, при которых является стохастически устойчивым тривиальное решение системы (2) $E(t) = 0$.

В зависимости от функции $\beta(t)$, входящей в вектор D, будем рассматривать следующие два частных вида системы (2). Систему (2) с функцией $\beta(t) = \tilde{\delta} - \Delta a_1(t)$ $(\tilde{\delta} = \lambda_1 - a_1;\ \Delta a_1 = \hat{a}_1 - a_1)$ будем обозначать через S_1, а систему (2) с функцией $\beta(t) = \lambda_1 + \hat{a}_1(t)$ — через S_2. Система S_2 является стохастическим аналогом системы с АН, предложенным в [7].

Найдем ограничения на интенсивность действующей помехи η (ξ^u, как видно из (2), не оказывает влияния на работу системы), при которых гарантируется устойчивость тривиального решения S_1, S_2 — систем при постоянно действующих случайных возмущениях, малых в среднем квадратичном. На движениях системы (2) будем рассматривать две функции Ляпунова: $V_1(t) = \frac{1}{2} e_1^2(t)$; $V_2(t) = \frac{1}{2} \Delta A_3^{\mathrm{T}}(t)\Gamma^{-1}\Delta A_3(t)$. Производящие дифференциальные операторы для V_1, V_2 определяются формулами

$$LV_1 = (de_1, \frac{\partial}{\partial e_1}) V_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 y (\beta, \frac{\partial}{\partial e_1})^2 V_1,$$

$$LV_2 = (d\Delta A_3, \frac{\partial}{\partial \Delta A_3}) V_2 + \frac{1}{2} \sigma^2 y (D_1, \frac{\partial}{\partial \Delta A_3})^2 V_2,$$

где $D_1 = -\Gamma \tilde{S} e_1$

Будем считать, что выполняются следующие условия:

1) для $u(t)$ справедливо условие D_0;

2) матрица Λ является гурвицевой, $\lambda_1 > 0$ — некоторое число;

3) положительно определенные функции V_1, V_2 допускают бесконечно малый высший предел и

$$g_1 \|\Delta A_3\|^2 \leqslant V_2 \leqslant g_2 \|\Delta A_3\|^2,$$

где g_1, g_2 — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы Γ^{-1};

4) $\tilde{\delta} \leqslant \mu$, μ — достаточно малое положительное число;

5) $\|Z(t)\| \leqslant \tilde{z} < \infty$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\Delta a_1^2 \leqslant \kappa V_1$ κ — некоторая положительная константа, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Пусть для $\forall t \in [t_0; \infty)$ справедливы оценки

$$M \{V_i(t)\} \leqslant \rho_i(t) \quad i = 1, 2,$$

если $M \{V_i(t_0)\} \leqslant \rho_i(t_0)$.

Тогда для LV_1, LV_2, определенных на движениях S_1 — системы, можно построить матричную систему сравнения |СС|.

Лемма. Невозмущенное движение матричной СС

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2}(\frac{\tilde{z}^2}{\lambda_1 g_1} + \kappa\sigma^2 y) \\ \frac{1}{2}\gamma_1 \sigma^2 y & -\tilde{z}^2 (\gamma_1 g_2 \sigma^2 y)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

при выполнении условий 1) — 5) будут устойчиво, если

$$\sigma^2 y \leqslant \frac{\lambda_1 \tilde{z} \sqrt{3g_1} \sqrt[3]{12\pi^2 \tilde{z}}}{\{\gamma_1 [9\pi^2 \gamma_1 g_2 \tilde{z}^2 (\kappa g_1 \lambda_1^2 \sqrt{3g_1} + \gamma_1 \tilde{z}^2 \sqrt{g_2}) + 2\sqrt{g_2} (27\kappa^2 g_1^3 \lambda_1^4 - \gamma_1^2 g_2 \tilde{z}^4)]^{1/3}} =$$

$$= \Theta, \tag{4}$$

где γ_1 — первый диагональный элемент матрицы Γ.

Доказательство леммы основано на применении леммы 2 из [6]. Если в (3) положить $\kappa = 0$, то получим невозмущенную матричную СС для S_2 — системы, решение которой будет устойчиво при соблюдении следующего ограничения

$$\sigma^2 y \leqslant 2 \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}$$

Теорема 1 [6]. Пусть выполняются условия 1) — 5), а также:
6) производящие операторы функций V_1, V_2, удовлетворяют неравенствам

$$LV_1 \leqslant -\lambda_1 V_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{z}^2}{\lambda_1 g_1} + \kappa\sigma^2 y\right) V_2 + \frac{1}{2}\mu\sigma^2 y,$$

$$LV_2 \leqslant -\frac{\tilde{z}^2}{\gamma_1 g_2 \sigma^2 y} V_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 \sigma^2 y V_1;$$

7) $\sup \sigma^2 y \leqslant \theta$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, где θ определяется (4).
Тогда тривиальное решение S_1 — системы устойчиво при постоянно действующих случайных возмущениях, малых в среднем квадратичном, и

$$\lim_{t \to \infty} M\left\{\|E(t)\|^2\right\} \leqslant \mu\tilde{\beta} \sup_t \sigma^2 y,$$

где $\tilde{\beta}$ — некоторое положительное число.

Теорема 2 [6]. Пусть выполняется условие теоремы 1, кроме условия 4) где $\mu = 0$. Тогда тривиальное решение S_1 — системы асимптотически устойчиво по вероятности с оценкой

$$M\left\{V_1(e_1(t))\right\} \leqslant e^{-\alpha_1(t-t_0)}\left\{\nu_1 V_1(e_1(t_0)) + \nu_2 V_2(\Delta A_3(t_0))\right\},$$

где ν_1, ν_2 — положительные числа; $\alpha_1 > 0$ — число, определяющее степень устойчивости матричной СС (3).

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда тривиальное решение S_1 — системы экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном с оценкой

$$M\left\{\|E(t)\|^2\right\} \leqslant k\|E(t_0)\|^2 e^{-\alpha_1(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

где k — положительное число.

Теоремы 1, 2 устанавливают область устойчивости S_1 — системы. Интенсивность помехи ξ^y ограничена сверху величиной (4), которая зависит от минимального и максимального собственных чисел матрицы Г, нормы вектора Z и параметра λ_1. Величина λ_1 должна выбираться как можно ближе к первому элементу вектора A_3, что соответствует $\mu \to 0$, так как в противном случае дисперсия ошибки $E(t)$ будет увеличиваться. Если λ_1 совпадает с a_1, то гарантируется экспоненциальная устойчивость по отношению к помехе измерения выхода объекта (1).

К сожалению, оценкой (4) для $\sigma^2 y$ в практических приложениях пользоваться затруднительно. Более простую, но несколько завышенную оценку для $\sigma^2 y$ можно получить, исходя из следующего предположения $\|Z\|^2 \geqslant \rho\sigma^2 y$, ($\rho > 0$ — некоторая константа). Тогда

$$\sup \sigma^2 y \leqslant \sqrt[3]{\frac{4\lambda_1^2 \tilde{z}^2 g_1}{\gamma_1^2 g_2 (\rho + \kappa\lambda_1 g_1)}} \qquad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Для S_2 — системы справедлива

Теорема 3 [6]. Пусть выполняются условия 1) — 3), 5), а также:
8) производящие операторы функций V_1, V_2 удовлетворяют неравенствам

$$LV_1 \leqslant -\lambda_1 V_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\tilde{z}^2}{\lambda_1 g_1}\,V_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \hat{a}_1)^2 \sigma^2 y;$$

$$LV_2 \leqslant -\frac{\tilde{z}^2}{\gamma_1 g_2 \sigma^2 y}\,V_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 \sigma^2 y\, V_1;$$

9) интенсивность помехи удовлетворяет неравенству

$$\sup_t \sigma^2 y \leqslant 2\frac{\lambda_1}{\gamma_1}\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \qquad \forall\, t \in [t_0, \infty).$$

Тогда S_2 — система диссипативна и

$$\lim_{t\to\infty} M\left\{\|E(t)\|^2\right\} \leqslant c\,(\lambda_1 + \hat{a}_1)^2 \sup_t \sigma^2 y,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство полученных результатов приведено в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Landau J.M. Martingale conwergence analisis of adaptive schemes — a feedback approach. — IEEE Trans. Autom. Control, 1982, V. AC — 27, № 3, pp. 716—719.

2. Dugard L., Landau J.M., Silveira H. Adaptive srable estimation using MRAS techniques — convergence, analisis evaluation. — IEEE. Trans. Autom. Control, 1980, V. AC — 25, № 6, pp. 1169—1182.

3. *Наредра К.С., Валавани Л.С.* Устойчивые адаптивные наблюдения и управления. — ТИИЭР, 1976, т. 64, № 8, с. 94—106.

4. Lion P.M. Rapid identification of linear and nonlinear systems. — AIAA Sournal, vol. 5, oct. 1967.

5. *Ядыкин И.Б.* О стохастической устойчивости одного класса беспоисковых адаптивных систем управления с эталонной моделью. Автоматика и телемеханика, 1981, № 3, с. 56—68.

6. *Карабутов Н.Н.* Исследование стохастической устойчивости адаптивных наблюдателей неявного типа. — Рукопись депон. В ВИНИТИ, 1985, № 2804—85 Den., 29 с.

7. Lüders G., Narendra K.S. An adaptive observer and identifier a linear system. — IEEE. Trans. Autom. Control, 1973, V. AC — 18, № 5., 496—499.

Adaptiv megfigyelők sztochasztikus stabilitása vektor Ljapunov függvények segitségével

N.N. Karabutov
I. Hadrevi

Összefoglaló

A cikkben az implicit tipusu lineáris dinamikus objektumok adaptiv megfigyelőinek sztochasztikus stabilitásáról van szó. Az egyenleteket a szerzők egy nem-minimális identifikációs formára hozzák, amelyeket aztán a vektor Ljapunov függvény módszer sztochasztikus variánsával vizsgálják.

Stochastic stability of adaptive observers using vector Ljapunov functions

N.N. Karabutov
I. Hadrevi

Summary

In the paper stochastic stability of adaptive observers of linear dynamic objects of implicite-type is investigated. Their equations are transformed to non-minimal identification form using the stochastic variant of the method of vector Ljapunov functions.