О НАБЛЮДЕНИИ АВТОРЕГРЕСИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ В ДИСКРЕТНЫХ ТОЧКАХ

Арато Николай

Университет имени Етвеша Лоранда, Будапешт

Хорошо известно, что процесс авторегрессии первого порядка с непрерывным временем наблюдаемый в дискретных точках является также процессом авторегрессии (см [2]). Естественен вопрос: справедливо ли это для процессов авторегрессии высших порядков? Ответ в общем случае оприцателен, в дискретных точках мы получаем смешанный процесс авторегрессии-скользящего среднего. Я показываю это для процесса авторегрессии p-го порядка, а для процесса авторегрессии 2-го порядка считаю точные коэффиценты. В книгах [1], [2] не даются явные формулы для переписки в стохастические разностные уравнения дискретного времени.

Пусть $\xi(t)$ процесс авторегрессии p-го порядка, т.е., $\xi(t)$ удовлетваряет дифференциальнаму уравнению:

$$(1)\qquad d\xi^{(p-1)}(t)+ a_1\xi^{(p-1)}(t)+\ldots+a_p\xi(t)]dt = dw(t),$$

где w винеровский процесс (процесс брауновского движения), с коэффициентом диффузии σ^2, а многочлен

$$(2)\qquad P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^{p-k} = \prod_{k=1}^{p} (z-\mu_k)$$

имеет корни с отрицательной реальной честью.

Нас интересует каким будет процесс $x(n)=\xi(n\delta)$, где $\delta>0$ заданное число.

Обозначив через $\xi(t)$ p-мерный процесс: $\xi^*(t) = \xi(t),\ldots,$ $\ldots, \xi^{p-1}(t))$, где * обозначает транспонирование.

Мы получаем: $d\underline{\xi}(t) = A\underline{\xi}(t)dt + d\underline{w}(t)$, где $\underline{w}$ p-мерный винеровский процесс с коэффициентом:

$$B_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} & \\ & \sigma^2 \end{pmatrix}_{p\times p},$$

а

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_p & \ldots & & & -a_1 \end{pmatrix}_{p\times p}.$$

Известно ([2]), что обозначив через $\eta(n) = \xi(n\delta)$:

(3) $$\underline{\eta}(n) = Q\underline{\eta}(n-1) + \underline{\varepsilon}(n),$$

где $Q = e^{A\delta}$, $\underline{\varepsilon}(n)$ гауссовский белый шум.

Докажем следующую лемму:

Лемма: Пусть $\underline{y}(n)$ p-мерный процесс авторегрессии первого порядка:

$$\underline{y}(n) = S\,\underline{y}(n-1) + \underline{\varepsilon}(n),$$

тогда спектральная плотность r-го компонента $\underline{y}(n)$:

(4) $$\frac{|T_r(e^{-i\lambda})|^2}{|\tilde{P}(e^{-i\lambda})|^2},$$

где $\tilde{P}(z) = \sum_0^p \tilde{a}_n Z^n$ характеристический многочлен матрицы S, а T_r

многочлен (p-1) степени.

<u>Доказательства</u>: Спектральная плотность $\underline{y}$ равняется (см. [1], 108. стр.):

$$f_{\underline{y}}(\lambda) = \frac{1}{2\Pi}(I-e^{-i\lambda}S)^{-1}\, BB^*(I-e^{i\lambda}S)^{*-1} ,$$

где $BB^* = E\underline{\varepsilon}(n)\underline{\varepsilon}^*(n)$, $B_y = E\underline{y}(n)\underline{y}^*(n)$, $B_y = SB_YS^* + BB^*$.

$\underline{y}$ стационарен, поэтому $||S||<1$, откуда:

$$(I- e^{-i\lambda}S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\lambda k}\, S^k .$$

Используя это и что $\sum_{0}^{p} \tilde{a}_n S^n = 0$

$$(\sum_{n=0}^{p} a_n e^{i\lambda n})(I-e^{-i\lambda}S)^{-1} = \sum_{n=0}^{p} \tilde{a}_n e^{i\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\lambda k}\, S^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{p} a_n e^{i\lambda n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda k}\, S^k + (\sum_{n=0}^{p} \tilde{a}_n\, S^n)(\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-i\lambda \ell}\, S^k) =$$

$$= (\sum_{k=0}^{p-1} e^{i\lambda\ell}\, R(\ell))\, e^{i\lambda} ,$$

где $R(\ell) = R(\ell)_{pxp}$ является матрицей размерности pxp.

Из этого следует

$$f_{\underline{y}}(\lambda) = \frac{1}{2\Pi}\,\frac{1}{\left|\sum_{n=0}^{p} \tilde{a}_n e^{-i\lambda n}\right|^2}\,(\sum_{\ell=0}^{p-1} e^{i\lambda\ell}R(\ell)B)(\sum_{\ell=0}^{p-1} e^{-i\lambda\ell}R(\ell)B)^*$$

с элементом (r,r)

$$(f_{\underline{y}}(\lambda))_{rr} = \frac{|T_r(e^{-i\lambda})|^2}{|\tilde{P}(e^{-i\lambda})|^2} ,$$

T_r многочлен (p-1)-ой степени, а это доказывает лемму.***

В частном случае (1)-(3) характеристический многочлен $Q = \prod_{k=1}^{p} (z-e^{\mu_k \delta})$. Используя это и лемму сразу получаем:

Теорема: Наблюдая процесс авторегрессии p-го порядка с спектральной плотностью $\dfrac{1}{\left|\prod_{k=1}^{p} (i\lambda-\mu_k)\right|^2}$ в точках $n\delta$, $(n=0,1,\ldots)$, мы получаем смешанный процесс авторегрессии p-го порядка скользящего среднего (p-1)-го порядка с спектральной плотностью $\dfrac{|T(e^{-i\lambda})|^2}{\left|\prod_{k=1}^{p} (e^{i\lambda}-e^{\mu_k \delta})\right|^2}$, где T многочлен (p-1)-ой степени.

Рассмотрим отдельно случай p=2. P имеет два корня: μ_1 и μ_2. Из сказанной теоремы следует, что $\xi(n\delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi(n\delta) - (e^{\mu_2\delta}+e^{\mu_2\delta})\, \xi((n-1)\delta)+e^{\mu_2\delta+\mu_2\delta}\, \xi((n-2)\delta)=t(n\delta) ,$$

где $t(n\delta)$ процесс скользящего среднего 1-ого порядка. Я хочу подсчитать автоковарианции этого процесса. Для легкости предположим $\delta=1$ и обозначим $\tilde{a} = -(e^{\mu_1}+e^{\mu_2})$, $\tilde{a}_2 = e^{\mu_1+\mu_2}$ и

$$t(n) = \xi(n) + \tilde{a}_1\xi(n-1) + \tilde{a}_2\xi(n-2) ,$$

тогда

$$E\, t^2(n)=(1+\tilde{a}_1^2+\tilde{a}_2^2)E\xi^2(n)+(2\tilde{a}_1+2\tilde{a}_1\tilde{a}_2)\, E\xi(n)\, \xi(n-1) + $$
$$+ 2\tilde{a}_2\, E\xi(n)\, \xi(n-2)$$

$$E\, t(n)t(n+1) = (\tilde{a}_1+\tilde{a}_1\tilde{a}_2)\, E\xi^2(n) + (1+\tilde{a}_2+\tilde{a}_1^2+\tilde{a}_2^2)E\xi(n)\xi(n-1) +$$
$$(\tilde{a}_1+\tilde{a}_1\tilde{a}_2)E\xi(n)\xi(n-2) + \tilde{a}_2E\xi(n)\, \xi(n-3) .$$

Используем, что ([1], 118. стр.):

$$E\underline{\xi}(s+t)\,\underline{\xi}^*(s) = e^{At}B_\xi \qquad B_\xi = (B_{ij})$$

где B_ξ удовлетворяет уравнению

$$AB_\xi + B_\xi A = -B_{\underline{w}}$$

откуда используя $Q^2 + \tilde{a}_1 Q + \tilde{a}_2 I = 0$, $(Q = e^A)$, получим

$$E\,t^2(n) = (1+\tilde{a}_1^2-\tilde{a}_2^2)\,B_{11} + 2\tilde{a}_1(QB_\xi)_{11} \quad ,$$

$$E\,t(n)\,t(n+1) = \tilde{a}_1 B_{11} + (1+\tilde{a}_2)(QB_\xi)_{11} \,.$$

В случае $\mu_1 \neq \mu_2$

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_2 & 1 \\ -\mu_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu_2 & 1 \\ -\mu_2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_1-\mu_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu_2 & 1 \\ -\mu_1 & 1 \end{pmatrix}$$

откуда выходит

$$Q = \frac{1}{\mu_1-\mu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 e^{\mu_2} - \mu_2 e^{\mu_1} & e^{\mu_1} - e^{\mu_2} \\ \mu_1\mu_2(e^{\mu_2} - e^{\mu_1}) & \mu_1 e^{\mu_1} - \mu_2 e^{\mu_2} \end{pmatrix} \quad ,$$

и

$$B_\xi = \frac{\sigma^2}{-2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_1\mu_2 \end{pmatrix} \quad .$$

В случае $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ результат:

$$Q = e^{\mu} \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 \\ \mu^2 & \mu+1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$B_\xi = \frac{\sigma^2}{-4\mu^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Проведя подсчеты получаем в случае $\mu_1 \neq \mu_2$

$$E\, t^2(n) = \frac{\sigma^2}{-2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2(\mu_1-\mu_2)} ([\mu_1-\mu_2)(1-e^{2(\mu_1+\mu_2)}) +$$

$$+ (\mu_1+\mu_2)(e^{2\mu_1}-e^{2\mu_2})],$$

$$E\, t(n)t(n+1) = \frac{\sigma^2}{-2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2(\mu_1-\mu_2)}[-\mu_1 e^{\mu_1}+\mu_2 e^{\mu_2}+e^{\mu_1+\mu_2}$$

$$(\mu_1 e^{\mu_2}-\mu_2 e^{\mu_1})] ,$$

а в случае $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

$$E\, t^2(n) = \frac{\sigma^2}{-4\mu^3} [1 + 2e^{2\mu}(1+\mu) - e^{4\mu}] ,$$

$$E\, t(n)t(n+1) = \frac{\sigma^2}{-4\mu^3} [-e^{\mu}(1+\mu) + e^{3\mu}(1-\mu)] .$$

<u>Замечание 1</u>. Важность вычисления коэффициентов смешанного процесса авторегрессии скользящего среднего обьясняется тем, что мы не можем наблюдать производные процесса, если бы это было возможно, мы могли бы использовать формулу (3).

<u>Замечание 2.</u> Можно было бы попробовать считать спектральную плотность дискретного процесса зная форму спектральной плотности процесса с непрерывным временем. Но этот путь видимо значительно сложнее (кроме 1-ого порядка) поскольку, если $f(\lambda)$ спектральная плотность процесса с непрерывным временем, то спектральная плотность процесса наблюдаемого в дискретных целых точках дается формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\lambda-(2k+1)\Pi) .$$

<u>Замечание 3</u>. Показав, что $\sum_{j=1}^{k} v_j(n)$ скользящее среднее, где $v_j(n) = \sum_{j=0}^{p} a_{ji}\, u_j(n-i)$ скользящее среднее p-го порядка, для которых: $E\, u_j(n)\, u_\ell(n-m) = 0$ ($j \neq \ell$, $m>0$), можно доказать лемму, не используя спектральную плотность. Для незасисимых скользящих средних это показано в [3]. Похожим методом доказывается случай $k=2$. Правилен ли результат для $k \geq 3$, мне неизвестно.

Литература

[1] Arató, M. (1982), Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Lecture Notes in Control and Information Sciencies,45, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

[2] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н. (1974), Статистика случайных процессов, Наука, Москва.

[3] Granger, C. W. J. (1972), Time series modelling and interpretation, European Econometric Congress, Budapest.

Folytonos idejű magasabbrendű autoregressziók megfigyelése diszkrét pontokban

ARATÓ MIKLÓS

Összefoglaló

Folytonos idejű p-adrendű autoregresszióról megmutatom, hogy ARMA(p,p-1) lesz diszkrét helyeken nézve. Általános esetben kiszámolom spektrálsűrűségének nevezőjét. Ehhez megmutatom, hogy néz ki egy elsőrendű többdimenziós autoregresszió egy komponensének spektrálsűrűsége (4). A p=2 esetben kiszámolom a folyamat mozgóátlag részének autokovarianciáit, és ezzel az ARMA(2,1) folyamat együtthatóit (v.ö. [2], 257 oldalon szereplő közelitésekkel).

Continuous time autoregression processes with discrete time observations

ARATÓ Nicolay

Summary

In this paper we prove that the p order autoregressive process $\xi(t)$ with continuous time parameter, AR(p), becomes a discrete time ARMA(p,p-1) one. Formula (4) gives the general form of spectral density of the r-th component of a discrete time first order p-dimensional autoregressive process $\underline{y}(t)$. In the special case p=2 all the calculations are carried out, i.e., the coefficients of ARMA (2,1) are calculated (see approximations in [2], p. 257).