 Közlemények 31/1984 115-151

О СУЩЕСТВЕННО МИНИМАЛЬНЫХ ТС-КЛОНАХ НА ТРЕХЭЛЕМЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ

Деметрович Я., Мальцев И.А.

Введение

Пусть А-конечное множество, f-n - местная операция на А. Операция f удовлетворяет термальному условию, если для любого i, $0 \le i \le n$, и любых $x, y, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ из А

из

$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots b_n)$

следует

$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_{i-1}, y, b_{i+1}, \ldots, b_n)$.

Операции, удовлетворяющие термальному условию, будем называть ТС-операциями.

Множество всех операций на множестве А обозначим через O_A. Предитеративной алгеброй Поста над множеством А называется алгебра $P_A^* = \langle O_A, \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$ [5] типа/1,1,1,2/ со следующим образом определенными операциями:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

$$(f*g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}).$$

Клонами называются подалгебры алгебры P_A^*, содержащие операцию $e_2^2(x_1, x_2) = x_2$. Клон, состоящий только из ТС-операций, называется ТС-клоном.

Термальное условие является обобщением некоторых очевидных свойств унарных операций и линейных операция в векторных пространствах. Оно играет существенную роль при изучении некоторых классов многообразий. Более подробную информацию читатель найдет в работах Бермана и Маккензи [3] и Тэйлора [12].

Каждый ТС-клон на множестве A содержится в некотором максимальном ТС-клоне. На двухэлементном множестве имеется один максимальный ТС-клон, на трехэлементном - два, на множестве из четырех элементов имеется уже 25 максимальных ТС-клонов. При $2<|A|<\omega$ существует ТС-клон, имеющий счетное число подклонов [8], число подклонов каждого максимального ТС-клона не более чем счетно [3].

Операция f из O_A, имеющая n переменных, существенно зависит от своей i-той переменной, если в A найдутся такие $a_1,\ldots,a_{i-1}$, $a_{i+1},\ldots,a_n,b,c$, что

$f(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n)\neq f(a_1,\ldots,a_{i-1},c,a_{i+1},\ldots,a_n)$.

Операцией называется существенно m-местной, если она существенно зависит ровно от m переменных. Операции, существенно зависящие более чем от одной переменной, называются существенно многоместными.

Клон называется существенно минимальным, если он содержит существенно многоместные операции, но все его собственные подклоны состоят только из существенно одноместных операций. /Мачида [10]/. Минимальным называется клон, имеющий только один собственный подклон - подклон E , порождаемый операцией e_2^2.

В дальнейшем везде предполагается, что $A=\{0,1,2\}$, сложение всегда ведется по mod 2, если не оговорено противное. На A имеется два максимальных ТС-клона: L и B. Клон L состоит из линейных операций, т.е. операций, представимых в виде $a_o+a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, сложение и умножение ведется по mod 3. Решетка подклонов клона L конечна и описана Деметровичем и Бадьинским [1, 2]. Клон B состоит из одноместных операций и операций, представимых в виде $f_o(f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n))$, где слежение ведется по mod 2, а операции $f_o, f_1, \ldots, f_n$ одноместные. Впервые этот клон упомянут в работе Бурле [4]. Описание решетки подклонов клона Бурле дает полное решение следующей проблемы: найти все ТС-клоны на трехэлементом множестве. Авторами решена более скромная проблема: построена решетка всех подклонов клона, образованного операциями, принадлежащими клону Бурле, и принимающими значение 0 и 1, и операциями из E. Вид этой решетки позволяет сделать заключение, что решетка подклонов клона Бурле устроена сложнее известной решетки Поста клонов на двухэлементном множестве [11, 14]. С другой стороны, в качестве следствия получено полное описание минимальных и существенно минимальных подклонов клона Бурле. Отметим, что некоторые общие свойства клона Бурле изучались в работах [6-9].

1. Строение фундаментальной решетки $L(F_\infty^{\zeta\Psi})$

Восемь одноместных функций, принимающих значение 0 и 1, и одна функция, принимающая три значения играют существенную роль в дальнейших рассуждениях /таблица 1/.

x	ζ	Ψ	γ	δ	$\bar{\zeta}$	$\bar{\Psi}$	c_o	c_1	λ
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	1	0	0	1	2

Таблица 1.

Для простоты иногда будем писать $\gamma+\gamma+\gamma$, $\zeta+\gamma$ и т.п. вместо
$\gamma(x_1)+\gamma(x_2)+\gamma(x_3)$, $\zeta(x_1)+\gamma(x_2)$ и 0, 1 вместо c_o, c_1.

Клон, образованный операциями из клона Бурле, принимающий значения 0, 1, и операциями из E, обозначим через Z. Через L(K) обозначим решетку подклонов клона K. Для элементов решетки L(Z) иногда будут вводиться специальные обозначения, а иногда будут указываться отличные от e_2^2 элементы базиса /операция e_2^2 входит в каждый базис/. Поскольку клон вместе с каждой операцией f содержит также все операции, получающиеся из f с добавлением и изъятием несущественных переменных, в большинстве случаев будет предполагаться, что все переменные рассматриваемых операций существенные.

Операция λ отображает множество A на себя. Сопоставляя каждой операции f из Z операцию

$$f^{\alpha}(x_1,\dots,x_n)=\lambda(f(\lambda^{-1}(x_1),\dots,\lambda^{-1}(x_n))),$$

получим отображение $\alpha: f\to f^{\alpha}$, которое является автоморфизмом клона Z. Операцию f^{α} будем называть двойственной к операции f. Подклоны клона Z назовем двойственными, если один переводится в другой автоморфизмом α. Очевидно, операции ψ, δ, $\bar{\psi}$, c_1 двойственны операциям ζ, γ, $\bar{\zeta}$, c_o.

Пусть $J^o_{\ell o}$ - клон, порождаемый операциями e^2_2 и $\sum\limits_{i=1}^{\ell}\gamma(x_i)$. Так как $\gamma(0)=\gamma(1)$, то очевидно, что клон $J^o_{\ell o}$ не содержит операций, существенно зависящих более чем от ℓ переменных. Он содержит лишь операции вида $\sum\limits_{i=1}^{m}\gamma(x_i)$, $m\le\ell$, операции, получающиеся из указанных добавлением фиктивных переменных, константу c_o и операции из E. Получаем возрастающую цепочку клонов $E\subset J^o_{oo}\subset J^o_{1o}\subset\dots$, пределом которой является клон $J^o_{\infty o}$, содержащий все суммы $\gamma+\dots+\gamma$ /Рис. 1/.

К операции $\sum\limits_{i=1}^{\ell}\gamma(x_i)$ двойственной является операция $1+\sum\limits_{i=1}^{\ell}\gamma(x_i)$. Получаем цепочку двойственных клонов $E\subset J^1_{oo}\subset J^1_{o1}\subset\dots$ с пределом $J^1_{o\infty}$. /Обозначая через J^o_{oo} (J^1_{oo}) клон, порождаемый операциями e^2_2 и $c_o(c_1)$. /

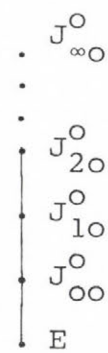


Рис. 1.

Обозначим через $J_{\ell m}$ клон, порождаемый совместно элементами клонов $J^o_{\ell o}$ и J^1_{om}. Ввиду свойства операций γ и δ очевидно, что $J_{\ell m}$ содержит лишь те операции, которые входят либо в $J^o_{\ell o}$, либо в J^1_{om}, т.е. $J_{\ell m}$ является простым объединением клонов $J^{o}_{\ell o}$ и J^{1}_{om}. Получаем решетку $L(W)$ /рис. 2/.

Пусть $e=\Delta e^2_2$, E_ζ и E_Ψ - клоны, порождаемые элементами e^2_2, ζ и e^2_2, Ψ соответственно. Так как операции e, ζ, Ψ оставляют элементы множетсва $\{0, 1\}$ неподвижными, $\gamma(e)=\gamma$, $\delta(e)=\delta$, $\gamma(\zeta)=\gamma(\Psi)=c_o$, $\delta(\zeta)=\delta(\Psi)=c_1$, то множества вида $K_1\cup K_2\cup K_3$, где $K_1\in\{J^{o}_{\ell o}, J^{1}_{om}, J_{\ell m}\}$, K_2, $K_3\in\{E_\zeta, E_\Psi\}$ являются клонами. Получаем решетку $(W_{\zeta,\Psi})$ /рис. 3/. Как частный случай получаем решетку подполугрупп полугруппы, порождаемой операциями ζ, Ψ, γ, δ, e /рис. 4/.

Каждый клон, содержащий $\bar{\zeta}$, содержит также $\zeta=\bar{\zeta}*\bar{\zeta}$. Клон $J_{\ell m}$ порождается операциями $f(x_1,\ldots,x_\ell)=\sum_{i=1}^{\ell}\gamma(x_i)$ и $g(x_1,\ldots,x_m)=$ $=1+\sum_{i=1}^{m}\gamma(x_i)$. Пусть $n=\max(\ell, m)$, F^ζ_n - клон, порождаемый элементами f, g, $\bar{\zeta}$. Так как $\bar{\zeta}(f(x_1,\ldots,x_\ell))=1+f(x_1,\ldots,x_\ell)$, $\bar{\zeta}(g(x_1,\ldots,x_m))=1+g(x_1,\ldots,x_m)$, то $F^\zeta_n\supset J^\zeta_{nn}$.

Так как $F^\zeta_n\setminus J^\zeta_{nn}$ содержит лишь операции, отличающиеся от $\bar{\zeta}$ несущественными переменными, то между клонами F^ζ_n и J^ζ_{nn} нет промежуточного. Двойственным к F^ζ_n является клон F^Ψ_n. Объединение дает $F^{\zeta\Psi}_n$. Пределом цепочки $F^{\zeta\Psi}_o\subset F^{\zeta\Psi}_1\subset$ является $F^{\zeta\Psi}_\infty$. Фрагмент решетки $(F^{\zeta\Psi}_\infty)$ показано на рис. 5. Подрешеткой этой решетки является решетка подполугрупп всех одноместных операций клона Z /рис. 6/.

2. <u>Решетка подклонов клона Z</u>

Оставшаяся часть решетки $L(Z)$ содержит конечное число элементов и имеет менее регулярное строение. Пусть L_ζ - клон, порождаемый операциями e^2_2 и $\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z)$, и пусть $f_n(x_1,\ldots,x_n)=$ $=\zeta(x_1)+\ldots+\zeta(x_n)$. Так как $\zeta*f_n=f_n$, $f_n*f_m=f_{n+m-1}$, $\Delta f_n=f_{n-2}$, то L_ζ содержит E, операции f_1, f_3, $f_5,\ldots$, и все операции, отличающиеся от указанных несущественными переменными. Единственным максимальным подклоном клона L_ζ является E_ζ, порождаемый $\{\zeta, e^2_2\}$. Двойственным к L_ζ является клон L_Ψ.

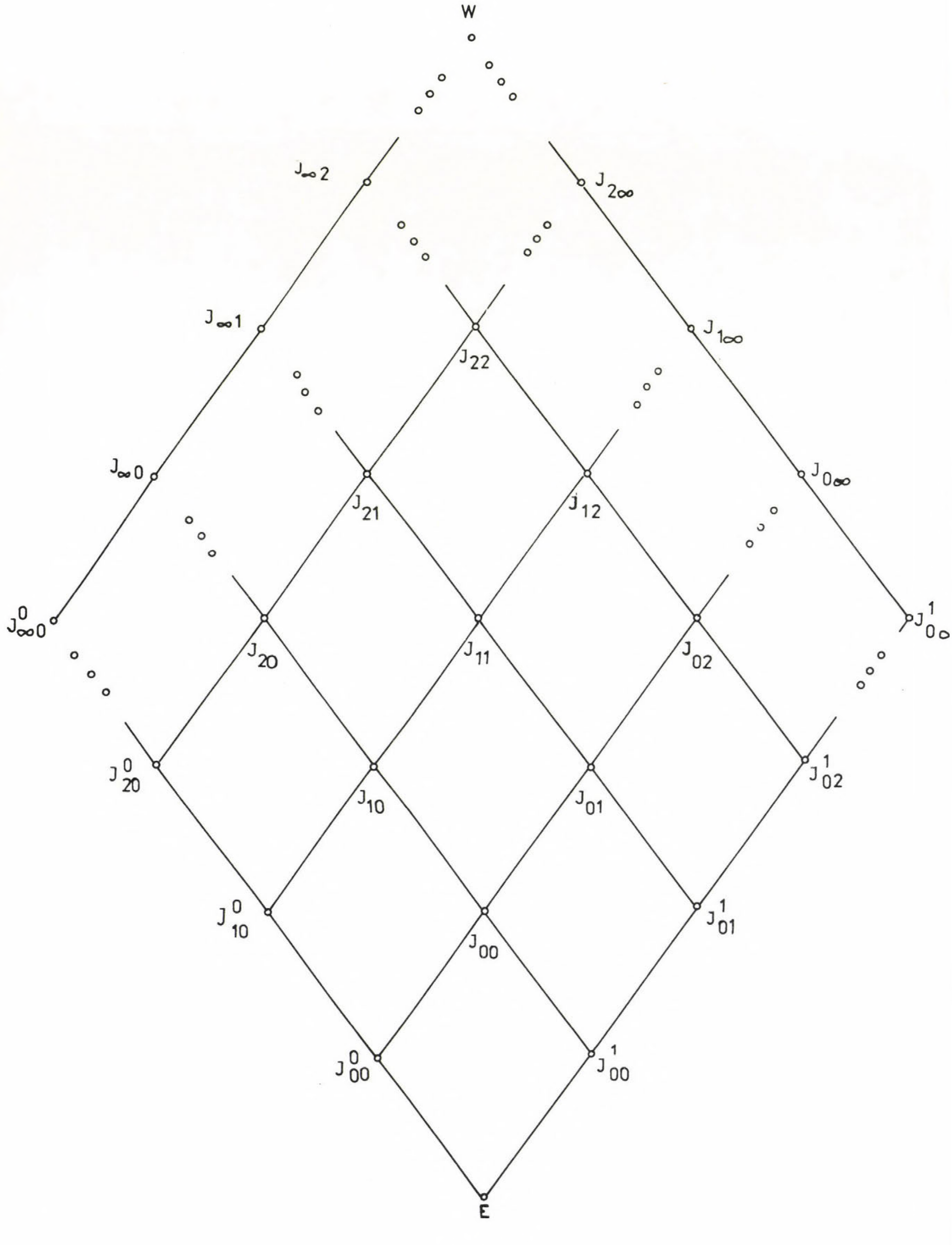


Рисунок 2.
/Решётка L(W)/

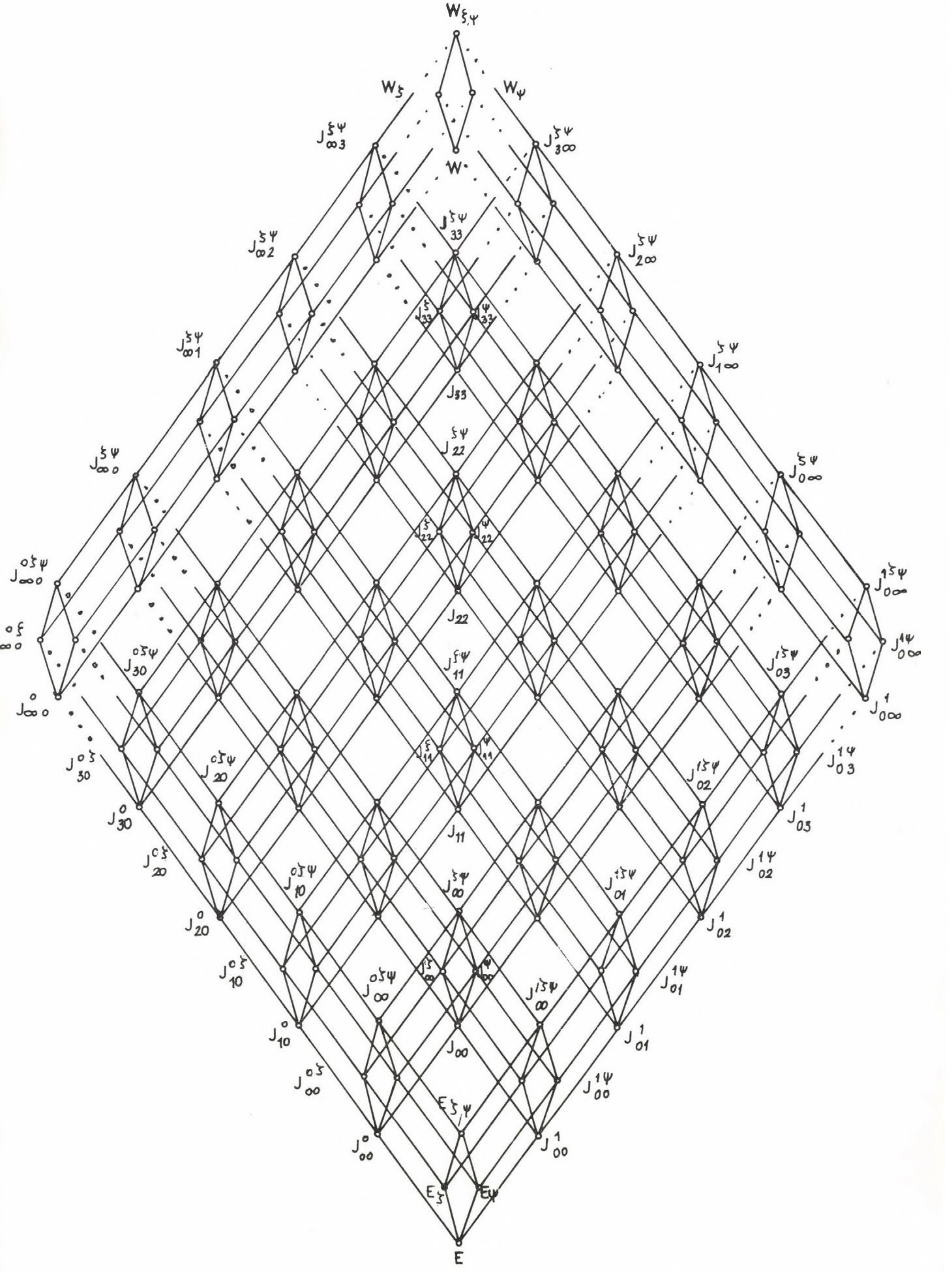


Рисунок 3

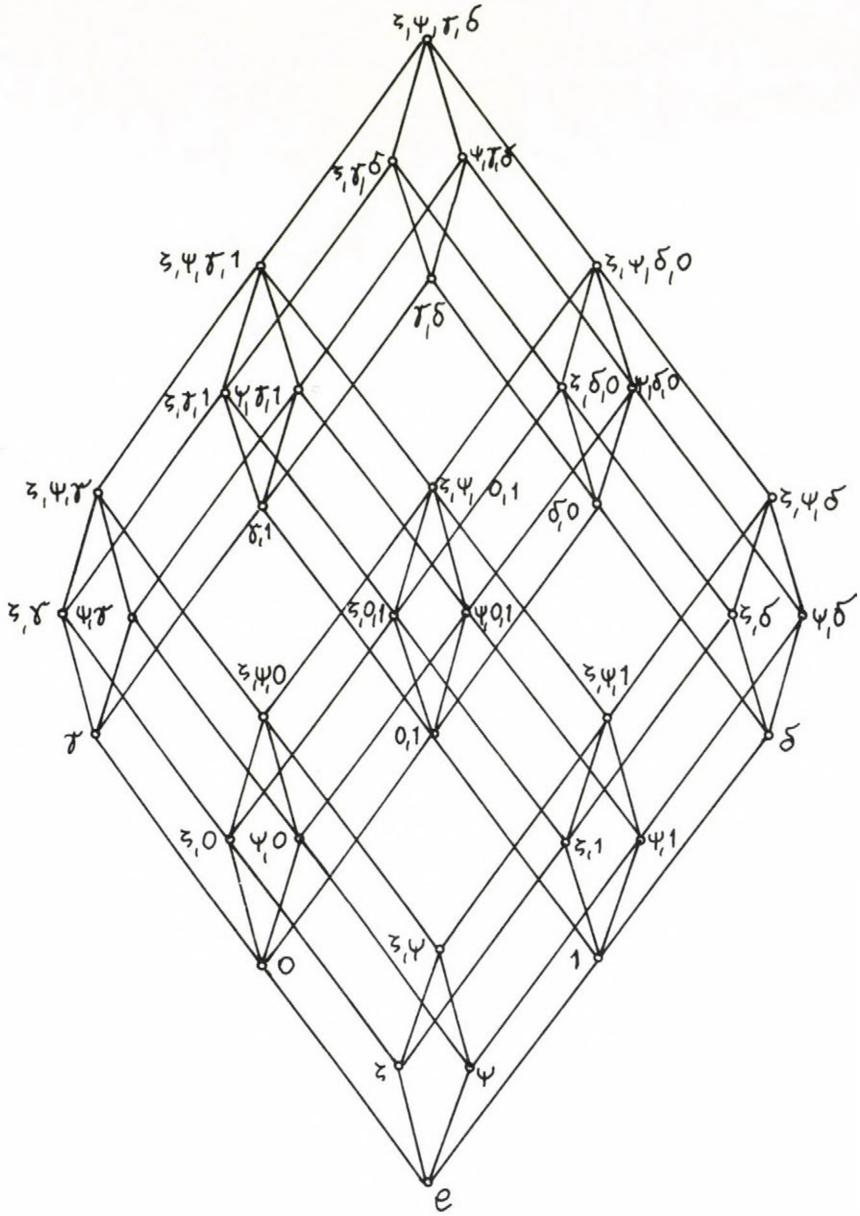
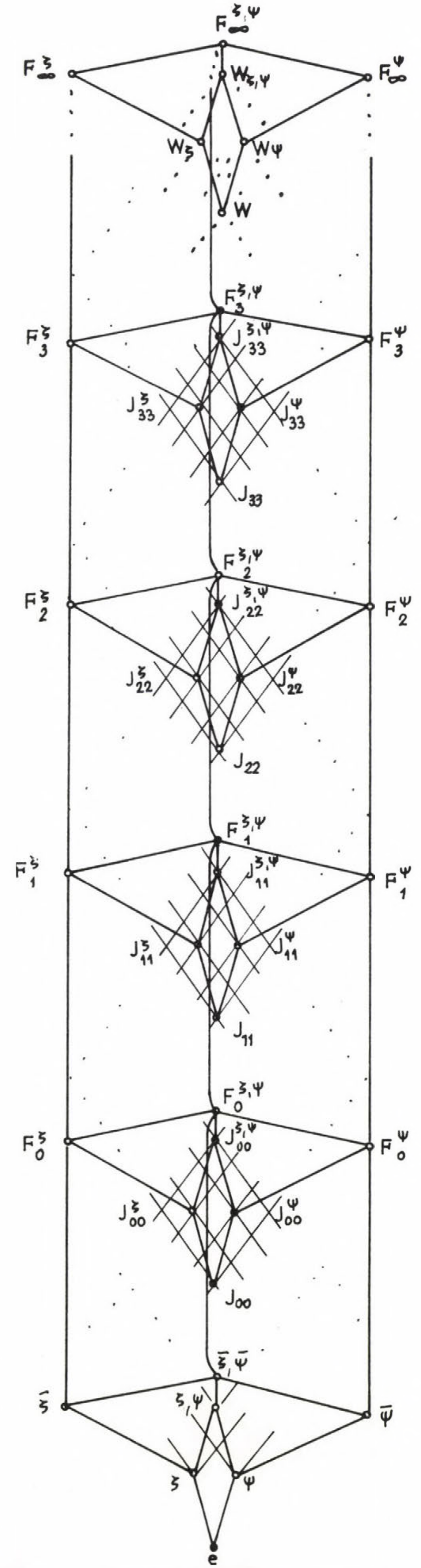

ζ,ψ,γ,δ
ζ,γ,δ
ψ,γ,δ
ζ,ψ,γ,1
γ,δ
ζ,ψ,δ,0
ζ,γ,1
ψ,γ,1
ζ,δ,0
ψ,δ,0
ζ,ψ,γ
ζ,ψ,0,1
γ,1
δ,0
ζ,ψ,δ
ζ,γ
ψ,γ
ζ,0,1
ψ,0,1
ζ,δ
ψ,δ
ζ,ψ,0
ζ,ψ,1
γ
0,1
δ
ζ,0
ψ,0
ζ,1
ψ,1
ζ,ψ
0
1
ζ
ψ
e

Рисунок 4.


$F_\infty^{\xi,\psi}$
F_∞^{ξ}
$W_{\xi,\psi}$
F_∞^{ψ}
W_ξ
W_ψ
W
$F_3^{\xi,\psi}$
F_3^{ξ}
$J_{33}^{\xi,\psi}$
F_3^{ψ}
J_{33}^{ξ}
J_{33}^{ψ}
J_{33}
$F_2^{\xi,\psi}$
F_2^{ξ}
$J_{22}^{\xi,\psi}$
F_2^{ψ}
J_{22}^{ξ}
J_{22}^{ψ}
J_{22}
$F_1^{\xi,\psi}$
F_1^{ξ}
$J_{11}^{\xi,\psi}$
F_1^{ψ}
J_{11}^{ξ}
J_{11}^{ψ}
J_{11}
$F_0^{\xi,\psi}$
F_0^{ξ}
$J_{00}^{\xi,\psi}$
F_0^{ψ}
J_{00}^{ξ}
J_{00}^{ψ}
J_{00}
$\overline{\xi,\psi}$
$\bar{\xi}$
ξ,ψ
$\bar{\psi}$
ξ
ψ
e

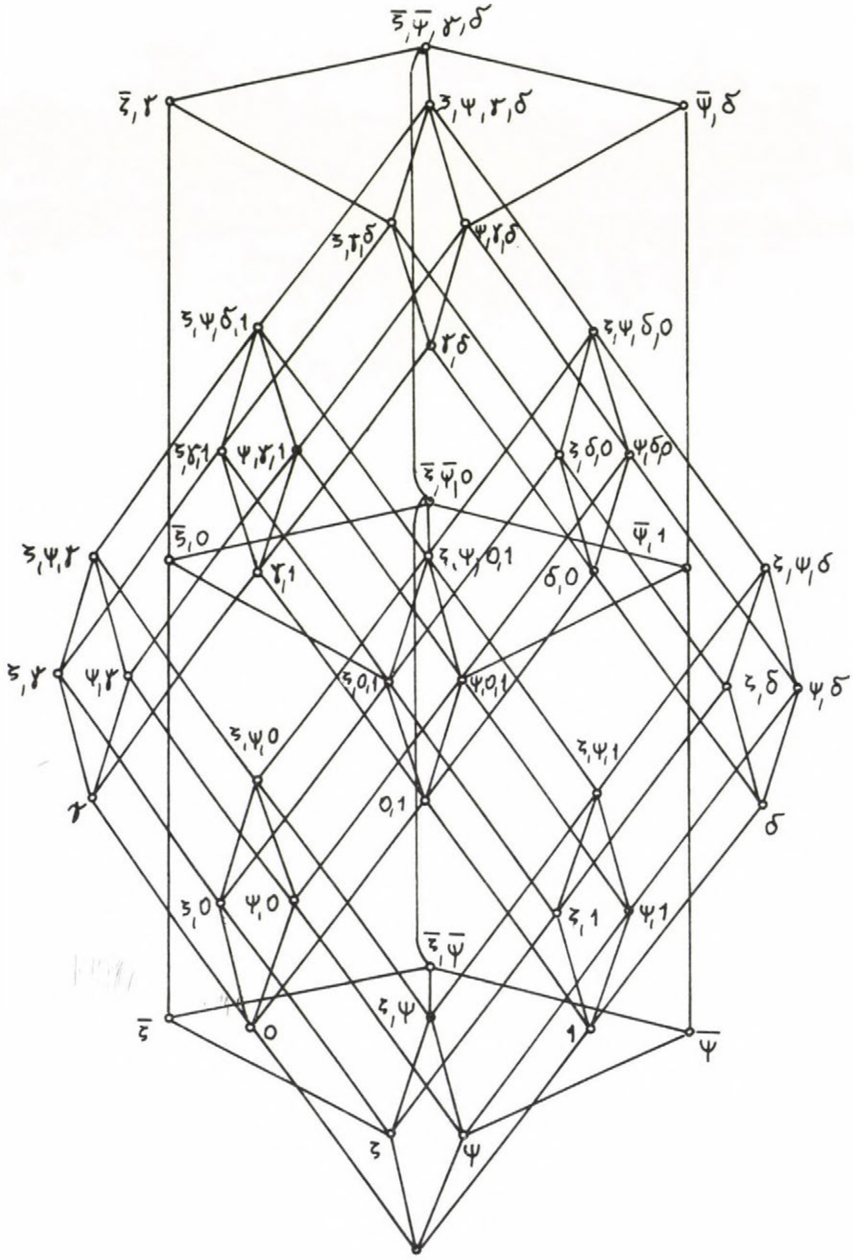

ζ̄, ψ̄, γ, δ
ζ̄, γ
ζ, ψ, γ, δ
ψ̄, δ
ζ, γ, δ
ψ, γ, δ
ζ, ψ, δ, 1
ζ, ψ, δ, 0
γ, δ
ζ, γ, 1
ψ, γ, 1
ζ, δ, 0
ψ, δ, 0
ζ̄, ψ̄, 0
ζ̄, 0
ψ̄, 1
ζ, ψ, γ
γ, 1
ζ, ψ, 0, 1
δ, 0
ζ, ψ, δ
ζ, γ
ψ, γ
ζ, 0, 1
ψ, 0, 1
ζ, δ
ψ, δ
ζ, ψ, 0
ζ, ψ, 1
γ
0, 1
δ
ζ, 0
ψ, 0
ζ, 1
ψ, 1
ζ̄, ψ̄
ζ̄
0
ζ, ψ
1
ψ̄
ζ
ψ
e

Рисунок 6.

Клон S_ζ, порождаемый операцией $f_2(x,y)=\zeta(x)+\zeta(y)$, содержит операции $f_3=f_2*f_2$ и $c_o=\Delta f_2$, поэтому S_ζ содержит все f_i, $i=1,2,\ldots$. Максимальных подклонов имеется два: L_ζ и клон с базисом $\{\zeta, c_o, e_2^2\}$. Двойственным является клон S'_ψ, порождаемый операцией $1+\psi+\psi$, двойственной к $\zeta+\zeta$.

Клон L'_ζ порождается операциями e_2^2, f_3 и $1+f_3$. Для любых m и n справедливо $f_m*(1+f_n)=1+f_{m+n-1}=(1+f_n)*f_m$, $(1+f_m)*(1+f_n)=$ $=f_{m+n-1}$, $\Delta(1+f_n)=1+f_{n-2}$. Учитывая указанные ранее свойства операции f_m видно, что L'_ζ содержит операции $f_1, f_3, \ldots, \bar{\zeta}=1+f_1$, $1+f_3, \ldots$. Максимальных подклонов два: L_ζ и клон с базисом $\{\bar{\zeta}, e_2^2\}$. Двойственным является клон L'_ψ.

Клон S'_ζ порождается базисом e_2^2, $1+f_2$. Так как $(1+f_2)*(1+f_2)=$ $=f_3$, то он содержит операции $f_1, f_3, \ldots, 1, 1+f_2, 1+f_4, \ldots$. Максимальных подклонов два: L_ζ и клон с базисом $\{e_2^2, c_1, \zeta\}$. Двойственный клон - S_ψ, порождаемый операцией $\psi+\psi$.

Операции f_2, $1+f_2$ порождают клон U_ζ. Очевидно, U_ζ содержит все элементы клонов S_ζ, L'_ζ и S'_ζ, которые являются его максимальными подклонами. Двойственным является клон U_ψ.

Пусть $g_n(x_1,\ldots,x_n)=\gamma(x_1)+\ldots+\gamma(x_n)$. Для любой операции $h\in Z$ справедливо $\zeta*h=h$, $\psi*h=h$, $\gamma*h=0$. Так как $(\zeta+g_n)*(\zeta+g_m)=$ $=\zeta+g_{n+m-1}$, $(\psi+g_n)*(\psi+g_m)=\psi+g_{n+m-1}$, $\Delta(\zeta+g_n)=\psi+g_{n-1}$, $\Delta(\psi+g_n)=\zeta+g_{n-1}$, то клон $L_{\zeta+\gamma}$ порождаемый базисом $\{e_2^2, \zeta+\gamma\}$, содержит лишь операции e, $\zeta+g_n$, $\psi+g_n$, $n=0,1,\ldots$, и операции, отличающиеся от указанных несущественными переменными. Максимальный подклон один, имеет базис $\{e_2^2, \zeta, \psi\}$. Клон самодвойственный.

Клон $L_{\zeta,\psi}$ порождается базисом $\{e_2^2, f_3, \bar{f}_3\}$, где $\bar{f}_n(x_1,\ldots,x_n)=$

$= \Psi(x_1)+\circ\ldots+\Psi(x_n)$. Так как

$$\Delta(\gamma+\gamma)=\Delta(\zeta+\zeta)=\Delta(\Psi+\Psi)=0,\ \Delta(\zeta+\gamma)=\Psi,\ \Delta(\Psi+\gamma)=\zeta, \qquad /1/$$

то $L_{\zeta,\Psi}$ содержит суммы вида $\sum_{i=1}^{m}\gamma(x_{ji})+\sum_{i=1}^{n}\zeta(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{k}\Psi(x_{ti})$, где сумма $n+k$ нечетная. Максимальными подклонами являются клоны L_ζ, L_Ψ, $L\zeta+\gamma$. Клон самодвойственный.

Клон $L_{\zeta+\delta}$ порождается операцией $\zeta+\delta=1+\zeta+\gamma$. Так как $(\zeta+\delta)*(\zeta+\delta)=\zeta+\gamma+\gamma=\zeta+g_2$, то в нем содержатся все операции клона с базисом $\zeta+\gamma$. Так как

$$\Delta(\zeta+\delta)=\bar\Psi,\ \Delta(\Psi+\delta)=\bar\zeta,\ \Delta(\bar\zeta+\delta)=\Psi,\ \Delta(\bar\Psi+\delta)=\zeta,\ \Delta(\bar\zeta+\gamma)=\bar\Psi,\ \Delta(\bar\Psi+\gamma)=\bar\zeta, \quad /2/$$

то клон содержит также операции $\bar\zeta+g_n$, $\bar\Psi+g_n$, $n=0,1\ldots$. Указанные выше равенства, а также равенства $\bar\zeta*(\bar\zeta+\gamma)=1+\bar\zeta+\gamma$, $\bar\zeta*(\bar\zeta+\delta)=1+\bar\zeta+\delta=\bar\zeta+\gamma$ показывают, что клон является максимальным в рассматриваемом клоне. Другой максимальный клон - клон с базисом $\{e_2^2,\ \bar\zeta,\ \bar\Psi\}$. Действительно, добавление к этому базису любой существенно многоместной функции из клона $L_{\zeta+\delta}$ дает базис клона $\zeta+\delta$. Клон самодвойственный.

Клон $L'_{\zeta,\Psi}$ порождается базисом $\{e_2^2,\ 1+\zeta+\Psi+\Psi\}$. Обозначая через Δ^n результат n-кратного применения операции Δ, получаем $(1+\zeta+\Psi+\Psi)*(1+\zeta+\Psi+\Psi)=\zeta+\Psi+\Psi+\Psi+\Psi$, $\Delta^3(\zeta+\Psi+\Psi+\Psi+\Psi)=\gamma+\Psi$, $(1+\zeta+\Psi+\Psi)*(\gamma+\Psi)=1+\gamma+\Psi+\Psi+\Psi$, $\Delta^2(1+\gamma+\Psi+\Psi+\Psi)=1+\gamma+\Psi=\delta+\Psi$, поэтому $U'_{\zeta,\Psi}$ содержит все операции из клона $L_{\zeta+\delta}$ в том числе ζ и Ψ. Далее, $(1+\zeta+\Psi+\Psi)*\Psi=1+\Psi+\Psi+\Psi$, $\Delta^2(\zeta+\Psi+\Psi+\Psi+\Psi)*\Psi=\Psi+\Psi+\Psi$, поэтому $L'_{\zeta,\Psi}\supset L'_\zeta$. Аналогично получаем двойственное включение $L'_{\zeta,\Psi}\supset L'_\Psi$. Так как $L'_{\zeta,\Psi}$ содержит операции $f^3=\zeta+\zeta+\zeta$, $\bar f^3=\Psi+\Psi+\Psi$, образующие базис клона $L_{\zeta,\Psi}$, то $L'_{\zeta,\Psi}\supset L_{\zeta,\Psi}$. Ввиду равенств /1/ и /2/ клон $L'_{\zeta,\Psi}$ содержит все суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n_1}\gamma(x_{ji})+\sum_{i=1}^{n_2}\zeta(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{n_3}\bar\zeta(x_{mi})+\sum_{i=1}^{n_4}\Psi(x_{pi})+\sum_{i=1}^{n_5}\bar\Psi(x_{ti}) \qquad /3/$$

где $n_2+n_3+n_4+n_5=2k+1$. Клон не содержит γ, поэтому не совпадает с Z.

Найдем теперь максимальные подклоны клона $L'_{\zeta,\Psi}$. Каждая операция f из $L'_{\zeta,\Psi} \setminus L_{\zeta+\delta}$ является суммой вида /3/, в которой по крайней мере три согласных отличны от γ. Отождествляя нужное число раз переменные в парах однотипных слагаемых и в парах γ, ζ, δ, $\bar\zeta$, $\bar\gamma$, Ψ, $\bar\delta$, $\bar\Psi$, мы получим одну из следующих операций:

$$\zeta+\zeta+\zeta,\ 1+\zeta+\zeta+\zeta=\bar\zeta+\zeta+\zeta,\ \zeta+\zeta+\Psi,\ \bar\zeta+\zeta+\Psi,$$
$$\zeta+\Psi+\Psi,\ \bar\zeta+\Psi+\Psi,\ \Psi+\Psi+\Psi,\ \bar\Psi+\Psi+\Psi. \qquad /4/$$

Каждая из этих операций вместе с принадлежащими клону $L_{\zeta+\delta}$ операциями ζ, $\bar\zeta$, Ψ, $\bar\Psi$, порождает операцию $1+\zeta+\Psi+\Psi$. Тем самым доказано, что клон $L_{\zeta+\delta}$ является максимальным в $L'_{\zeta,\Psi}$.

Множество $L'_{\zeta,\Psi}\setminus L_{\zeta,\Psi}$ содержит операции вида

$$1+\sum_{i=1}^{n_1}\gamma(x_{ji})+\sum_{i=1}^{n_2}\zeta(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{n_3}\Psi(x_{mi}), \qquad /5/$$

где $n_2+n_3 = 2k+1$. Отождествляя переменные в однотипных слагаемых, а также в парах γ, ζ; γ, Ψ, мы получим одну из операций $1+\zeta=\bar\zeta$, $1+\Psi=\bar\Psi$. $L_{\zeta,\Psi}$ содержит операцию $\zeta+\Psi+\Psi$. Так как $(\zeta+\Psi+\Psi)*\bar\zeta=\bar\Psi*(\zeta+\Psi+\Psi)=1+\zeta+\Psi+\Psi$, то $L_{\zeta,\Psi}$ максимален в $L'_{\zeta,\Psi}$.

Множество $L'_{\zeta,\Psi}\setminus L'_{\zeta}$ содержит операции вида /3/, в которых одно из слагаемых, есть либо Ψ, либо $\bar\Psi$.

Возьмем одну из таких операций, и пусть i-тое слагаемое есть либо Ψ, либо $\bar\Psi$. Отождествляя все переменные, кроме x_i, получим одну из следующих операций:

$$\Psi,\ \bar\Psi,\ \gamma+\Psi,\ 1+\gamma+\Psi.$$

Так как $\Delta^2((1+\gamma+\Psi)*(1+\gamma+\Psi))=\bar\Psi$, $\bar\Psi*\bar\Psi=\Delta^2((\gamma+\Psi)*(\gamma+\Psi))=\Psi$, то каждая из них порождает Ψ. Эта операция вместе с принадлежащей L'_ζ операцией $1+\zeta+\zeta+\zeta$ порождает $1+\zeta+\Psi+\Psi$, и тем самым клон $L'_{\zeta,\Psi}$.

Аналогично доказывается максимальность в $L'_{\zeta,\Psi}$ двойственного к

L'_ζ клона L'_Ψ .

Рассмотрим теперь произвольную систему операций клона $L'_{\zeta,\Psi}$, не содержащуюся целиком в клонах L'_ζ , L'_Ψ , $L_{\zeta,\Psi}$, $L_{\zeta+\delta}$. Эта система операций содержит

(i) сумму вида /3/, в которой по крайней мере три слагаемых отличны от γ;

(ii) сумму вида /5/;

(iii) сумму вида /3/, в которой одно из слагаемых есть либо Ψ, либо $\bar{\Psi}$;

(iv) сумму вида /3/, в которой одно из слагаемых есть либо ζ, либо $\bar{\zeta}$.

Выше было показано, что из операции со свойством (ii), отождествлениями можно получить либо $\bar{\zeta}$, либо $\bar{\Psi}$, из суммы (iii) - Ψ, из суммы (iv) - ζ, из суммы (i) - одну из операций /4/. Любая из операций системы /4/ вместе с $\bar{\zeta}$, $\bar{\Psi}$ порождает $1+\zeta+\Psi+\Psi$. Таким образом клон $L'_{\zeta,\Psi}$ не имеет максимальных подклонов, отличных от L'_ζ , L'_Ψ , $L_{\zeta,\Psi}$, $L_{\zeta+\delta}$.

Клон H_ζ порождается операциями $\{\zeta+\gamma,\ c_0,\ e_2^2\}$. Так как $\zeta+\gamma$ порождает клон $L_{\zeta+\gamma}$, содержащий суммы вида $\zeta+\gamma+\ldots+\gamma$, $\Psi+\gamma+\ldots+\gamma$, то очевидно, что H_ζ содержит любые суммы $\gamma+\ldots+\gamma$, ζ и Ψ, т.е. все операции из $J^{\zeta\Psi}_{\infty 0}$ /рис. 3/. Множество $H_\zeta \backslash J^{\zeta\Psi}_{\infty 0}$ содержит суммы $\zeta+\gamma+\ldots+\gamma$, $\Psi+\gamma+\ldots+\gamma$ с числом слагаемых больше единицы, поэтому $J^{\zeta\Psi}_{\infty 0}$ - максимальный подклон клона H_ζ. Множество $H_\zeta \backslash L_{\zeta+\gamma}$ содержит все операции из $J^{\zeta\Psi}_{\infty 0}$, не содержащиеся в клоне, порождаемом базисом ζ, Ψ, e_2^2, т.е. операции $g_n=\gamma+\ldots+\gamma$. Каждая из этих операций при отождествлении всех переменных дает c_0, поэтому клон $L_{\zeta+\gamma}$ максимален в H_ζ. Любая система операций клона H_ζ, не содержащаяся целиком в клонах $J^{\zeta\Psi}_{\infty 0}$, $L_{\zeta+\gamma}$, содержит f_n и либо $\zeta+g_m$, либо $\Psi+g_m$, $m\geq 1$, и потому порождает H_ζ. Так как клон H_ζ конечно порожденный, то других максимальных подклонов клон H_ζ не имеет. Двойственным к H_ζ является клон H_Ψ.

Клон $S_{\zeta,\Psi}$ порождается базисом $\{e_2^2, \zeta+\Psi\}$. Отождествляя $y(\zeta+\Psi)*(\zeta+\Psi)=$

$=\zeta+\Psi+\Psi$ две последние переменные, получим ζ, поэтому в $S_{\zeta,\Psi}$ содержатся операции $\zeta+\zeta$ и $\zeta+\Psi+\zeta$. Из последней получаем Ψ, и из $\zeta+\zeta$ и Ψ получаем $\Psi+\Psi$. Таким образом $S_{\zeta,\Psi}$ содержит S_ζ и S_Ψ. Легко заметить, что $S_{\zeta,\Psi}$ содержит суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n_1} \gamma(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{n_2} \zeta(x_{pi})+\sum_{i=1}^{n_3} \Psi(x_{qi}) \quad . \qquad /6/$$

Отсюда заключаем, что $S_{\zeta,\Psi}$ содержит также $L_{\zeta,\Psi}$ и H_ζ.

Докажем, что клоны S_ζ, S_Ψ, $L_{\zeta,\Psi}$ и H_ζ являются максимальными в $S_{\zeta,\Psi}$. Множество $S_{\zeta,\Psi}\setminus S_\zeta$ содержит суммы вида /6/, в которых либо $n_1>0$, либо $n_3>0$. Пусть $f\in S_{\zeta,\Psi}\setminus S_\zeta$.

а/ $n_1>0$. Фиксируем одно из слагаемых вида γ, и отождествляем переменные у остальных. Получим одну из операций γ, $\zeta+\gamma$, $\Psi+\gamma$. Подставляя $c_o\in S_\zeta$ в две последние операции, также получим γ. Так как $\zeta+\zeta+\zeta\in S_\zeta$, $((\zeta+\zeta)*\gamma)=\Psi+\zeta$, то f вместе с S_ζ порождает $S_{\zeta,\Psi}$.

б/ $n_3>0$. Фиксируем одно из слагаемых вида Ψ, и отождествляем переменные у остальных. Получим одну из операций Ψ, $\gamma+\Psi$, $\Psi+\Psi$, $\zeta+\Psi$. Подставляя c_o в три последние операции и отождествляя переменные, получим во всех случаях Ψ. Операции Ψ и $\zeta+\zeta$ порождают $S_{\zeta,\Psi}$.

Множество $S_{\zeta,\Psi}\setminus L_{\zeta,\Psi}$ содержит суммы вида /6/, в которых $n_2+n_3=2k$. Пусть $f\in S_{\zeta,\Psi}\setminus L_{\zeta,\Psi}$.

а/ $k=0$. Отождествляя у f все переменные, получим c_o. Операция $(\zeta+\zeta+\Psi)*c_o=\zeta+\Psi$ порождает $S_{\zeta,\Psi}$.

б/ $k\geq 1$. Фиксируем два слагаемых из множества $\{\zeta,\Psi\}$ отождествляем остальные переменные. В результате получим сумму

$$\sum_{i=1}^{n_1}\gamma(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{n_2}\zeta(x_{pi})+\sum_{i=1}^{n_3}\Psi(x_{qi})+\mu_1(x_1)+\mu_2(x_2), \qquad /7/$$

в которой все $x_{\ell i}$, x_{pi}, x_{qi} равны x_3 $\{\mu_1, \mu_2\}\subseteq\{\zeta, \Psi\}$. Возможны следующие варианты:

i). n_2 и n_3 четны. Тогда сумма /7/ дает одну из операций $\zeta+\zeta$, $\zeta+\Psi$, $\gamma+\zeta+\zeta$, $\gamma+\zeta+\Psi$, $\gamma+\Psi+\Psi$.

Операция $\zeta+\Psi$ порождает $S_{\zeta\Psi}$. В остальных случаях отождествление переменных дает либо γ, либо c_o. Так как $\gamma*\gamma=c_o$, то во всех случаях имеем c_o. Операции c_o, $\zeta+\zeta+\Psi$ порождают $S_{\zeta,\Psi}$.

ii). n_2 и n_3 нечетны. Сумма /7/ принимает либо вид
$\mu_1(x_1)+\mu_2(x_2)+\zeta(x_3)+\Psi(x_3)$, либо вид
$\mu_1(x_1)+\mu_2(x_2)+\zeta(x_3)+\Psi(x_3)+\gamma(x_3)$.

Так как $\zeta(x)+\Psi(x)=\gamma(x)$, то получаем варианты $\zeta+\zeta+\gamma$, $\zeta+\Psi+\gamma$, $\Psi+\Psi+\gamma$, $\zeta+\zeta$, $\Psi+\Psi$, $\zeta+\Psi$, уже рассмотренные ранее.

Множество $S_{\zeta,\Psi}\setminus H_\zeta$ содержит суммы вида /6/, в которых либо $n_2\geq 2$, либо $n_3\geq 2$. Пусть $n_2\geq 2$. Фиксируем два слагаемых вида ζ и отождествляем переменные у остальных. Получим одну из операций $\zeta+\zeta$, $\zeta+\zeta+\zeta$, $\zeta+\zeta+\Psi$, $\zeta+\zeta+\gamma$.

Так как $c_o\in H_\zeta$, то во всех случаях порождается $\zeta+\zeta$. Так как $\zeta+\zeta$ порождает S_ζ, то мы приходим к рассмотренному ранее случаю. Случай $n_3\geq 2$ аналогичен рассмотренному.

Каждая система C операции, не содержащихся целивоа в S_ζ, S_Ψ, $L_{\zeta\Psi}$ и H_ζ содержит

(i) сумму вида /6/, в которой $n_3\geq 1$;
(ii) сумму вида /6/, в которой $n_2\geq 1$;
(iii) сумму вида /6/, в которой $n_2+n_3=2k$, $k\geq 0$;
(iv) сумму вида /6/, в которой $n_2+n_3\geq 2$.

Существет два вида сумм /6/, удовлетворяющих (iii):

а/ $n_2+n_3=0$, тогда это либо $\gamma+\ldots+\gamma$, либо c_o. В любом случае порождается c_o.

б/ $n_2+n_3\neq 0$. Фиксируем любые два слагаемых из множества $\{\zeta,\Psi\}$, и отождествляем переменные у остальных. В результате получим одну из операций

$$\zeta+\Psi,\ \zeta+\zeta,\ \Psi+\Psi,\ \zeta+\zeta+\gamma,\ \zeta+\Psi+\gamma,\ \Psi+\Psi+\gamma.$$

Последние три при отождествлении переменных x_2 и x_3 дают $\zeta+\Psi$ и $\Psi+\zeta$ соответственно. Операция $\zeta+\Psi$ порождает $S_{\zeta,\Psi}$, операции $\zeta+\zeta$ и $\Psi+\Psi$ порождают S_ζ и S_Ψ соответственно. Так как система содержит также операцию (i) и (ii), не принадлежащие S_ζ и S_Ψ, то в двух последних случаях также порождается $S_{\zeta,\Psi}$.

Таким образом можно считать, что C порождает c_o. Зафиксировав в сумме (iv) два слагаемых из множества $\{\zeta,\Psi\}$ и поставив в остальные c_o, придем к рассмотренному выше случаю б/. Видим, что максимальными подклонами клона $S_{\zeta\Psi}$ являются лишь S_ζ, S_Ψ, $L_{\zeta,\Psi}$ и H_ζ. Клоном, двойственным к $S_{\zeta,\Psi}$ является $S'_{\zeta,\Psi}$, порождаемый операцией $1+\zeta+\Psi$.

Клон Z состоит из операций, принадлежащих E , и операций, представимых в виде $u_1(x_1)+\ldots+u_n(x_n)(n\geq 1)$, где операции u_i однолистные. Легко заметить, что в качестве $u_1,\ldots,u_n$ можно брать операции, принадлежащие клону Z, поэтому каждая операция клона Z представима в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{n_o} c_o(x_{ji})+\sum_{i=1}^{n_1} c_1(x_{\ell i})+\sum_{i=1}^{n_2}\gamma(x_{mi})+\sum_{i=1}^{n_3}\delta(x_{ui})+\sum_{i=1}^{n_4}\zeta(x_{pi})+\sum_{i=1}^{n5}\Psi(x_{qi})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_6}\bar\zeta(x_{\tau i})+\sum_{i=1}^{n_7}\bar\Psi(x_{si}) .$$

Эта сумма упрощается, если учесть следующие свойства слагаемых. Несущественные переменные можно опустить. Так как сложение ведется по mod2, то в сумму войдет не более одного слагаемого c_1. Так как $\delta=1+\gamma$, $\bar{\zeta}=1+\zeta$, $\bar{\Psi}=1+\Psi$, то, если функция отлична от c_1, слагаемое c_1 можно не писать. Из этих же равенств заключаем, что в сумму достаточно включать лишь одно слагаемое из $\bar{\zeta}$, $\bar{\Psi}$, δ. Таким образом любая отличная от 0 и 1 операция из Z с точностью до несущественных переменных представима в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{n_1}\gamma(x_{mi})+\sum_{i=1}^{n_2}\zeta(x_{pi})+\sum_{i=1}^{n_3}\Psi(x_{qi})+\alpha_1\cdot\delta(x_{u1})+\alpha_2\bar{\zeta}(x_{u2})+\alpha_3\bar{\Psi}(x_{u3}),\ /8/$$

в которой $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\{0,1\}$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leq 1$.

Клон $H_{\zeta\Psi}$

Докажем теперь, что клоны $S_{\zeta\Psi}$, $S'_{\zeta\Psi}$, U_ζ, U_Ψ, $H_{\zeta\Psi}$, $L'_{\zeta\Psi}$ являются максимальными в Z. Для доказательства нам нужна некоторая система порождающих клона Z. В качестве такой системы можно взять e_2^2, $\zeta+\Psi$, $\bar{\zeta}$. Действительно, $\zeta+\Psi$ порождает все суммы вида /6/. Подставляя нужное число раз $\bar{\zeta}$, получим сумму /8/.

Множество $Z\backslash S_{\zeta\Psi}$ содержит суммы /8/, в которых $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, и c_1. Пусть $f\in Z\backslash S_{\zeta\Psi}$. Так как e_2^2 и $\zeta+\Psi$ уже содержатся в $S_{\zeta\Psi}$, нам нужно получить только $\bar{\zeta}$. Если $f\neq c_1$, то f есть сумма /8/, в которой для некоторого $i\in\{1,2,3\}$, $\alpha_i\neq 0$. Подставив вместо каждой отличной от u_i переменной $c_o\in S_{\zeta\Psi}$, получим одну из операций δ, $\bar{\zeta}$, $\bar{\Psi}$. Подставляя в любую из них c_o, получим c_1.

Таким образом можно предполагать, что $f=c_1$. Композицией операций $\zeta+\zeta\in S_{\zeta\Psi}$ и c_1, получаем $1+\zeta=\bar{\zeta}$.

Множество $Z\backslash U_\zeta$ содержит суммы /8/, в которых либо $n_1\neq 0$, либо $n_3\neq 0$, либо $\alpha_1\neq 0$, либо $\alpha_3\neq 0$.

a/ $n_1\neq 0$. Фиксируем одно слагаемое γ и в остальные подставляем $c_o\in U_\zeta$. Получим либо γ, либо $1+\gamma=\delta$. Далее, $\Delta((\zeta+\zeta+\zeta)*\gamma)=\Psi+\zeta=\Delta((1+\zeta+\zeta+\zeta)*\delta)$. Операции e_2^2 и $\bar{\zeta}=1+\zeta$ уже принадлежит U_ζ.

б/ $n_3\neq 0$. Фиксируя слагаемое Ψ и подставляя в остальные c_o, получим либо Ψ, либо $\Psi+1=\bar\Psi$. Далее, $\bar\Psi*\bar\Psi=\Psi$, $\zeta+\zeta\in U_\zeta$, $(\zeta+\zeta)*\Psi=\Psi+\zeta$.

в/ $\alpha_3\neq 0$. Подставляя вместо каждой отличной от x_{u3} переменной c_o, получим $\bar\Psi$. Попадаем в условие пункта б/.

Множество $Z\backslash F_\infty^{\zeta\Psi}$ содержит суммы /8/, в которых $n_2+n_3+\alpha_2+\alpha_3\geq 2$. Пусть $f\in Z\backslash F_\infty^{\zeta\Psi}$. Фиксируя в f два слагаемых из множества $\{\zeta,\Psi,\bar\zeta,\Psi\}$ и подставляя в остальные $c_o\in F_\infty^{\zeta\Psi}$, получим одну из операций $\zeta+\zeta$, $\zeta+\zeta+1$, $\zeta+\Psi+1$, $\zeta+\Psi$. Операции ζ, Ψ, $\bar\zeta$, $\bar\Psi$ принадлежат $F_\infty^{\zeta\Psi}$, $\Psi+\zeta=(\zeta+\zeta)*\Psi=(\zeta+\zeta+1)*\bar\Psi$, $\zeta+\Psi=(\zeta+\Psi+1)*\bar\zeta$.

Множество $Z\backslash L'_{\zeta\Psi}$ содержит суммы /8/, в которых $n_2+n_3+\alpha_2+\alpha_3=2k$. Пусть $f\in Z\backslash L'_{\zeta\Psi}$. Так как $\bar\zeta\in L'_{\zeta\Psi}$, нужно получить только $\zeta+\Psi$.

а/ $k=0$. Отождествив все переменные, получим $\mu\in\{\gamma,\delta,c_o,c_1\}$; γ и δ дают c_o и c_1; $(\zeta+\zeta+\Psi)*c_o=(1+\zeta+\zeta+\Psi)*c_1=\zeta+\Psi$, что и требовалось.

б/ $k\neq 0$. Фиксируя два слагаемых из множества $\{\zeta,\Psi,\bar\zeta,\bar\Psi\}$, и отождествляя переменные у остальных, получим одну из операций $\zeta+\zeta$, $\zeta+\Psi$, $\zeta+\zeta+1$, $\zeta+\Psi+1$, $\zeta+\Psi+1$, $\gamma+\zeta+\zeta$, $\gamma+\zeta+\Psi$, $\delta+\zeta+\zeta$, $\delta+\zeta+\Psi$ /см. доказательство максимальности клона $L_{\zeta\Psi}$ в $S_{\zeta\Psi}$/. Клон $L'_{\zeta\Psi}$ содержит ζ, Ψ, $\bar\zeta$, $\bar\Psi$, $\Psi+\zeta=(\zeta+\zeta)*\Psi=(\zeta+\zeta+1)*\bar\zeta=\Delta(\gamma+\zeta+\zeta)=$ $=(\Delta(\delta+\zeta+\zeta))*\bar\Psi$, $\zeta+\Psi=(\zeta+\Psi+1)*\bar\zeta=(\Delta(\gamma+\zeta+\Psi))*\zeta=(\Delta(\delta+\zeta+\Psi))*\bar\zeta$.

Клоны $S'_{\zeta\Psi}$ и U_Ψ двойственны клонам $S_{\zeta\Psi}$ и U_ζ и поэтому также максимальны в Z. Осталось доказать, что клон Z не имеет максимальных подклонов, отличных от уже рассмотренных. Пусть - система операций клона Z, не содержащаяся целиком в клонах $S_{\zeta\Psi}$, $S'_{\zeta\Psi}$, $S'_{\zeta\Psi}$, U_ζ, U_Ψ, $F_\infty^{\zeta\Psi}$, $L'_{\zeta\Psi}$. Система C содержит

(i) или сумму вида /8/, в которой $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, или c_1;
(ii) сумму вида /8/, в которой $n_1\neq 0\vee n_3\neq 0\vee\alpha_1\neq 0\vee\alpha_3\neq 0$;

(iii) сумму вида /8/, в которой $n_2+n_3+\alpha_2+\alpha_3\geq 2$;

(iv) сумму вида /8/, в которой $n_2+n_3+\alpha_2+\alpha_3=2k$;

(v) сумму вида /8/, в которой или $n_2+n_3=2k+1$, $\alpha_1=1$; или $n_2+n_3=2k$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2+\alpha_3=1$, или $n_2+n_3=2k$, $k\neq 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$;

(vi) сумму вида /8/, в которой $n_1\neq 0 \vee n_2\neq 0 \vee \alpha_1\neq 0 \vee \alpha_2\neq 0$.

Сумма (i) дает при отождествлении всех переменных одну из операций $\bar{\zeta}$, $\bar{\Psi}$, δ, $\bar{\zeta}+\gamma$, $\bar{\Psi}+\gamma$, c_1. Так как $\Delta(\bar{\zeta}+\gamma)=\bar{\Psi}$, $\Delta(\bar{\Psi}+\gamma)=\bar{\zeta}$, $\delta*\delta=c_1$, то получаем либо $\bar{\zeta}$, либо $\bar{\Psi}$, либо c_1.

а/ Пусть получили c_1. Если в сумме (v) $n_2+n_3=2k+1$, $\alpha_1=1$, или $n_2+n_3=2k$, $\alpha_2+\alpha_3=1$, то, фиксируя три отличных от δ, γ слагаемых и подставляя в остальные c_1, получим одну из операций

$$\zeta+\zeta+\zeta+1,\ \zeta+\zeta+\Psi+1,\ \zeta+\Psi+\Psi+1,\ \Psi+\Psi+\Psi+1,\ \zeta+1,\ \Psi+1.$$

Подставляя c_1, из каждой можно получить либо $\bar{\zeta}$, либо $\bar{\Psi}$. Если в сумме (v) $n_2+n_3=2k$, $k\neq 0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, то, фиксируя два отличных от γ и δ слагаемых, и подставляя в остальные c_1, получим одну из операций $\zeta+\zeta$, $\zeta+\Psi$, $\Psi+\Psi$, каждая из которых в свою очередь дает либо $\bar{\zeta}$, либо $\bar{\Psi}$. Имея $\bar{\zeta}$ или $\bar{\Psi}$ и c_1, получаем c_o.

Зафиксируем в сумме (iii) два отличных от γ и δ слагаемых и подставим в остальные c_o, получим одну из операций

$$\zeta+\zeta,\ \zeta+\Psi,\ \Psi+\Psi,\ \zeta+\zeta+1,\ \zeta+\Psi+1,\ \Psi+\Psi+1.$$

Последние три операции при подстановке в $\bar{\zeta}$ или $\bar{\Psi}$ дают три первые. Так как $\zeta+\Psi$ вместе с любой из операций $\bar{\zeta}$, $\bar{\Psi}$ порождает Z, то будем предполагать, что мы получили $\zeta+\zeta$ и $\bar{\zeta}$.

Если в сумме (vi) $n_1\neq 0$, то фиксируя слагаемое γ и подставляя в остальные c_o, получим либо γ, либо δ. в первом случае $\Delta(((\zeta+\zeta)*(\zeta+\zeta))*\gamma)=\Psi+\zeta$, во втором $(((\zeta+\zeta)*(\zeta+\zeta))*\bar{\zeta})*\delta=\gamma+\zeta+\zeta$, $\Delta(\gamma+\zeta+\zeta)=\Psi+\zeta$.

б/ Пусть из (i) мы получили $\bar{\zeta}$. Если в (iv) $k=0$, то, отождествив все переменные, получим $\mu\in\{\gamma,\delta,c_o,c_1\}$. Так как $\gamma*\gamma=c_o$, $\delta*\delta=c_1$, то всегда имеем либо c_o, либо c_1. Так как $\bar{\zeta}*c_o=c_1$, то попадаем в условия пункта а/.

Если в (iv) $k\neq 0$, то, фиксируя два отличных от γ и δ слагаемых, и отождествляя переменные у остальных, получим одну из операций

$\zeta+\zeta$, $\zeta+\Psi$, $\zeta+\zeta+1$, $\zeta+\Psi+1$, $\gamma+\zeta+\zeta$, $\gamma+\zeta+\Psi$, $\delta+\zeta+\zeta$, $\delta+\zeta+\Psi$.

Далее,

$\bar{\zeta}*(\zeta+\zeta+1)=\zeta+\zeta$, $\bar{\zeta}*(\zeta+\Psi+1)=\zeta+\Psi$, $\Delta(\gamma+\zeta+\zeta)=\Psi+\zeta$, $\Delta(\gamma+\zeta+\Psi)=\Psi+\Psi$,

$(\delta+\zeta+\zeta)*\bar{\zeta}=1+\zeta+\zeta$, $(\delta+\zeta+\Psi)*\bar{\zeta}=1+\zeta+\Psi$.

Операции $\zeta+\Psi$ и $\Psi+\Psi$ вместе с $\bar{\zeta}$ дают базис Z, поэтому предсполагаем, что мы получили $\zeta+\zeta$. Однако $\Delta(\zeta+\zeta)=c_o$, $\bar{\zeta}*c_o=c_1$, и мы снова попадаем в условия пункта а/. Тем самы доказано, что Z не имеет максимальных подклонов, отличных от шести ранее названных.

Рис. 7 показывает взаимное расположение клонов, не показанных на рис 3 и 5.

В целом проведенные рассуждения образуют доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Подклоны клона Z образуют решетку, изображенную на рис. 8.

3. Клон L и его подклоны.

Теперь рассмотрим клон L всех линейных операций на множестве A, т.е. операций, представимых в виде

$$a_o+a_1x_1+\ldots+a_nx_n, \qquad /1/$$

где + и . - сложение и умножение по mod.3.

Из определения следует, что одноместные операции из L представимы в виде $a_o+a_1x_1$ и поэтому либо принимают все три зна-

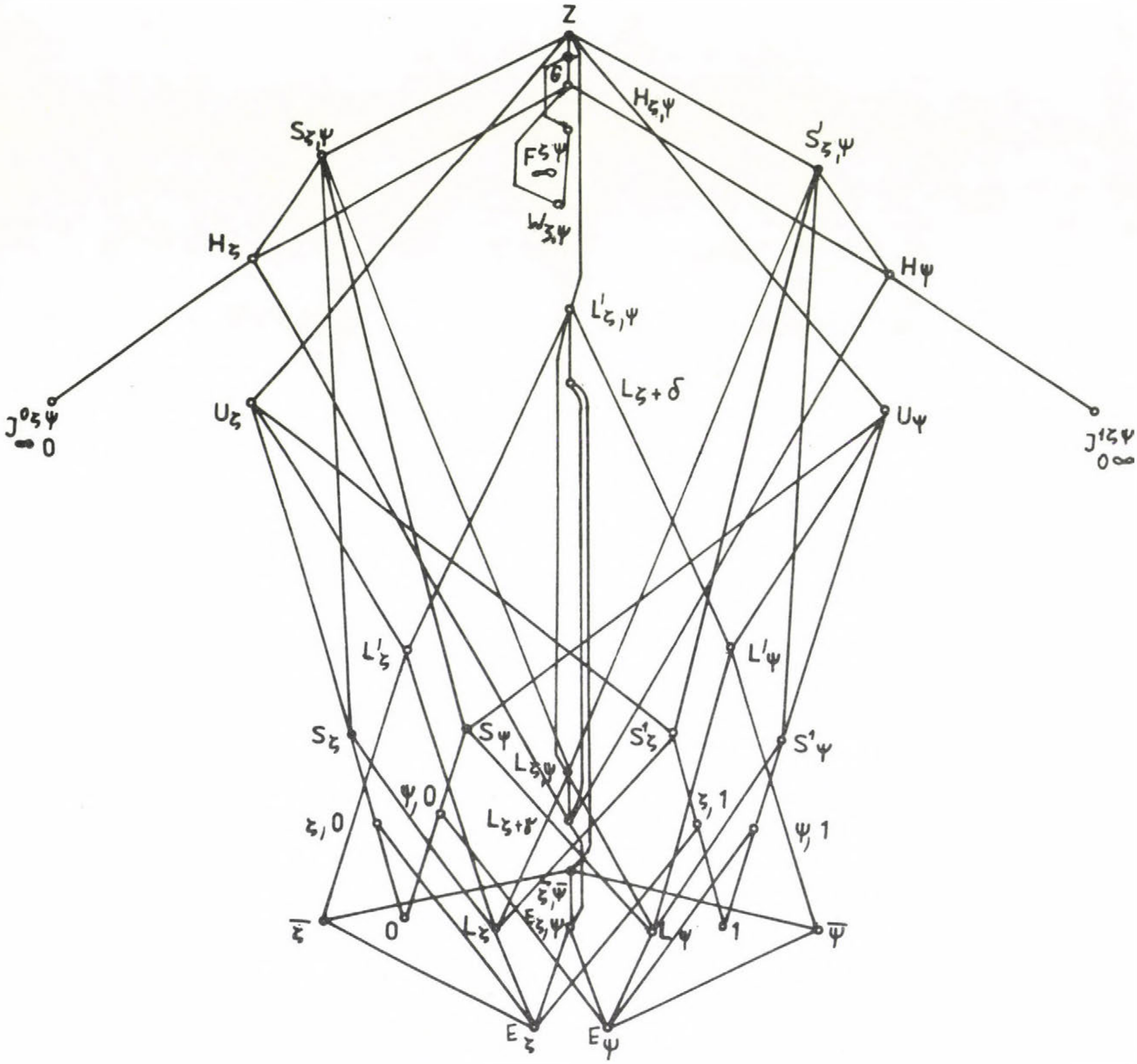


Рисунок 7.

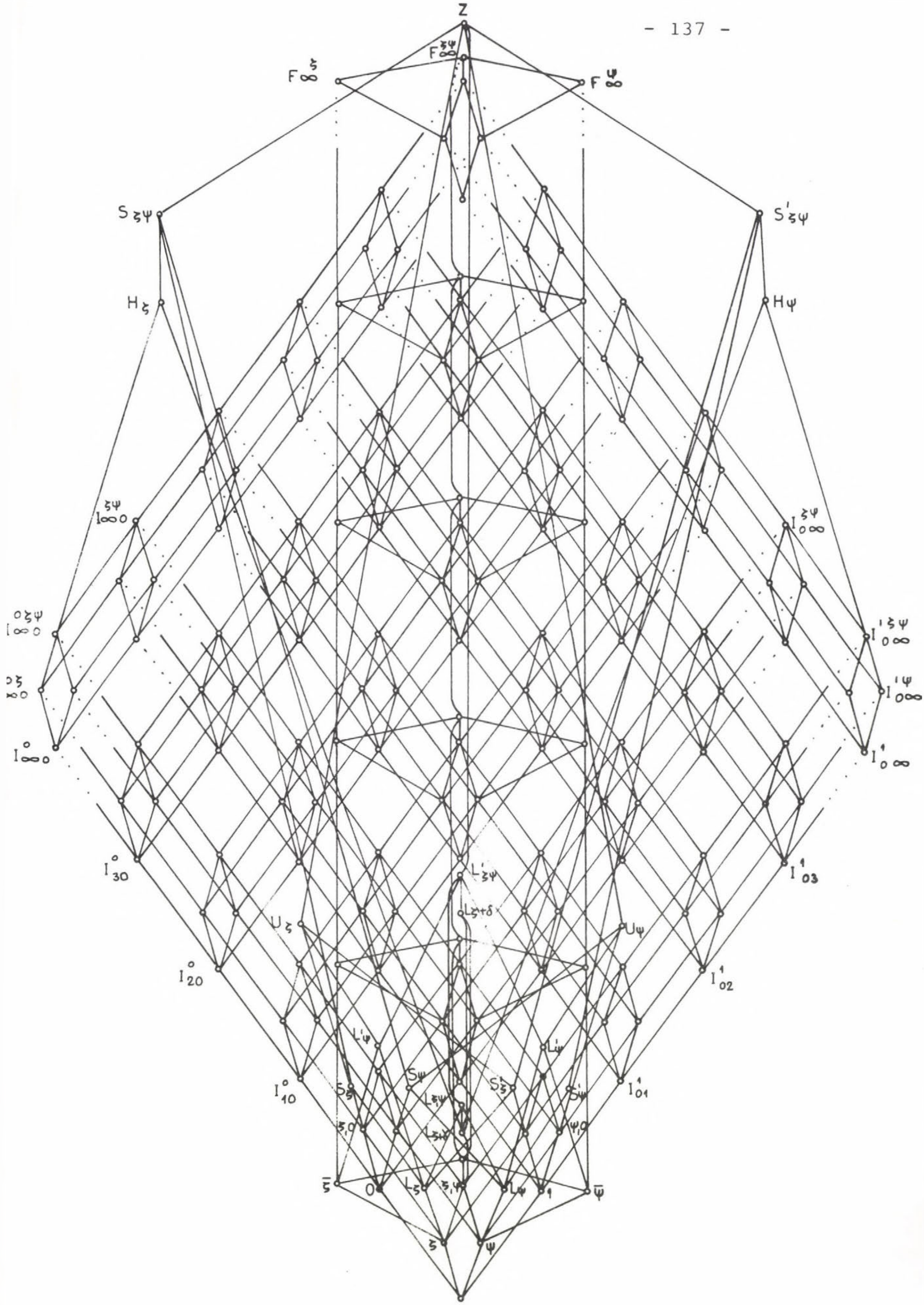

Z
$F^{\xi\psi}_{\infty}$
F^{ξ}_{∞}
F^{ψ}_{∞}
$S_{\xi\psi}$
$S'_{\xi\psi}$
H_{ξ}
H_{ψ}
$I^{\xi\psi}_{\infty 0}$
$I'^{\xi\psi}_{0\infty}$
$I^{0\xi\psi}_{\infty 0}$
$I'^{\xi\psi}_{0\infty}$
$I^{0\xi}_{\infty 0}$
$I'^{\psi}_{0\infty}$
$I^{0}_{\infty 0}$
$I'_{0\infty}$
I^{0}_{30}
I'_{03}
$L'_{\xi\psi}$
$L_{\xi+\delta}$
U_{ξ}
U_{ψ}
I^{0}_{20}
I'_{02}
L'_{ψ}
L'_{ψ}
I^{0}_{10}
S_{ξ}
S_{ψ}
S'_{ξ}
S'_{ψ}
I'_{01}
$L_{\xi\psi}$
$\xi,0$
$\psi,0$
$L_{\xi+\delta}$
$\bar{\xi}$
0
L_{ξ}
ξ,ψ
L_{ψ}
1
$\bar{\psi}$
ξ
ψ
E

Рисунок 8.

чения 0, 1, 2, либо лишь одно значение. Существует 9 таких функций /таблица 2/:

x	c_o	c_1	c_2	Π_1	Π_2	ξ_o	ξ_1	ξ_2	e_1^1
0	0	1	2	2	1	0	2	1	0
1	0	1	2	0	2	2	1	0	1
2	0	1	2	1	0	1	0	2	2

Таблица 2.

Результаты суперпозиции $f*g$, $f, g\in\{\Pi_1, \Pi_2, \xi_o, \xi_1, \xi_2\}$ показаны в таблице 3.

$g \backslash f$	Π_1	Π_2	ξ_o	ξ_1	ξ_2
Π_1	Π_2	e_1^1	ξ_2	ξ_o	ξ_1
Π_2	e_1^1	Π_1	ξ_1	ξ_2	ξ_o
ξ_o	ξ_o	ξ_1	e_1^1	Π_2	Π_1
ξ_1	ξ_2	ξ_2	Π_1	e_1^1	Π_2
ξ_2	ξ_2	ξ_o	Π_2	Π_1	e_1^1

Таблица 3.

Видим, что клон, содержащий одну из операций Π_1, Π_2, содержит и другую, и что операция Π_1 вместе с одной из операций ξ_o, ξ_1, ξ_2 порождает остальные две. Всего клон $L^{(1)}$ одноместных операций из L имеет 20 собственных подклонов, образующих решетку, изображенную на рис. 9.

Переходим к описанию подклонов клона L, содрежащих существен-

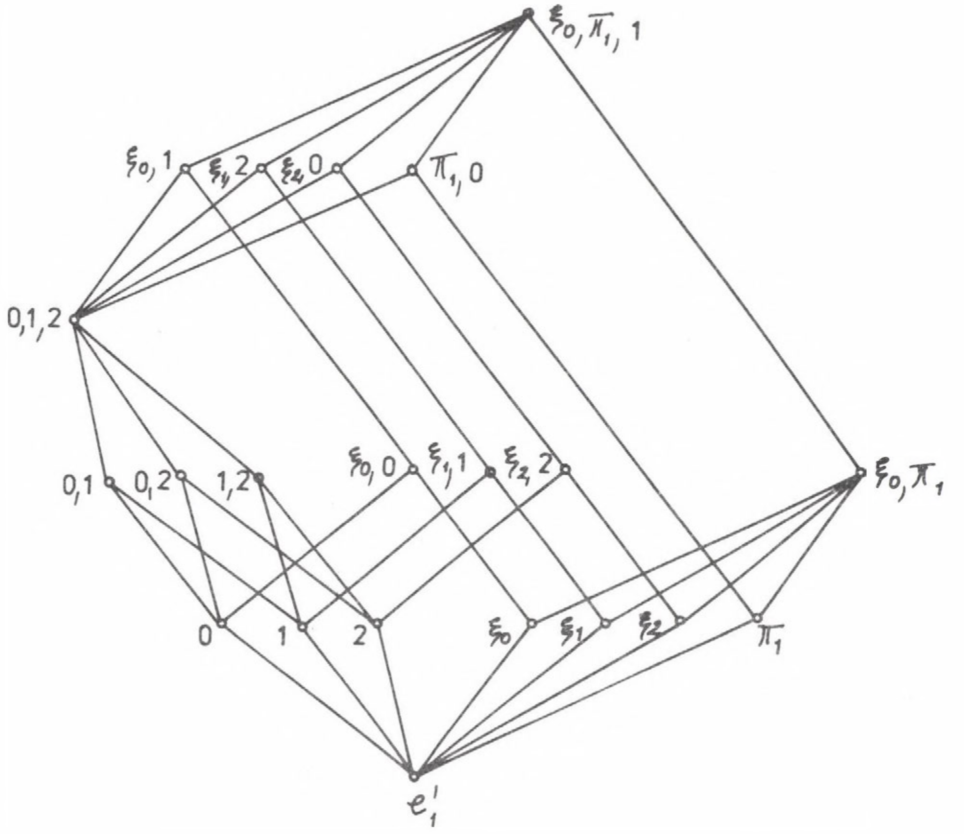


Рисунок 9.

Полугруппа $L^{(1)}$

но многоместные операции. Будем говорить, что операция $f(x_1,\dots,x_n)$ из L сохраняет константу c_i, если $f(c_i,\dots,c_i)=c_i$. Обозначим через L_i клон, образованный всеми операциями из L, сохраняющими константу c_i. Через L_s обозначим клон, образованный операциями f из L, обладающими следующим свойством

$$\forall_i \in \{1,2\}\ f(\Pi_i(x_1),\dots,\Pi_i(x_n))=\Pi_i(f(x_1,\dots,x_n)).$$

<u>Лемма 1.</u> Клон L порождается операциями $u(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $c_1(x)$.

<u>Доказательство</u>. Докажем, что из указанных операций можно получить сумму /1/ . Очевидно, что суперпозициями из u можно получить сумму $x_1+\dots+x_m$ любой длины. Пусть $m=\sum_{i=0}^{n} a_i$. Подставим c_1 вместо переменных $x_1,\dots,x_{a_0}$ и отождествим в получившейся сумме переменные $x_1,\dots,x_{a_0}$; $x_{a_0+1},\dots,x_{a_1};\dots;$ $x_{a_{n-1}+1},\dots,x_{a_n}$. В результате получим выражение /1/.

<u>Лемма 2.</u> Клоны $L^{(1)}$, L_0, L_1, L_2 и L_s и только они являются максимальными подклонами клона L.

<u>Доказательство</u>. Сначала докажем, что каждый из этих подклонов максимален в L. Пусть $f\in L\setminus L^{(1)}$. Это означает, что f - существенно многоместная операция, имеющая вид /1/. Ввиду леммы 1 нам достаточно из f получить операцию u.

Предположим для простоты, что в /1/ $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$. Подставляя вместо переменных $x_3,\dots,x_n$ константу c_0, получим операцию $a_0+a_1x_1+a_2x_2$. Подставив вместо x_i операцию $x_i+((3+1)-a_i)$, получим $a_0+x_1+x_2$. Наконец, подставив вместо x_1 операцию $x_1+(3-a_0)$, получим x_1+x_2.

Перейдем к клону L_i, $i\in\{0,1,2\}$. Множеству $L\setminus L_i$ принадлежат такие операции f, для которых $f(c_i,\dots,c_i)=c_j$, $j\neq i$. Так как $c_i\in L_i$, то c_j принадлежит клону K, порождаемому операций f и операциями из L_i. Рис.9(10) показывает, что тогда клон K содержит все константы. Операция x_1+x_2 принадлежит $L_i \subseteq K$.

Рассмотрим теперь клон L_s. Для любой операции $f \in L \setminus L_s$ найдутся такое $i \in \{1,2\}$ и такие $b_1,\ldots,b_n$ из A, что

$$f(\Pi_i(b_1),\ldots, \Pi_i(b_n)) \neq (\Pi_i * f)(b_1,\ldots,b_n).$$

Пусть $\Pi_i(b_1)=c_1,\ldots, \Pi_i(b_n)=c_n$, $\Pi_i(0)=p$. Так как Π_i - перестановка, то $b_j \neq c_j$, $j=1,\ldots,n$, $0 \neq p$. Обозначим через γ_i такую операцию из множества $\{\Pi_1, \Pi_2, e_1^1\}$, что $\gamma_i(p)=b_i$, $\gamma_i(0)=c_i$. Операция $g(x)=f(\gamma_1(x),\ldots,\gamma_n(x_n))$ принадлежит клону, порождаемому одноместными операциями из L_s /которыми являются Π_1, Π_2, e_1^1/ и операцией f. В то же время $g(\Pi_i(0)) \neq \Pi_i(g(0))$, т.е. $g \in L \setminus L_s$. Последнее означает, что g является константой или одной из операций ξ_j. Имея константу c_j, с помощью операции Π_i получаем остальные константы. Если же $g=\xi_j$, то g и Π_i порождают операцию ξ_o. Клону L_s принадлежит операция $t(x_1,x_2)=2x_1+2x_2$. Легко проверить, что $t(x,\xi_o(x))=c_o(x)$.

Клону L_s принадлежит операция $(t*t)(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+2x_3$. Подставив вместо x_3 константу c_o и отождествив x_2 и x_3, получим x_1+x_2, что и требовалось.

Теперь докажем, что клон L других максимальных подклонов не имеет. Пусть C - система операций, не содержащаяся целиком ни в одном из клонов $L^{(1)}$, L_o, L_1, L_2, L_s. Системе C принадлежат

(i) существенно многоместная операция;

(ii) для каждого $j \in \{0,1,2\}$ такая операция $h_j(x_1,\ldots,x_n)$, что $h_j(C_j(x),\ldots, C_j(x)) \neq C_j(x)$;

(iii) для некоторого $j \in \{1,2\}$ такая операция $g(x_1,\ldots,x_n)$, что $g(\Pi_j(x_1),\ldots, \Pi_j(x_n)) \neq (\Pi_j * g)(x_1,\ldots,x_n)$.

Из (ii) видно, что операция $h_j(x,\ldots,x)$ принимает более одного значения и отлична от e_1^1. Остаются две возможности: либо для некоторого i операция $h_j(x...x)$ совпадает с ξ_i, либо она совпадает с одной из операций Π_1, Π_2.

Если $C_1=\{h_i(x,...,x)|i\in\{0,1,2\}\}$ не содержит операций Π_1, Π_2, то эти операции порождаются системой C_1.

Действительно, $|C_1|\geq 2$, а любая пара различных элементов из $\{\xi_o,\xi_1,\xi_2\}$ порождает операции Π_1, Π_2.

Мы убедились, что операции Π_1, Π_2 порождаются системой C. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве максимальности клона L_s в L, приходим к выводу, что порождаются также либо все константы, либо все операции ξ_j.

а/ Пусть порождаются все операции ξ_j, и пусть операция f со свойством (i) имеет вид /1/, где каждое a_i, $i=1,...,n$, отлично от нуля. Из уравнения $a_o=ba_1$ находим $b\in\{0,1,2\}$. Подставив x_1+b вместо x_1 в f, получим $f_1(x_1,...,x_n)=$ $=a_1x_1+...+a_nx_n$. Отождествив переменные $x_3,...,x_n$, получим $f_2(x_1,x_2,x_3)=a_1x_1+a_2x_2+a_3'x_3$.

Одной из операций $a_1x_1+a_2x_2+a_3'x_2$, $a_1x_1+a_2x_2+2a_3'x_2$ обе переменные существенные. Обозначим ее через f_3, и пусть $f_3(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2'x_2$. Из уравнений $a_1c_1=1$, $a_2'c_2=1$ находим c_1 и c_2, подставляя в f_3 c_1x_1 и c_2x_2 получаем нужную операцию x_1+x_2.

<u>Лемма 3.</u> Клон L_o порождается операциями $c_o(x)$ и x_1+x_2 L_1 операциями $c_1(x)$ и $2x_1+2x_2+1$, L_2 операциями $c_2(x)$ и $2x_1+2x_2+2$, L_s операцией $2x_1+2x_2+1$.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, сумма /1/ тогда и только тогда принадлежит L_o, когда $a_o=0$. Имея операцию x_1+x_2, суперпозициями получаем сумму $x_1+...+x_m$, где $m=\sum_{i=1}^{n} a_i$. Отождествляя переменные $x_1,...,x_{a_1}$; $x_{a_{i+1}},...,x_{a_2}$;...; $x_{a_{n-1+1}},...,x_{a_n}$ получаем

сумму /1/, в которой $a_o=0$.

Автоморфизмы клона L, порождаемые операциями $\xi_1(x)=2x+1$ и $\xi_2(x)=2x+2$, отображают L_o на L_1 и L_2 соответственно. Базис $c_o(x)$, $\xi_o(x_1x_2)=x_1+x_2$ при этом отображается на c_1, ξ_1 и $c_2\xi_2$ соответственно.

Сумма /1/ принадлежит клону L_s тогда и только тогда, когда $a_1+\ldots+a_n=1$.

Действительно $\Pi_1(x)=x+1$, $\Pi_2(x)=x+2$, и по условию

$$a_o+a_1(x_1+1)+\ldots+a_n(x_n+1)=a_o+a_1x_1+\ldots+a_nx_n+1,$$

$$a_o+a_1(x_1+2)+\ldots+a_n(x_n+2)=a_o+a_1x_1+\ldots+a_nx_n+2,$$

откуда получаем $a_o+1=a_o+a_1+\ldots a_n$, $a_o+2=a_o+2a_1+\ldots+2a_n$.

Достаточность указанного условия очевидна.

Применяя к $2x_1+2x_2+1$ операцию*последовательно 4n - 2 раза, получим выражение

$$2(\ldots2(2(2x_1+2x_2+1)+2x_3+1)+\ldots+2x_{4n}+1=2x_1^{4n-1}+2x_2^{4n-1}+\ldots+2x_{4n}^{4n-1}+2^{4n-1}. \qquad /2/$$

Из $2^k=(3-1)^k=3^k-\frac{3^{k-1}}{2}+\ldots\pm1$ видим, что по mod 3

$$2^1=2,\ 2^2=1,\ 2^3=2,\ 2^4=1,\ldots,$$

поэтому выражение /2/ можно переписать в виде

$$2x_1+2x_2+x_3+2x_4+\ldots+2x_{4n}+2\ .$$

Переставляя переменные с помощью операций ξ, τ, преобразуем эту сумму к виду

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_{3n}x_{4n}+2\ .$$

Так как эта операция принадлежит L_s, то $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{3n} b_i = 1$. В то же время $a_o + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ также принадлежит L_s, поэтому $\sum_{i=1}^{3n} b_i = 0$. Отождествив переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{4n}$, получим сумму

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + 2. \qquad /3/$$

Отождествляя x_1 и x_2, из $2x_1+2x_2+1$ получаем $x+1$, а из нее суперпозицией $x+2$. Подствляя в /3/ вместо x_1 операцию e_1^1, если $a_o=2$, $x+1$, если $a_o=0$, $x+2$, если $a_o=1$, получаем сумму /1/, в которой $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, что и требовалось.

Обозначим через L' пересечение клонов L_o, L_1, L_2 и L_s, через Q_i-клон, порожденный операциями ξ_i и c_i, а через R-клон, порожденный операцией Π_1.

Лемма 4. Для $i \in \{0,1,2\}$ максимальными подклонами клона L_i являются клоны Q_i и L' и только они. Клон L_s имеет два максимальных подклона: L' и R.

Доказательство. Клон L' содержит операции, сохраняющие все константы и принадлежащие L_s. Этот клон не содержит одноместных операций, отличных от e_1^1, но содержит двуместную операцию $t(x_1,x_2)=2x_1+2x_2$.

Пусть $f \in L_o \setminus L'$. Это означает, что $f(0,\ldots,0)=0$, и либо $f(c_j(x),\ldots,c_j(x)) \neq c_j(x)$ для некоторого $j \neq 0$, либо $f(\Pi_\ell(x_1),\ldots,\Pi_\ell(x_n)) \neq (\Pi_\ell * f)(x_1,\ldots,x_n)$ для подходящего $\ell \in \{1,2\}$.

а/ Пусть $f(c_j,\ldots,c_j) \neq c_j$. Отсюда следует, что $f(x,\ldots,x) \neq e_1^1(x)$. Если $f(x,\ldots,x)$ принимает только одно значение, то она совпадает с c_o. Если же $f(x,\ldots,x) \neq c_o(x)$, то $f(x,\ldots,x)=\xi_o(x)$. Однако и в этом случае $t(x,\xi_o(x))=c_o(x)$.

Из $2x_1+2x_2$ суперпозицией получаем $4x_1+4x_2+2x_3=x_1+x_2+2x_3$; подставляя c_o вместо x_3 и отождествляя x_2 и x_3, получим x_1+x_2, что и требовалось.

б/ Пусть $f(\Pi_\ell(x_1),\ldots,\Pi_\ell(x_n))\neq(\Pi_\ell * f)(x_1,\ldots,x_n)$, тогда $f(x,\ldots,x)\neq x$. Так как $f\in L_o$, то $f(0,\ldots,0)=0$. Опять имеем только две возможности: либо $f(x,\ldots,x)=c_o(x)$, либо $f(x,\ldots,x)=\xi_o(x)$. Далее рассуждаем, как и в пункте а/.

Пусть теперь $f\in L_o\setminus Q_o$. Это означает, что операция f существенно многоместная, сохраняющая c_o, то есть $f(x_1,\ldots,x_n)=b_1x_1+\ldots+b_mx_m$. Нужно используя эту сумму и операции c_o, ξ_1, получить сумму $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$. Сначала подставляя f в себя, получим сумму, длина которой не меньше n. Затем, используя c_o и отождествляя переменные, получим сумму $d_1x_1+\ldots+d_nx_n$, длина которой равна n. Наконец, подставляя вместо x_i операцию $e_1^1(x_i)$, если $a_i=d_i$ и $\xi_1(x_i)=2x_i$, если $a_i\neq d_i$, получим сумму $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, что и требовалось.

Докажем, что других максимальных подклонов в клоне L_o нет. Пусть система операций $C\subseteq L_o$ не содержится целиком ни в L' ни в Q_o. В C содержится

(i) операция f, либо не сохраняющая c_j для некоторого $j\neq 0$, либо такая, что $f(\Pi_\ell(x_1),\ldots,\Pi_\ell(x_n))\neq(\Pi_\ell * f)(x_1,\ldots,x_n)$ для подходящего $\ell\in\{1,2\}$;

(ii) существенно многоместная операция $g(x_1,\ldots,x_m)=b_1x_1+\ldots+b_mx_m$. Условие (i) означает, что $f(x,\ldots,x)\neq e_1^1(x)$, поэтому $f(x,\ldots,x)$ совпадет либо с $c_o(x)$, либо с $\xi_o(x)$. Пусть $f(x,\ldots,x)=c_o(x)$. Если у операции (ii) $b_j=2$ для некоторого $j\in\{1,\ldots,m\}$, то, подставляя вместо x_i, $i\neq j$, операцию c_o и отождествляя переменные, получим из g операцию ξ_o. Если же все b_j равны 1, то в сумме $g_1=\Delta g$ первый коэффициент равен 2. Ввиду максимальности клона Q_o в L_o операции ξ_o, c_o, g порождают L_o.

Пусть $f(x,\ldots,x)=\xi_o(x)$.

а/ В сумме $b_1x_1+\ldots+b_mx_m$ число слагаемых равно 3k или 3k+2. Подставляя вместо x_i операцию $e_1^1(x)$, если $b_i=2$, ξ_o, если $b_i=1$, получим $c_o(x)$.

б/ $m=3k+1$. С переменными $x_2,\ldots,x_m$ поступаем так же, как и в пункте а/, а вместо x_1 подставляем $e_1^1(x)$, если $b_1=1$, $\xi_o(x)$, если $b_1=2$. Получим $c_o(x)$.

Автоморфизмы клона L_1 порождаемые операциями ξ_1 и ξ_2 оставляют клон L' неподвижным, а клон Q_o отображают на Q_1 и Q_2 соответственно, поэтому клоны Q_i, L' и только они являются максимальными подклонами клона L_i, $i=1,2$.

Докажем теперь, что L' и R являются максимальными подклонами клона L_s. Пусть $f\in L_s\backslash L'$. Это означает, что $f(c_i(x),\ldots,c_i(x))\neq \neq c_i(x)$ для некоторого $i\in\{0,1,2\}$. Отсюда следует, что $f(x,\ldots,x)\neq e_1^1(x)$. Остаются две возможности: $f(x,\ldots,x)=\Pi_1(x)$ или $f(x,\ldots,x)=\Pi_2(x)$. Далее, $\Pi_1 * \Pi_1=\Pi_2$, $2x_1+2x_2$ принадлежит L', $2x_1+2\Pi_2(x_2)=2x_1+2x_2+4=2x_1+2x_2+1$.

Пусть $f\in L_s\backslash R$. В этом случае f - существенно многоместная операция, имеющая вид /1/, где $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$. Предположим, что $a_1\neq 1$. Отождествив переменные $x_2,\ldots,x_n$, получим операцию $a_o+a_1x_1+a_2'x_2$. Так как $a_1+a_2'=1$ и $a_1=2$, то $a_2=2$. Если же все коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ равны единице, то $n>2$. Отождествив x_1 и x_2 получим существенно многоместную операцию, у которой первый коэффициент в сумме равен 2.

Итак, мы получим операцию $a_o+2x_1+2x_2$. Подставив вместо x_1 операцию $\xi_1(x_1)$, если $a_o=0$, $\xi_2(x_1)$, если $a_o=2$, $e_1^1(x_1)$, если $a_o=1$, получим операцию $2x_1+2x_2+1$.

Докажем наконец, что клон L_s имеет только два максимальных подклона. Пусть С-система операций из клона L_s, не содержащая целиком в клонах L' и R. Система С содержит существенно многоместную операцию f и операцию g, не сохраняющую константу c_i для подходящего i /эти операции могут совпадать/. Как было показано ранее, из операции g отождествлением получаем Π_1 или Π_2, которые порождают клон R. Так как R максимален в L_s, то вместе с f входящие в него операции порождают L_s.

Лемма 5. Клон L′ порождается операцией $2x_1+2x_2$. Единственным максимальным подклоном клон L′ является клон E.

Доказательство. Каждая принадлежащая клону L′ операция принадлежит также клонам L_o, L_1, L_2 и L_s, поэтому она может быть представлена суммой /1/, в которой $a_o=0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$. Применяя к $2x_1+2x_2$ операцию * последовательно 4n-2 раза, получим сумму

$$2x_1+2x_2+x_3+2x_4+\ldots+2x_{4n}$$

/см. доказательство леммы 3/. Далее переставляя переменные, приводим сумму к виду

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_{3n}x_{4n}.$$

Отождествив переменные $x_{n+1},\ldots,x_{4n}$, получим сумму /1/, в которой $a_o=0$.

При n=2 и $a_o=0$ возможны лишь 4 варианта суммы /1/ /при условии $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$/, из них лишь 2x+2y принадлежит L′. Отсюда следует, что любой подклон клона L′, содержащий существенно многоместные операции, содержит 2x+2y и потому совпадает с L′.

Из лемм 1-5 следует истинность следующего утверждения.

Теорема 2. Подклоны клона L образуют решетку, изображенную на рисунке 10.

Минимальные и существенно минимальные ТС-клоны.

Построенные решетки позволяют легко найти все минимальные и существенно минимальные ТС-клоны на трехэлементном множестве.

Автоморфизмы клона Бурле, порождаемые операциями $\xi_o(x)=2x$ и $\xi_1(x)=2x+1$, отображают клон Z на клоны Z_o и Z_1 соответственно. Эти клоны состоят из всех операций, принадлежащих клону B и принимающих значения из множеств $\{0,2\}$ /клон Z_o/ и $\{1,2\}$ /клон Z_1/. В попарных пересечениях клонов Z, Z_o и Z_1, содержатся лишь константы.

Пусть $C\subseteq P_A$. Через [C] обозначим клон, порождаемый операциями из C. Введем следующие обозначения:

$$M_\zeta=[\zeta,e_1^1],\ M_\psi=[\psi,e_1^1],\ M_i=[c_i,e_1^1]\ (i=0,1,2),$$

$$M_i^\xi=[\xi_i]\quad (i=0,1,2)\ ,\quad M^\Pi=[\Pi_1].$$

<u>Теорема 3.</u> При $|A|=3$ минимальными TC-клонами на A являются клоны M_φ, M_ψ, клоны, двойственные к ним относительно ξ_o и ξ_1, а клоны M_o, M_1, M_2, M_o^ξ, M_1^ξ, M_ξ^2 и клон M^Π. Существенно минимальными являются клоны L_ζ, L_ψ, $L_{\zeta+\gamma}$, J_{20}^o, L_{02}^1, клоны, двойственные к ним относительно ξ_o и ξ_1 , и клоны L'.

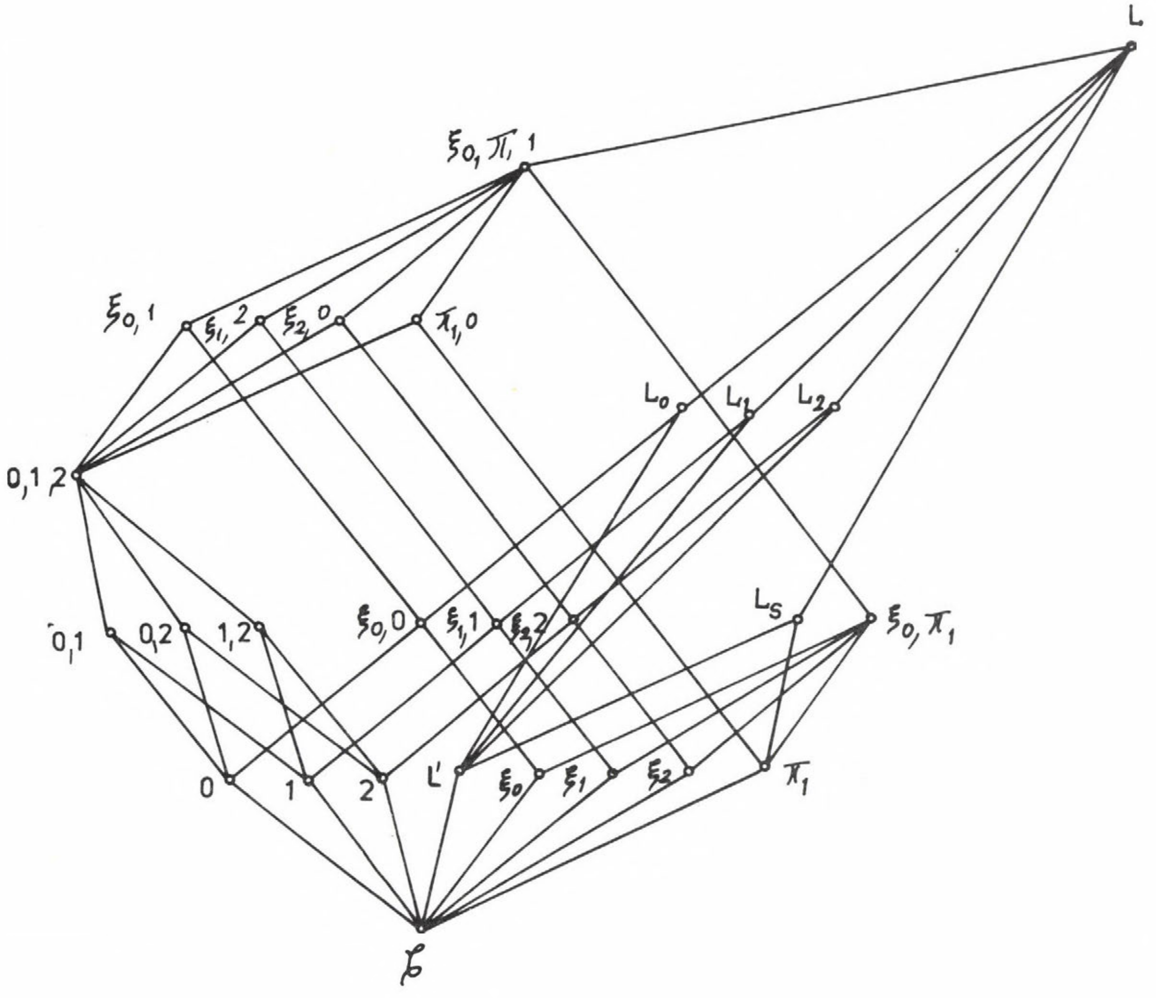


Рисунок 10.
Решётка L(L)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bagyinszki J., Demetrovics J.: The structure of linear classes in prime-valued logics. /Hungarian/ MTA SZTAKI, Közlemények, 16/1976/, 25-52.
2. Bagyinszki J., Demetrovics J.: The lattice of linear classes in prime-valued logics. Discrete mathematics. Banach center publication, volume 7, Warsaw , /1982/, 105-123.
3. Berman J., Mc Kenzie R.: Clones satisfying the term condition. Preprint, 1983.
4. Бурле Г.А.: Классы k-значных логик, содержащие все функции одной переменной. Дискретный анализ, 10/1967/, 3-7.
5. Мальцев А.И.: Итеративные алгебры Поста. Новосибирск, 1976.
6. Мальцев И.А.: Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебры Поста и их основных клеток. Алгебра и логика, 11, № 5 /1972/, 571-587.
7. Мальцев И.А.: Конгруэнции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста. Алгебра и логика, 11, № 6 /1972/, 666-672.
8. Мальцев И.А.: Некоторые свойства клеток алгебр Поста. Дискретный анализ, 23 /1973/, 24-31.
9. Мальцев И.А.: О конгруэнциях на подалгебрах итеративных алгебр Поста. Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. 29 /1976/, 40-52.
10. Machida H.: Toward a classification of minimal closed sets in 3-valued logic. Proceedings of the 12-th international symposium on multiple-valued logic. Paris, /1982/,313-317.
11. Post E.: The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals Math. Studies 5, Princeton, 1941.

12. Taylor W.: Some appelications of the term conditions. Algebra Universalis /to appear/.

13. Csákány B.: All minimal clones on theree-element set. Prepint. CRMA-1136, Montreal, 1982.

14. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.: Функции алгебры логики и классы Поста. М., "Наука", 1966.

S U M M A R Y

ESSENTIAL MINIMAL TC CLONES IN THE 3-VALUED LOGICS

J. Demetrovics - I.A. Malcev

In this paper the authors describe the essential minimal TC clones. Moreover, structure of all TC clones having no more than 2 values in analysed. Finally, structure of all the linear classes is given.

Ö S S Z E F O G L A L Á S

LÉNYEGESEN MINIMÁLIS TC KLONOK A 3-ÉRTÉKÜ LOGIKÁBAN

Demetrovics J. - Malcev I.A.

Dolgozatunkban sikerül meghatározni és pontosan leirni a lényegesen minimális TC klónokat. Ezenkivül meghatározzuk az összes olyan TC klónnak a strukturáját, amely legfeljebb 2 értéket vesz fel. Végül megadjuk az összes lineáris osztály strukturáját is.