Közlemenyek 29/1983 59-73

РАСПОЗНАЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бак Хынг Кханг, Хоанг Киэм
Институт Информатики и Кибернетики, СРВ

Распознавание образов в настоящее время находит широкое применение для решения практических задач во многих областях народного хозяйства, например, в геологии, медицине, гидрометеологии, технической диагностике, прогнозировании экономических, социальных процессов ... . Успехи в прикладном направлении являются бесспорными и общепризнанными. Однако до сих пор еще не выработана единая теория в области распознавания образов хотя попыток было больше чем достаточно. К настоящему времени в рамках математической теории распознавания образов оформилось несколько различных научных направлений. По существу можно говорить о нескольких теориях распознавания: статистической, алгебраической, структурной. Каждая из них имеет свою направленность и резко отличающийся от других набор обсуждаемых проблем.

Данная работа примыкает к алгебраической теории распознавания, развиваемой в работах [4 - 5] . Она отличается от упоминаемых работ тем, что модель распознающих алгоритмов строится в так называемом гиперкомплексном пространстве. Это вызывается тем, что при распознавании снимков снятых с самолетов, искусственных спутников и космических кораблей, объект выражается через n-мерный вектор, каждый компонент которого есть гиперкомплесное число, например, кватерион.

В данной работе доказывается, что n-мерное евклидово-пространство на k-ом гиперкомплексном поле будет гомоморфно k.n-мерному евклидову-пространству. Тем самым доказывается, что распознающие алгоритмы в n-мерном евклидовом-пространстве на k.n-ом гиперкомплексном поле являются распознающим алгоритмом в k.n-мерном евклидовом-пространстве. В частности алгоритм, распознающий цветные снимки [2] являются распознающим алгоритмом в 4n-мерном пространстве.

Другие результаты являются уставлениями условий корректности линейных решающих правил.

Сначала мы приводим некоторые необходимые понятия и определения.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Гиперкомплексное число

Число x называется $k+1$ -ым гиперкомплексным числом если:

$$x = x_o + x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k$$

где $x_i \ (i=\overline{o,k})$ – действительные числа;

$e_i \ (i=\overline{1,k})$ – базисные элементы с некоторым законом умножения:

$$e_i e_j = p_{ij,o} + p_{ij,1} \cdot e_1 + \ldots + p_{ij,k} \cdot e_k$$

где

$p_{ij,l}$ – действительные числа, $l=\overline{o,k}$

Примеры некоторых особых гиперкомплексных чисел:

- Комплексные числа: $k = (a + bi)$
- Кватернион: $Q = (a + bi + cj + dk)$
- Октава: $O = \{a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK\}$

Эти гиперкомплексные числа играют особую роль в теориях нормированной алгебры, разделимой ассоциативной алгебры [1] и в настоящее время, они имеют некотрые приложения в построении распознавающих моделей, например, на основе кватерниона [2].

1.2. Гиперкомплексное пространство

Известно, что псевдоэвклидово пространство индекса является эвклидовым, в котором система n-базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть k-векторов e_i, где $e_i^2 < 0$.

В теории дифференциального уравнения, мы встречали псевдоэвклидово пространство индекса 1, когда рассматриваем волновое уравнение n-переменных. Особенно, в теории относительности установились отношения 4-мерного время-пространства с псевдоэвклидовым пространством индекса 1 [3].

Гиперкомплексное пространство есть псевдоэвклидово пространство индекса К на гиперкомплексном поле.

Если К=0 и гиперкомплексное поле является комплексным, то мы имеем комплексное эвклидово пространство или унитарное пространство с известным скалярным произведением.

Если К=0 и гиперкомлексное поле является кватернионным полем, то имеем эвклидово пространство на кватернионном поле [2].

1.3. Скалярное поле в гиперкомплексном пространстве

Скалярное произведение в эвклидовом пространстве удовлетворяет аксиомам:

1. $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$
2. $(x, y) = (y, x)$
3. $(x, ky) = k(x, y)$
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Если
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$$

при

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \text{то} \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

В 4-ом метапсевдоэвклидовом пространстве индекса 1, минковское скалярное произведение определяется:

$$(x, y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i y_i \quad (e_1^2 = -1,\ e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 1)$$

В эвклидовом пространстве на комплексном поле имеем следующие способы определения /зависит от наличия аксиомы 1 или нет/

а - $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ /не удовлетворяет аксиоме 1/

б - $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ $\overline{y_i}$: комплексная сопряжённая

в - $(x, y) = \overline{(y, x)}$ /комплексная сопряжённая (y, x)/

Скалярное произведение, определяющее по б -, является особым случаем скалярного умножения, определяющего по в - /скалярное умножение в унитарном пространстве/.

Чтобы определить скалярное произведение в гиперкомплексном пространстве, рассмотрим следующую лемму:

Лемма 1: Задано 2 вектора x, y в гиперкомплексном пространстве на ассоциативном поле:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

Если в этом пространстве определяется скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам (2), (3) , (4), то

$$(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_i (e_i, e_j)$$

Доказательство:

Из (2), (3), (4) следует:

3') $(kx, y) = k(x, y)$

4') $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Из аксиом 3) , 3') имеем: 3'') $(kx, ly) = kl(x, y)$

Из 4-, 4'-) и 3''-) следует:

$$(x, y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n) = \sum_{i,j} x_i y_i (e_i, e_j)$$

Следствие 1: Если $\{e_i\}$, $i = \overline{1, n}$ есть система ортонормированных базисных векторов, то:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Следствие 2: Если $\{e_i\}$, $i = \overline{1, n}$ есть система базисных векторов в псевдоэвклидовом пространстве индекса К, т.е.:

$$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_k^2 = -1, \; e_{k+1}^2 = \ldots = e_n^2 = 1$$

и $(e_i, e_j) = 0$, $(i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$, то

$$(x, y) = -\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i y_i$$

то скалярное произведение в 4-мерном время-пространстве минковское скалярное произведение в 4-мерном время-пространстве является особым видом скалярного произведения.

Лемма 2: Пусть дано 2 вектора x, y в гиперкомплексном пространстве на неассоциативном поле

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$$

Если в этом пространстве определяется скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам 2, 3, 4, то:

$$(x, y) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} (x_iy_j + y_jx_i)(e_i, e_j)$$

<u>Доказательство</u>:

Из леммы 1 имеем: $(x, y) = \sum\limits_{i,j} x_iy_j (e_i, e_j)$

$$(y, x) = \sum_{i,j} y_ix_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j} y_jx_i (e_j, e_i) = \sum_{i,j} y_jx_i (e_i, e_j)$$

$$(x, y) + (y, x) = \sum_{i,j} (x_iy_j + y_jx_i)(e_i, e_j)$$

$$(x, y) = (y, x) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} (x_iy_j + y_jx_i)(e_i, e_j)$$

<u>Следствие 1</u>: Если $\{e_i\}$, $i = \overline{1, n}$ есть система базисных векторов в псевдоэвклидовом пространстве индекса К:

$$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_k^2 = -1, \quad e_{k+1}^2 = \ldots = e_n^2 = 1 \quad \text{и}$$

$$(e_i, e_j) = 0, \quad (i, j = \overline{1, n}, \; i \neq j)$$

то

$$(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (x_iy_i + y_ix_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} (x_iy_i + y_ix_i)$$

<u>Следствие 2:</u> Если $\{e_i\}$, $i = \overline{1, n}$ есть система ортонормированных базисных векторов гиперкомплексного пространства на неассоциативном поле, то:

$$(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_iy_i + y_ix_i)$$

1.4. Правило умножения гиперкомплексных чисел

Известно, что умножение гиперкомплексных чисел по обычному основывается на правиле умножения $e_i \cdot e_j$ как указано выше, в пункте 1.1.

Кроме того, мы определим еще некоторые следующие правила умножения:

1 – $x \cdot y = x \cdot \overline{y}$

2 – $x \cdot y = \overline{x} \cdot y$

3 – $x \cdot y = \overline{x} \cdot \overline{y}$

где $\overline{y}$ и $\overline{x}$ – сопряженные гиперкомплексные числа y и x.

Выбор конкретного правила умножения зависит от надобности и содержания проблемы, которую надо решать.

§ 2. РАСПОЗНОВАНИЕ ОБРАЗОВ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Образ в гиперкомплексном пространстве

В настоящее время существуют некоторые модели алгоритмов распознования в гиперкомплексном пространстве. Например, модель распознающих алгоритмов на цветных снимках [2].

По этой модели каждый объект образа выражается через n-мерный вектор, каждая компонента которого есть кватернион. Эта модель лучше отражает процессы рождения и преобразования образов, и распознающий алгоритм на кватернионном векторном пространстве, как мы рассмотрим ниже, действительно является распознающим алгоритмом по метрике в 4n – мерном пространстве.

Для обобщения, считаем образ в гиперкомплексном пространстве как множество векторов и каждая компонента которых есть гиперкомплексное число. Эти векторы можно определить в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространствах.

2.2. Расстояние в гиперкомплексном пространстве

Известно, что расстояние между двумя векторами x и y в эвклидовом пространстве определяется:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

Это определение негодится для гиперкомплексного пространства, потому что, как указано выше, скалярное произведение двух векторов в гиперкомплексном пространстве будет гиперкомплексным числом.

Для удовлетворения определению о расстоянии мы должны определить скалярное произведение в гиперкомплексном пространстве, чтобы $(x, x) > 0, \forall x \neq 0$

Теорема 1: n-мерное пространство на k-ом гиперкомплексном поле со скалярным произведением, определяемым:

1/ $(x, y) = \frac{1}{2}[(x, \overline{y}) + (y, \overline{x})]$

2/ $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$

3/ $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

4/ $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) > 0$ если $x \neq 0$

будет гомомрфно $k \cdot n$ -мерному эвкливовому пространству, где $\overline{y}$ и $\overline{x}$ - векторы, компоненты которых являются гиперкомплексными сопряженными компонентами y и x .

Доказательство: Из леммы 2, следствия /1/ имеем:

$$(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i + y_i x_i)$$

Определить скалярное произведение по лемме 2 имеем:

$$(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i \bar{y}_i + y_i \bar{x}_i)$$

x_i, y_i – есть K-ые гиперкомплексные числа.

$$x_i = x_{i1} e_1 + x_{i2} e_2 + \ldots + x_{ik} e_k$$

и

$$x_i = x_{i1} e_1 - x_{i2} e_2 - \ldots - x_{ik} e_k$$

$$y_i = y_{i1} e_1 + \ldots + y_{ik} e_k \quad \text{и} \quad \bar{y}_i = y_{i1} e_1 - \ldots - y_{ik} e_k$$

/обозначим $e_1 \equiv 1$ /.

Так получим

$$(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [(\sum_{j=1}^{k} x_{ij} e_j)(y_{i1} e_i - \sum_{j=2}^{k} y_{ij} e_j) + (\sum_{j=1}^{k} y_{ij} e_j)(x_{i1} e_1 - \sum_{j=2}^{k} x_{ij} e_j)]$$

После упрощения мы имеем:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} y_{ij} .$$

Таким образом каждому вектору x в гиперкомплексном пространстве соответствует n векторов с k компонентами

$$x' : (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk})$$

Ясно, что это соответствие есть гомоморфизм, потому что оно сохранит скалярность $(x, y) = (x', y')$.

<u>Следствие</u>: n -мерное эвклидово пространство на кватернионном поле со скалярным умножением, определяющим в теореме 1, будет гомоморфно $4n$ -мерному эвклидовому пространству.

Гомоморфизм гиперкомплексного пространства с эвклидовым пространством позволяет использовать распознающие алгоритмы, построенные в эвклидовом пространстве для решения задачи распознавания в гиперкомплексном пространстве.

2.3. Решающее правило с порогом в гиперкомплексном пространстве

2.3.1. Линейное правило с порогом в действительном эвклидовом пространстве

Пусть дана система линейных функций:

$$\Gamma_j(x) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jl}x_l + a_{jl+1}\ ; \quad j = \overline{1,l} \tag{1}$$

и решающее правило с порогом

$$a_j^A(S') = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \Gamma_j(S') > \delta_{j1} \\ 0, & \text{если } \ \Gamma_j(S') < \delta_{j1} \\ \Delta, & \text{если } \ \delta_{j2} \leqslant \Gamma_j(S') \leqslant \delta_{j1} \end{cases} \tag{2}$$

где δ_{j1}, δ_{j2} — константы.

Обозначим:

$$\|A\| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{bmatrix}$$

Имеем следующую систему.

<u>ТЕОРЕМА</u>: Линейное решающее правило с порогом $a_j^A(S')$ определяемое по (2), является корректным, если $\det\|A\| \neq 0$ Понятия о корректном алгоритме и решающем правиле определяются в [4].

<u>Доказательство</u>: Допустим, что $\tilde{S}^q = S'_1, \ldots, S'_q$ есть множество q допустимых объектов с истинной информационной матрицей $\| d_{ij} \|_{ql}$. Условия для правильной классификации объектов $S'_1, S'_2, \ldots, S'_q$ соответствующих информационной матрице по решающему правилу $a_j^A(S')$ являются

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}b_{k1} + a_{12}b_{k2} + \ldots + a_{1l}b_{kl} + a'_{1,l+1} \geq 0 \\ a_{21}b_{k1} + a_{22}b_{k2} + \ldots + a_{2l}b_{kl} + a'_{2,l+1} \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{21}b_{k1} + a_{l2}b_{k2} + \ldots + a_{ll}b_{kl} + a'_{l,l+2} \geq 0 \end{array}\right\} \quad k = \overline{1,q} \tag{3}$$

Здесь $a'_{j,l+1} = a_{j,l+1} - \delta_{j,u}, \quad u = 1, 2$

Ясно, что система неравенств (3) будет совместна если следующая система совместна

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jl}x_l + a'_{j,l+1} \geq 0; \quad j = \overline{1,l} \tag{4}$$

Как известно, что необходимое и достаточное условие совместимости системы (4) является:

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{Vmatrix} \neq 0$$

2.3.2. Линейное решающее правило с порогом в гиперкомплексном пространстве

Обозначим

$$a_j = (a_{j,l+1}, a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jl})$$
$$x = (1, x_1, x_2, \ldots, x_l)$$

Перепишем систему линейных функций (1) в следующем виде

$$\Gamma_j(x) = (a_j, x), \quad j = \overline{1, l}$$

В n-мерном эвклидовом пространстве К-мерном гиперкомплексном поле со скалярным произведением, определяемым в теореме 1, мы можем расширять концепции решающего правила с линейным порогом таким образом:

$$a_j^*(s') = \begin{cases} 1, & \text{если: } (a_j^*, x^*) > \delta_{j1} \\ 0, & \text{если: } (a^*, x^*) < \delta_{j2} \\ \Delta, & \text{если: } \delta_{j2} \leqslant (a_j^*, x^*) \leqslant \delta_{j1} \end{cases}$$

Здесь a_j^* и x^* n-мерные векторы, каждая компонента которых является К-мерным гиперкомплексным числом.

Понятие об корректных алгоритмах и решающих правилах в основном определяется по [4, 5], здесь мы только расширяем концепции о матрицах, соответствующих распознающим операторам [4, 5] с элементами в гиперкомплексном пространстве.

Каждая i-ая компонента a_j^* имеет вид:

$$a_{ji}^* = a_{ji}^1 + a_{ji}^2 + \ldots + a_{ji}^k e_{k-1}$$

Обозначим:

$$A^{*} = \begin{bmatrix} a_{11}^{1} & a_{11}^{2} & \dots & a_{11}^{k} & a_{12}^{1} & a_{12}^{2} & \dots & a_{12}^{k} & \dots & a_{1l}^{1} & a_{1l}^{2} & \dots & a_{1l}^{k} \\ a_{21}^{1} & a_{21}^{2} & \dots & a_{21}^{k} & a_{22}^{1} & a_{22}^{2} & \dots & a_{22}^{k} & \dots & a_{2l}^{1} & a_{2l}^{2} & \dots & a_{2l}^{k} \\ \dots & & & & & & & & & & & & \dots \\ a_{l1}^{1} & a_{l1}^{2} & \dots & a_{l1}^{k} & a_{l2}^{1} & a_{l2}^{2} & \dots & a_{l2}^{k} & \dots & a_{ll}^{1} & a_{ll}^{2} & \dots & a_{ll}^{k} \end{bmatrix}$$

Для сокращения обозначим:

$$\| A^{*} \| = \| a_{ij}^{p} \|_{l,\, l(k)} \; ; \quad \begin{matrix} p = \overline{1, k} \\ i, j = \overline{1, l} \end{matrix}$$

<u>ТЕОРЕМА 3</u>: Линейное решающее правило с порогом определяемое по [5] является корректным если:

$$\text{ранг } \| A^{*} \| = l \; .$$

<u>Доказательство</u>: Пусть $\tilde{S}^{q} = \{ S'_1, S'_2, \dots, S'_q \}$ является множеством q выборочных объектов в гиперкомплексном пространстве с информационной матрицей $\| a_{ij} \|_{ql}$. Условие для правильной классификации объектов $S'_1, S'_2, \dots, S'_q$ соответствующих информационной матрице $\| a_{ij} \|_{ql}$ по решающему правилу $a_j^{A^*}(S')$ является:

$$\left. \begin{matrix} (a_j^{*}, S'_1) - \delta_{j,\omega} \gtrless 0 \\ (a_j^{*}, S'_2) - \delta_{j,\omega} \gtrless 0 \\ \vdots \\ (a_j^{*}, S'_q) - \delta_{j,\omega} \gtrless 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \omega = 1, 2 \\ j = \overline{1, l} \end{matrix} \qquad (6)$$

Ясно, что система неравенств (6) будет совместима, если совместна следующая система

$$(a_j^{*}, x) - \delta_{j,\omega} \gtrless 0 \; ; \quad j = \overline{1, l} \qquad (7)$$

Разлагая ее имеем:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} a_{ji}^{P} x_{i}^{P} - \delta_{j,\omega} \geqslant 0 \qquad j=\overline{1,l}$$

Следовательно, что необходимым и достаточным условием совместности системы (7) является:

$$\text{ранг} \left\| a_{ij}^{P} \right\|_{l,k\cdot l} = l \qquad \begin{array}{l} p=\overline{1,k} \\ i,j=\overline{1,l} \end{array}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кантор И.Л., Солодовник А.С.: Гиперкомплексные числа. Изд. Наука, М., 1973.

2. Журник И.Г.: О некоторых вопросах опознавания образов на цветных снимках. Геодезия и Аэрофотосъемка, № 6, 1978.

3. Кильчевский А.: Элементы тензорного анализа и его приложение в механике. Изд-во Наука, М., 1963.

4. Журавлев Ю.И.: Об алгебраическом подходе к решению задач распознования и классификации. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 33, М., Наука, 1978.

5. Бак Хынг Кханг: Полнота линейных замыканий некоторых классов алгоритмов распознавания. ДАН СССР, № 4, 1978.

PATTERN-RECOGNITION ALGORITHMS IN HYPERCOMPLEX SPACE

Bak Hing Khang, Hoang Kiem
Hanoi, Vietnam

The paper deals with the questions belonging to algebraic theory of pathern-recognition. The algorithms of pattern--recognition are investigated in so called hypercomplex, space (say n-dimensional space of quaternions). The main field of applications is the study of pictures ganied by air-planes or satelites.

ALAKFELISMERÉSI ALGORITMUSOK A HIPERKOMPLEX TÉRBEN

Bak Hing Khang, Hoang Kiem
Hanoi, Vietnam

A cikk az alakfelismerés algebrai elméletéhez kapcsolódik. Az alakfelismerési algoritmusokat a szerzők u.n. hiper-komplex térben vizsgálják mondjuk a kvaternionok n-dimenziós térben . A fő alkalmazási terület a repülőgépek ill. ürhajók által nyert képek kiértékelése.