MTA SZTAKI Közlemények 33/1985 p. 47-54

LA NON-STABILITÉ NEGATIVE IMPLIQUE DES PÉRIODES DOUBLES

NGUYEN CONG THANH

Institut de Recherch Météorologique et
Hydrologique
Hanoi

En considerant un système dynamique on voit que la non--stabilité des orbites périodiques en générale conduit au changement du comportement asymptotique de système. C'est le phénomène de bifurcation. Les bifurcation locales typiques dans le cas d'une dimension sont exprimées dans les théorèmes bien connus de Guckenheimer (2). Dans les bifurcations possibles on s'interesse bien aux bifurcations de période double. Puisque le phénomène de bifurcations de période double est utilisé pour expliquer l'une des manières de naissance de la turbulence. Autrement dit, la turbulence dans quelques systèmes peut être considerée comme l'accumulation de successives bifurcations de période double (voir [1],[3]). Le théoreme suivant montre que le phénomène de bifurcations de periode double est la consequence de la non-stabilité négative. C-à-d. la non-stabilité négative des points périodeques de période n d'un système à une dimension implique l'existence des points périodiques de période 2N.

THEOREME

Soit f une application de classe C^1 de l'intervalle $I = [0,1]$ dans lui-même. S'il existe un point fixe non--stable négatif, c-à-d. il existe un point $z \in I$ tel que $f(z) = z$ et $f'(z) < -1$. Alors l'application f a une orbite de periode 2.

Dans la demonstration du theorême on utilise la suivante

Proposition 1.

Si f satisfait aux conditions du théorème, il existe un voisinage $U = (z+\varepsilon, z+\varepsilon)$ de u tel que pour tout x U on ait toujours des entiers $n(x), m(x)$ pour lesquels

$$f^{n(x)}(x)-z > \varepsilon; \quad f^{m(x)}(x)-z < -\varepsilon$$

Demonstration de la Proposition 1

Soit $f'(z) = - C$, ou $C > 1$, par la continuté de f' il existe un voisinage $V = (z-\delta, z+\delta)$ de z tel que

$$- \sqrt{C} > f'(x) > C_o^2 \quad \text{pour tout} \quad x \in V$$

Nous considerons le voisinage $U = (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$ avec $\varepsilon = \delta/c^3$, Quand $x \in U$ on a toujours $|f'(x)| > \sqrt{C} > 1$ donc il existe un n_1 tel que $f^{n_1}(x)$ ne soit pas contenu dans U. On note

$$n = \min \{n_1 \text{ tel que } f^{n_1}(x) \notin U\}$$

Alors $|f^n(x) - z| > \varepsilon$ et $|f^i(x) - z| < \varepsilon \ \forall\, i < n$.

Sans limiter la généralité on peut supposer que

$$f^n(x) - z > \varepsilon \tag{1}$$

Alors

$$|f^n(x) - z| = |f o f^{n-1}(x) - z| = |f'(\eta)| \cdot |f^{n-1}(x) - z| \tag{2}$$

où η est une valeur entre $f^{n-1}(x)$ et z. Puisque $f^{n-1}(x)$ reste encore dans le voisinage U, η reste aussi dans ce voisinage, donc $f'(\eta) > C^2$.

En remplacant dans (2) on a

$$|f^n(x) - z| < C^2 \cdot \varepsilon < C^2. \quad \delta/c^3 < \delta, \text{ c-à-d. } f^n(x) \in V$$

Nous considerons la difference $f^{n-1}(x) - z$ et avons

$$f^{n+1}(x) - z = fof^n(x) - z = f'(\nu)\cdot(f^n(x)-z)$$

ou est entre $f^n(x)$ et z donc il reste encore dans le voisinage V.

Alors

$$f'(\nu)\cdot(f^n(x) - z) < \sqrt{C}\cdot\varepsilon < \varepsilon \quad \text{c-à-d.} \quad f^{n+1}(x) - z < -\varepsilon$$

La démonstration de la Proposition 1 est terminée.

Remarque

De cette Proposition on peut deduire que dans ce voisinage il y a des points t, pour lesquels $f(t) > t$ (resp. $f(t) < t$) et il existe un certain entier n tel que $f^n(t) < t$ (resp. $f^n(t) > t$). En effet, si $t \in U$ suppose $f(t) < t$, on a $z+\varepsilon > t$ et d'après la Proposition il existe n tel que

$$f^n(t) - z > \varepsilon \quad \text{Donc } f^n(t) > z+\varepsilon > t.$$

Démonstration du Théorème

Pour tout $x \in I$ on definit un nombre entier $n(x)$ comme suivant

si $f(x) > x$, $n(x)$ tel que $f^n(x) > x$ avec $n \leq n(x)$ et

$$f^{n(x)+1}(x) \leq x$$

si $f(x) < x$, $n(x)$ tel que $f^n(x)$ x avec $n \leq n(x)$ et

$$f^{n(x)+1}(x) \geq x$$

et pose

$$N = \min\{n(x), \forall x \in I\}$$

d'après la Proposition précédente N est un nombre entier fini. Dans le cas $N = 1$ la conclusion du Théorème est donnée dans la

Proposition 2

Soit f une application continue de I dans lui-même. Suppose f ait des points $x \in I$ avec les proprietés suivantes

$$f(x) > x (\text{resp. } f(x) < x) \text{ et } f^2(x) \leq x \ (\text{ resp. } f^2(x) \geq x)$$

Alors il existe une orbite périodique de periode 2.

Nous ferons la démonstration dans le cas $f(x) > x$ et $f^2(x) \leq x$.

Vu que $f^2(x) < x$ et $f^2(0) \geq 0$, dans l'intervalle $[0,x)$ is existe au moins un point y tel que $f^2(y) = y$. On appelle p le point le plus proche de x tel que $f^2(p) = p$. Alors $f^2(q) \neq 1$ avec $q \in (p,x)$.

Puisque $f^2(x) < x$ on a

$$f^2(q) < q \quad \text{avec tout} \quad q \in (p,x) \tag{1}$$

Si p n'était pas un point d'une orbite périodique de periode 2, alors p serait un point fixe de f : $f(p) = p$. Dans l'intervalle (p,x) on aurait toujours $f(q) \neq q$ et $f(x) > x$ donc

$$f(q) > q \quad \text{avec tout} \quad q \in (p,x) \tag{2}$$

Alors il existerait un point t près de p tel que $t \in (p,x)$

$$p < f(t) < x \tag{3}$$

Par (2) et (3) on aurait $f^2(t) = f o f(t) > f(t) > t$. Celui est avec (1). Donc $f(p) \neq p$, et p est un point périodique de periode 2.

Le cas où $f(x) > x$ et $f^2(x) = x$ est evident.

Nous revenons à la démonstration du Théorême dans le cas où $N \geq 2$. On note u le point, pour lequel $n(u) = N$ et suppose $f(u) > u$. Alors on a

$$f(u) > u, \; f^N(u) > u \quad \text{et} \quad f^{N+1}(u) < u$$

Note $v = f^N(u)$ on a $v > u$

En comparant v avec $f(u)$ on obtient les suivants

Dans le cas $v = f(u)$, c-à-d. $f^{N+1}\ f(u) = f(u)$.
Si $N \geq 3$ et $f\ f(u) \neq f(u)$ c'est $f(u)$ qui est point periodique de periode plus grand que 2.D' après Théorême de Sharkovski ([5]) il exists des points périodiques de période 2. Donc nous ne considerons le cas où de ce que

$$f^{N-1} \circ f(u) \quad = f(u)$$

il résulte

$$f \circ f(u) = f(u)$$

Dans le cas $v > f(u)$ i.e. $f^{N-1} \circ f(u) \quad f(u)$ d'après la définition de N on a

$$f \circ f(u) > f(u)$$

En somme, dans le cas $v \geq f(u)$ on obtient

$$f \circ f(u) \geq f(u)$$

De la définition de N, en appliquant pour $f(u)$ on a

$$f^N \circ f(u) \geq f(u) \qquad \text{et}$$

$$f(v) = f^{N+1}(u) = f^N \circ f(u) \geq f(u) > u$$

Cette contradiction excluse la possibilité $v \geq f(u)$.
Donc nous avons

$$f(v) \leq u < v < f(u)$$

D'après le théorème des valeurs intermediaires il existe des points dans (u,v), auxquelles la fonction f prend la valeur v. On note w le point le plus proche de u tel que

$$f(w) = v$$

Puisque $f(u) > v$, dans l'intervalle (v,w) on a toujours

$$f(x) > v > x \quad \text{pour tout} \quad x \in (u,w) \qquad (4)$$

On a aussi

$$f \circ f(w) = f(v) \leq u \quad \text{et} \quad f \circ f(u) > u \quad \text{puisque} \quad f(u) > u.$$

Alors il existe un point $s \in (u,w)$ tel que

$$f \circ f(s) = s$$

Par (4) le point s n'est pas un point fixe.

C.Q.F.D.

Remarque

En général la non-stabilité positive des points périodiques de periode N n'implique pas l'existence des points périodiques de periode 2N. Par exemple

$$f(x) = x^a \quad \text{avec} \quad a > 1.$$

REFERENCES

[1] M.J. Feigenbaum, The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems. Comm. Math. Phys. V.77 (1980).

[2] J. Guckenheimer, On the bifurcations of maps of the interval. Invent. Math. 39(1977).

[3] R.B. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature 261. (1976).

[4] Nguyen Cong Thanh, Dissertation, Budapest 1985.

[5] A.N. Sharkovski, Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. Ukranian Math. J. 16(1964).

A negativ instabilitás implikálja a 2 periódusu pálya létezését

Nguyen Cong Thanh

Összefoglaló

A dolgozatban a következő tételt bizonyitjuk be: legyen f a $[0,1]$ intervallum egy C^1 leképzése önmagába; ha f-nek létezik egy $z \in [0,1]$ fixpontja ugy, hogy $f'(z) < -1$, akkor az f leképzésnek van 2 periódusu pályája.

The negative unstability implies the existence of 2-period point

Nguyen Cong Thanh

Summary

In this paper the following theorem is proved: let f be a C^1-mapping of the interval $[0,1]$ into itself; if there exists a fixed point $z \in [0,1]$ of f such that $f'(z) < -1$, then the mapping f has 2-period orbit.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЛЕЧЕТ ЗА СОБОЙ СУЩЕСТВОВАНИЕ ОРБИТЫ ПЕРИОДА 2

Нгуен Конг Тхан

Резюме

В работе доказывается следующая теорема: пусть f отображение класса C^1 интервала $[0,1]$ в себя; если существует неподвижная точка $z \in [0,1]$ такая, что $f'(z) < -1$, то тогда отображение f имеет орбиту периода 2.