MTA SZTAKI Közlemények 32/1985 81-85

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ВЕНТИЛЬНЫМИ СХЕМАМИ* РАЗНОЙ ГЛУБИНЫ

Гал Анна

Введем следующие обозначения:

$\lceil a \rceil$ - наименьшее целое число, не меньше числа a

$\lfloor a \rfloor$ - наибольшее целое число, не больше числа a

t_{ij} - элемент матрицы стоящий в i-той строке и j-том столбце

T_n - матрица с n строками и n столбцами, для которой

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq j \\ 1, & \text{если } i < j \end{cases}$$

$L(S)$ - число вентилей в схеме S

$$L^{(r)}(n) = L^{(r)}(T_n)$$

$L^{(r)}(T_n) = \min L(S)$ по всем схемам S глубины $\leq r$, реализующим T_n.

Очевидно, что $L^{(1)}(T_n) \sim \frac{n^2}{2}$ при $n \to \infty$.

В [2] доказано, что $L^{(2)}(T_n) \sim n \cdot \log n$ при $n \to \infty$**.

В настоящей работе получены верхние оценки для схем глубины $r \geq 3$:

$$L^{(r)}(T_n) \leq c \cdot n \cdot K_r(n) \quad (1)$$

где c некоторая константа, а $K_r(n)$ последовательность функций

---

* Определение вентильных схем см. в [1].

** Здесь и ниже log означает логарифм по основанию 2, а асимптотические соотношения рассмотрим при $n \to \infty$.

определенная следующим образом: $K_1(n) = \sqrt{n}$, $K_2(n) = \log n$,

$$K_r(n) = \min\{i \mid \overbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}^{i\ \text{раз}}(n))\ldots) \le 2\}.$$

Заметим, что $K_3(n) = \lceil \log\log n \rceil$, $K_4(n) = \log^* n$, а уже $K_6(n)$ является очень медленно возрастающей функцией. Отметим, связь функций $K_r(n)$ с функцией обратной к функции Аккерманна /определение см. в [3] стр. 72/. Для $\forall r = 2s,\ s \ge 1$ справедливо следующее соотношение:

$$K_r(n) = \min\{i \mid A(2,i,s+2) \ge n\} ,$$

где A есть функция Аккерманна.

Для доказательства утверждения (1) для любой матрицы T_n построим схему S глубины r реализующую T_n, сложности $L(S) \le c \cdot n \cdot K_r(n)$. Строкам матрицы T_n ставим в соответствие входы, стобцам выходы схемы S . Перенумеруем входы и выходы от 1 до n . Схема S будет состоять из K подсхем. Обозначим их через $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(K)}$.

Построение схемы $S^{(1)}$:

Разобъем строки и столбцы матрицы T_n соответственно на k_1 групп, в каждой из которых не больше чем $\lceil \frac{n}{k_1} \rceil$ строк /столбцов/.

Перенумеруем группы строк и группы столбцов от 1 до k_1. Возьмем минимальную схему S_{k_1} глубины r-2, реализующую матрицу T_{k_1} . Тогда $L(S_{k_1}) = L^{(r-2)}(k_1)$. / Заметим, что в силу наших обозначений T_{k_1} имеет ту же структуру как T_n, только число ее строк и столбцов равно k_1 ./ Перенумеруем входы и выходы схемы S_{k_1} от 1 до k_1. Подставим S_{k_1} в схему S следующим образом: входы схемы S соответствующие строкам матрицы T_n i-той группы соединим i-тым входом схемы S_{k_1} , а выходы схемы S соответствующие столбцам i-той группы соединим i-тым выходом схемы S_{k_1}. Схему /часть схемы S/ которую так получим обозначим через $S^{(1)}$. Видно, что $L(S^{(1)}) = 2n + L^{(r-2)}(k_1)$.

Построение схемы $S^{(j+1)}$:

$S^{(j+1)}$ будет состоять из $k_1 \cdot k_2 \ldots k_j$ частей, каждая из которых реализует подматрицу из элементов стоящих на пересечениях строк и столбцов одной группы /номер группы строк и группы столбцов то же самое/. Тут имеются в виду группы строк и столбцов полученные при построении схемы $S^{(j)}$. Каждая подматрица имеет ту же структуру как исходная матрица T_n, и размер $\leq \left\lceil \frac{n}{k_1 \cdot k_2 \ldots k_j} \right\rceil$. При построении $S^{(j+1)}$ строки и столбцы каждой подматрицы разобъем на k_{j+1} групп, и для каждой подматрицы поступим аналогично построению схемы $S^{(1)}$. Будет выполняться:

$$L(S^{(j+1)}) = 2n + k_1 \cdot k_2 \ldots k_j \cdot L^{(r-2)}(k_{j+1}).$$

Пусть K первое число, для которого выполнено:

$$\left\lceil \frac{n}{k_1 \cdot k_2 \ldots k_{K-1}} \right\rceil \leq 2 \ .$$

Тогда при построении схемы $S^{(K)}$ будем иметь дело с подматрицами число строк и столбцов которых ≤ 2. Очевидно, что $L(S^{(K)}) \leq k_1 \cdot k_2 \ldots k_{K-1}$. Так полученная схема $S = \bigcup_{j=1}^{K} S^{(j)}$ реализует T_n, и сложность ее

$$L(S) \leq K \cdot 2n + \sum_{j=1}^{K-1} k_1 \ldots k_{j-1} L^{(r-2)}(k_j) + k_1 \ldots k_{K-1} \qquad (2)$$

k_j-тые выбираем следующим образом:

$$k_1 = \left[\frac{n}{K_{r-2}(n)}\right]$$

$$k_j = \left[\frac{\overbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}^{j-1 \text{ раз}}(n))\ldots)}{\underbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}_{j \text{ раз}}(n))\ldots)}\right] \quad \text{для } j=2,\ldots,k-1$$

Очевидно, что $k_1 \ldots k_{K-1} < n$ выполняется для $\forall\ r \geq 3$.

Пусть $r = 3$. Тогда $L^{(r-2)}(k_j) \leq \frac{1}{2} k_j^2$, и по определению k_j-тых для $\forall\ j=1,\ldots K-1$: $k_1 \ldots k_{j-1} \cdot k_j^2 \leq n$.

Пусть $r > 3$. Так как $L^{(2)}(n) \sim n \cdot \log n$, можем использовать, что $L^{(r-2)}(k_j) \leq c \cdot k_j \cdot K_{r-2}(k_j)$. По определению k_j-тых

$$k_1 \ldots k_{j-1} \cdot k_j \cdot K_{r-2}(k_j) \leq n \cdot \frac{K_{r-2}(k_j)}{\underbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}_{j \text{ раз}}(n))\ldots)} \leq n ,$$

так как функции $K_r(n)$ монотонно возрастают. Используя эти неравенства из (2) получим $L(S) \leq c \cdot n \cdot K$. Очевиднь, что $K\ K_r(n)$. Утверждение (1) доказано.

В заключении заметим, что из доказательства утверждения видно:

$$L^{(3)}(T_n) \lesssim \frac{5}{2}\, n \cdot \log\log n ,$$

$$L^{(4)}(T_n) \lesssim 3\, n \cdot \log^* n .$$

Литература:

[1] Лупанов О.Б.: О вентильных схемах, Acta Cybernetica Tom. 4, Fasc. 4, Szeged, 1980, стр. 311-315.

[2] Tarján T.G.: Complexity of lattice-configurations, Studia Sci. Math. Hungar. v.10, 1975, pp. 203-211.

[3] Giorgio Ausiello: Algoritmusok és rekurziv függvények bonyolultságelmélete, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

Egy háromszögmátrix bonyolultsága különböző mélységü kapuhálózatokkal való realizálása esetén

GÁL Anna

Összefoglaló

$L^{(r)}(T_n)$ jelöli a T_n mátrix bonyolultságát r-nél nem nagyobb mélységü kapuhálózatokkal való realizálása esetén. A cikk $r \geq 3$-ra a következő eredményt bizonyitja:

$$L^{(r)}(T_n) \leq c \cdot n \cdot K_r(n),$$

ahol c konstans, $K_1(n) = \sqrt{n}$, $K_2(n) = \log n$,

$$K_r(n) = \min \{ i \mid \underbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}_{\text{i-szer}}(n))\ldots) \leq 2 \}.$$

On the complexity of realization of a triangle-matrice by gate circuits of different depths

A. GÁL

Summary

$L^{(r)}(T_n)$ characterise the complexity of matrice T_n, when the depht of realisation $\leq$ r. It is shown that for $r \geq 3$ $L^{(r)}(T_n) \leq c \cdot n \cdot K_r(n)$, where c is a constant,

$K_1(n) = \sqrt{n}$, $K_2(n) = \log n$,

$$K_r(n) = \min \{ i \mid \underbrace{K_{r-2}(\ldots(K_{r-2}}_{\text{i times}}(n))\ldots) \leq 2 \}.$$