MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 21/1978.

К В А З И М О Д У Л И , I.

До Лонг Ван, Нгуен Куок Тоан

§ 0. Введение

В этой заметке авторы предлагают одну алгебраическую систему так называемую квазимодулем.

По определению квазимодуля, введенному в §1, класс всех квазимодулей включает в себя, в частности, все группы и все модули. Некоторые конструкции, позволяющие построить новые квазимодули из заданных квазимодулей указаны. Благодаря этому, в частности, можно построить простые примерыквазимодулей, не являющихся ни группами ни модулями. Одно условие, необходимое и достаточное для того, чтобы одна группа с кольцом унарных операций была квазимодулем, потом, сформулировано.

В §2 сформулируются характеристики некоторых классов знакомых групп /Бернсайдовых групп, ПD - групп, D - групп/ в терминах квазимодулей. Это, с одной стороны, дает более глубокие примеры квазимодулей, и с другой стороны, наводит на мысль одного подхода к группам со стороны колец.

§ 1. Определение и примеры.

1. Под кольцом мы будем понимать ассоциативное кольцо /не обязательно с единицей/. Квазимодулем над кольцом Ω , или короче, Ω-квазимодулем будем называть любую группу G с кольцом Ω унарных операций, удовлетворяющих, для любых $a \in G$; $\alpha, \beta \in \Omega$, следующим условиям

/КВМ.0/ $\quad e^{\alpha} = e$;

/КВМ.1/ $\quad a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha} . a^{\beta}$;

/КВМ.2/ $\quad a^{\alpha\beta} = (a^{\alpha})^{\beta}$, где через a^{α} обозначаем результат применения операции $\alpha \in \Omega$ к элемнту $a \in G$, e - единица группы G .

Если, кроме этого, кольцо Ω обладает единицей ε и для любого $a \in G$

/КВМ.3/ $a^{\varepsilon} = a$,

то Ω - квазимодуль G называется <u>унитарным</u>.

Непосредственно из /КВМ.1/ и /КВМ.2/ получаем

/КВМ.4/ $a^{0} = e$,

и также

/КВМ.5/ $a^{-\alpha} = (a^{\alpha})^{-1}$

где 0 - нулевой элемент кольца Ω .

А если G унитарен, то, ввиду /КВМ.2/ и /КВМ.3/, мы имеем также

/КВМ.6/ $a^{-\alpha} = (a^{-1})^{\alpha}$

<u>Замечание 1.</u> Класс всех квазимодулей над заданным кольцом составляет многообразие Ω - групп /об Ω - группах см., например, [1] или [2] /. Многие понятия и результаты из теории Ω - групп, поэтому автоматически перенесены на случай квазимодулей. Мы сможем говорить, например, о подквазимодулях и об идеалах данного квазимодуля, о фактор-квазимодуле по его идеалу, о гомоморфизме квазимодулей и т.д. Во избежание громоздкости, в дальнейшем такие понятия и факты мы будем использовать, считая известными.

В качестве первых примеров квазимодулей мы можем взять следующие две известные алгебраические системы.

<u>Пример 1</u>. Каждый Ω - модуль /унитарный/ является Ω - квазимодулем /унитарным/.

<u>Пример 2</u>. Каждая группа G превратится в унитарный квазимодуль

над кольцом Z целых чисел если под "действием" операции $n \in Z$ на элемент $a \in G$ мы понимаем воздействие в степени n элемента a в группе G. Наоборот, если G любой унитарный Z-квазимодуль, то, ввиду /КВМ. 1/ и /КВМ. 3/ результат применения операции $n \in Z$ к $a \in G$ не что иное как возведение в сепени n элемента a в группе G. Итак, в каком-то смысле мы можем отождествлять группу G с унитарным Z-квазимодулем G.

2. Естественно возникает такой вопрос: существуют ли квазимодули, не являющиеся ни унитарными Z-квазимодулями, ни модулями. В следующем мы покажем, что таких квазимодулей много.

Прямой проверкой легко доказать следующую теорему

<u>Теорема 1.</u> Пусть I – любое множество индексов и для каждого $i \in I$, G_i есть квазимодуль /унитарный/ над некоторым кольцом Ω_i. Тогда декартово произведение G групп G_i, $G = \prod\limits_I G_i$, будет квазимодулем /унитарным/ над декартовым произведением Ω колец Ω_i, $\Omega = \prod\limits_I \Omega_i$.

<u>Пример 3</u>. В теореме 1 для каждого выбора квазимодулей G_i таких, что группа G не абелева и кольцо Ω неизоморфно кольцу Z целых чисел мы получаем квазимодуль /именно Ω – квазимодуль G /, не являющийся ни унитарным Z – квазимодулем, ни модулем. В частности, благодаря Теореме 1 можно простроить квазимодули, не являющиеся ни унитарными Z – квазимодулями, ни модулями, исходя только из унитарных Z – квазимодулей и модулей.

Система подгрупп $\{A_i \mid i \in I\}$ группы G такая, что $\bigcup\limits_I A_i = G$ называется <u>покрытием</u> группы G. Если, кроме этого, подгруппы A_i абелевы, то это покрытие называется <u>абелевым покрытием</u>.

<u>Теорема 2</u>. Пусть G – произвольная группы и $\{ A_i \mid i \in I \}$ некоторое ее покрытие такое, что каждая подгруппа A_i явля-

ется квазимодулем /унитарным/ над некоторым кольцом Ω_i . Через p_i обозначением i -ую проекцию декартова произведения $\prod_I \Omega_i$. Тогда

$$\Omega = \{ \alpha \in \prod_I \Omega_i \mid \forall_{i,j} \ (a \in A_i \cap A_j \rightarrow a^{p_i \alpha} = a^{p_j \alpha})\}$$

будет кольцом с одними и теми же операциями сложения и умножения, определенными в $\prod_I \Omega_i$ /подкольцом кольца $\prod_I \Omega_i$ /, а G будет квазимодулем над Ω , если действие $\alpha \in A_i$ на $a \in G$ определяется следующим образом: для любого $a \in A_i$, $a^{\alpha} = a^{p_i \alpha}$

Доказательство. Видно, что для любых $a \in A_i \cap A_j$, $\alpha, \beta \in \Omega$, мы имеем

$$a^{p_i(\alpha+\beta)} = a^{p_i \alpha + p_i \beta} = a^{p_i \alpha} . a^{p_i \beta} = a^{p_j \alpha} . a^{p_j \beta} = a^{p_j \alpha + p_j \beta} = a^{p_j(\alpha+\beta)};$$

$$a^{p_i(-\alpha)} = a^{-p_i \alpha} = (a^{p_i \alpha})^{-1} = (a^{p_j \alpha})^{-1} = a^{-p_j \alpha} = a^{p_j(-\alpha)};$$

$$a^{p_i(\alpha\beta)} = a^{p_i \alpha . p_i \beta} = (a^{p_i \alpha})^{p_i \beta} = (a^{p_j \alpha})^{p_j \beta} = a^{p_j \alpha . p_j \beta} = a^{p_j(\alpha\beta)}.$$

/заметим, что $a^{p_i \alpha} = a^{p_j \alpha} \in A_i \cap A_j$ /. Это означает, что $\alpha + \beta$, $-\alpha$, $\alpha\beta$ также принадлежат Ω . Таким образом Ω является кольцом с одними и теми же операциями сложения и умножения, определенными в $\prod_I \Omega_i$.

Так как $e \in A_i$ для всех $i \in I$, то для любого $\alpha \in \Omega$

$$e^{\alpha} = e^{p_i \alpha} = e.$$

Потом при любых $a \in A_i$, $\alpha, \beta \in \Omega$

$$a^{\alpha+\beta} = a^{p_i(\alpha+\beta)} = a^{p_i \alpha + p_i \beta} = a^{p_i \alpha} . a^{p_i \beta} = a^{\alpha} . a^{\beta} ;$$

$$a^{\alpha\beta} = a^{p_i(\alpha\beta)} = a^{p_i \alpha . p_i \beta} = (a^{p_i \alpha})^{p_i \beta} = (a^{\alpha})^{\beta} .$$

/заметим, что $a^{p_i \alpha} \in A_i$ /. Итак G является Ω - квазимодулем.

Теперь допустим, что квазимодули A_i унитарны. Тогда ясно, что кольцо $\prod_I \Omega_i$ имеет единичный элемент ε, i-й компонент которого есть единичный элемент ε_i кольца Ω_i.
Но тогда, для любого $a \in A_i \cap A_j$, мы имеем

$$a^{p_i \varepsilon} = a^{\varepsilon_i} = a = a^{\varepsilon_j} = a^{p_j \varepsilon},$$

значит $\varepsilon \in \Omega$, и тогда Ω является подкольцом кольца $\prod\limits_I \Omega_i$. Затем, при любом $a \in A_i$

$$a^{\varepsilon} = a^{p_i \varepsilon} = a^{\varepsilon_i} = a,$$

значит, в этом случае, Ω - квазимодуль G унитарен.

Покрытие $\{A_i \mid i \in I\}$ группы G называется <u>непересекающимся</u> если $\forall i,j (i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = E)$, где E – единичная группа.

Непосредственно из Теоремы 2 следует.

<u>Следствие 1</u>. Если $\{A_i \mid i \in I\}$ непересекающееся покрытие группы G и для каждого $i \in I$, A_i есть квазимодуль /унитарный/ над некоторым кольцом Ω_i, то G будет квазимодулем /унитарным/ над $\prod\limits_I \Omega_i$.

Как известно, что каждую абелеву группу A можно считать модулем над Z или над $\mathrm{Hom}\,(A, A)$. Следовательно, из Теоремы 2 и Следствия 1 следует

<u>Следствие 2</u>. Если $\{A_i \mid i \in I\}$ - абелево покрытие /непересекающееся/ группы G, то G будет унитарным квазимодулем над некоторым подкольцом кольца $\prod\limits_I \Omega_i$ /над $\prod\limits_I \Omega_i$ /, где Ω_i, $i \in I$, есть либо Z либо $\mathrm{Hom}\,(A_i, A_i)$.

<u>Пример 4</u>. Рассмотрим абелеву группу из четырех элементов $G = \{e,a,b,c\}$, заданную следующей таблицей.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Видно, что циклические подгруппы второго порядка $A_1 = \{e,a\}$, $A_2 = \{e,b\}$, $A_3 = \{e,c\}$ составляют непересекающееся абелево покрытие группы G. По Следствию 2 можно считать G унитарным квазимодулем, например, над Z_2^3, где Z_2 - кольцо вычетов по модулю 2. Ясно, что этот квазимодуль не является унитарным Z - квазимодулем; он также не является модулем так как, например

$$a^{(1,1,0)}\ b^{(1,1,0)} = ab = c\ ,$$

в то время

$$(ab)^{(1,1,0)} = c^{(1,1,0)} = e\ .$$

Пример 5. Рассмотрим симметрическую группу третьей степени

$$S_3 = \{e,\ (12),\ (13),\ (23),\ (123),\ (132)\}\ .$$

Легко видеть, что циклические подгруппы второго и третьего порядка

$$A_1=\{e,(12)\},\ A_2=\{e,(13)\},\ A_3=\{e,(23)\},\ A_4=\{e,(123),(132)\}$$

составляют непересекающееся абелево покрытие группы S_3 . Снова по Следствию 2 можно считать S_3 унитарным квазимодулем, например, над $Z_2^3 \times Z_3$. Видно, что этот не является унитарным Z - квазимодулем; он также не является модулем так как S_3 не коммутативна.

Замечание 2. Пусть $\varphi = \Delta \to \Omega$ гомоморфизм кольца Δ в кольцо Ω . Тогда, если G есть Ω - квазимодуль /унитарный/, то G будет Δ - квазимодулем /унитарным/, где действие элемента $\alpha \in \Delta$ на элемент $a \in G$ определяется следующим образом: $a^{\alpha} = a^{\varphi(\alpha)}$. В частности, если G есть квазимодуль /унитарный/ над кольцом Ω , то G будет также квазимодулем /унитарным/ над любым подкольцом кольца Ω .

Пусть G - группа с кольцом Ω унарных операций и пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ - некоторое покрытие группы G . Если для каждого $i \in I$, подгруппа A_i вместе с операциями из Ω составляет Ω - квазимодуль, то мы будем называть $\{A_i \mid i \in I\}$ покрытием Ω - квазимодулей группы G. А если, A_i вместе с операциями из Ω составляет Ω - модуль, то мы имеем покрытие Ω -модулей группы G.

Из Теоремы 2 и из Замечания 2 следует

Следствие 3. Если G - группа с кольцом Ω унарных операций и $\{A_i \mid i \in I\}$ - некоторое ее покрытие Ω - квазимодулей /унитарных/, то G будет Ω - квазимодулем /унитарным/.

3. Ω - квазимодуль, порожденный одним элементом a называется циклическим и обозначается (a) .

Лемма 1. Любой унитарный циклический Ω - квазимодуль является унитарным циклическим Ω - модулем.

Доказательство. Пусть (a) есть унитарный циклический Ω - квазимодуль, порожденный элементом a . Ввиду унитарности легко видеть, что $(a) = \{a^\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. Затем при любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ имеем

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\beta+\alpha} = a^\beta . a^\alpha ;$$

$$(a^\alpha . a^\beta)^\gamma = (a^{\alpha+\beta})^\gamma = a^{(\alpha+\beta)\gamma} = a^{\alpha\gamma+\beta\gamma} = a^{\alpha\gamma} . a^{\beta\gamma} = (a^\alpha)^\gamma . (a^\beta)^\gamma$$

Итак (a) является унитарным циклическим Ω - модулем.

Теорема 3. Пусть Ω - кольцо с единицей и G - группа с кольцом Ω унарных операций. Для каждого $a \in G$ поставим $A_a = \{a^\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. Тогда G будет унитарным Ω - квазимодулем тогда и только тогда, когда $\{A_a \mid a \in G\}$ составляет покрытие унитарных циклических Ω - модулей группы G .

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из Следствия 3. Пусть G есть унитарный Ω - квазимодуль. Тогда при каждом $a \in G$, A_a должен быть унитарным циклическим подквазимодулем, порожденным элементом a , и следовательно, по Лемме 1, A_a будет унитарным циклическим Ω - модулем. Таким образом система $\{A_a \mid a \in G\}$ составляет покрытие унитарных циклических Ω - модулей группы G .

§ 2. Характеристики некоторых классов групп в терминах квазимодулей.

1. Как известно в теории групп, бернсайдовское многообразие экспоненты n определяется тождеством

$$x^n = e .$$

следующая теорема дает одну характеристику групп из бернсайдовского многообразия экспоненты n в терминах квазимодулей.

Теорема 4. Группа G принадлежит бернсайдовскому многообразию экспоненты n тогда и только тогда, когда G является унитарным квазимодулем над кольцом Z_n вычетов по модулю n .

Доказательство. Пусть группа G принадлежит бернсайдовскому многообразию экспоненты n . Через $[r]$ обозначаем класс числа r по модулю n и для любого $a \in G$ поставим

$$a^{[r]} =_{df} a^r$$

где a^r есть r-ая степень элемента a . Очевидно для любого r

$$e^{[r]} = e .$$

Затем для любого $a \in G$ и лбых r, λ имеем

$$a^{[r]+[\lambda]} = a^{[r+\lambda]} = a^{r+\lambda} = a^r . a^\lambda = a^{[r]} . a^{[\lambda]} ;$$

$$a^{[r] \cdot [\lambda]} = a^{[r\lambda]} = a^{r\lambda} = (a^r)^\lambda = (a^{[r]})^{[\lambda]} ;$$

$$a^{[1]} = a^1 = a .$$

Таким образом G является унитарным Z_n - квазимодулем.

Обратно, пусть G унитарный Z_n - квазимодуль. Тогда для любого $a \in G$, ввиду /КВМ.3/, /КВМ.1/ и /КВМ.4/, имеем

$$a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a^{[1]}.a^{[1]}\ldots a^{[1]}}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{[1]+[1]+\ldots+[1]}^{n \text{ раз}}} = a^{[n]} = e$$

Итак группа G должна принадлежать бернсайдовскому многообразию экспоненты n .

2. Пусть П некоторое множество простых чисел. Любое целое число r , все простые делители которого принадлежат П, называется _П-числом._ Группа G называется _ПD-группой,_ если для любого $a \in G$ и любого П-числа $r > 0$, уравнение

$$x^r = a \tag{1}$$

имеет ровно одно решение. В частности, если П совпадает с множеством всех простых чисел, то ПD-группу будем называть просто _D-группой_. ПD-группы и D-группы были рассмотрены впервые Баумслагом [3] и оказалось, что они обладают многими интересными свойствами. В следующем мы сформулируем для этих групп характеристики в терминах квазимодулей.

Через $Z[\Pi^{-1}]$ обозначаем кольцо всех рациональных чисел вида $\frac{n}{r}$, где n – целое, r – положительное П-число или $r = 1$.

Теорема 5. Группа G будет ПD-группой тогда и только тогда, когда она является унитарным квазимодулем над кольцом $Z[\Pi^{-1}]$.

Доказательство. Пусть G произвольная данная ПD-группа. Для каждого $a \in G$ и каждого $\frac{n}{r} \in Z[\Pi^{-1}]$ мы обозначаем через $a^{\frac{n}{r}}$ единственный элемент группы G такой, что

$$(a^{\frac{n}{r}})^r = a^n .$$

Тогда каждый элемент из колца $Z[\Pi^{-1}]$ однозначно определяет одну унарную операцию на группе G , потому что если $\frac{n}{r} = \frac{m}{\lambda}$, т.е. $n\lambda = mr$, то $(a^{\frac{n}{r}})^{r\lambda} = a^{n\lambda} = a^{mr} = (a^{\frac{m}{\lambda}})^{r\lambda}$ и следовательно $a^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{m}{\lambda}}$.

Теперь при любом $\frac{n}{r} \in Z[\Pi^{-1}]$ имеем $(e^{\frac{n}{r}})^r = e^n = e = e^r$, отсюда $e^{\frac{n}{r}} = e$.

Затем, при любых $a, b \in G$ и любых $\frac{n}{r}, \frac{m}{\lambda} \in Z[\Pi^{-1}]$, если $ab = ba$, то $a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{m}{\lambda}} = b^{\frac{m}{\lambda}} a^{\frac{n}{r}}$. В самом деле, достаточно докажем для случая $\frac{m}{\lambda} = 1$. Из коммунитативности элементов a и b следует, что $(b^{-1} a^{\frac{n}{r}} b)^r = b^{-1} (a^{\frac{n}{r}})^r b = b^{-1} a^n b = a^n$. отсюда $b^{-1} a^{\frac{n}{r}} b = a^{\frac{n}{r}}$, или $a^{\frac{n}{r}} b = b\, a^{\frac{n}{r}}$.

В качестве частного случая доказанного утверждения имеем

$$a^{\frac{n}{r}} a^{\frac{m}{\lambda}} = a^{\frac{m}{\lambda}} a^{\frac{n}{r}}$$

при любых $a \in G$; $\frac{n}{r}, \frac{m}{\lambda} \in Z[\Pi^{-1}]$.

Используя последний факт получаем

$$\begin{aligned}(a^{\frac{n}{r}+\frac{m}{\lambda}})^{r\lambda} &= (a^{\frac{n\lambda+mr}{r\lambda}})^{r\lambda} = a^{n\lambda+mr} = a^{n\lambda} . a^{mr} \\ &= (a^{\frac{n\lambda}{r\lambda}})^{r\lambda} (a^{\frac{mr}{r\lambda}})^{r\lambda} = (a^{\frac{n}{r}})^{r\lambda} (a^{\frac{m}{\lambda}})^{r\lambda} \\ &= (a^{\frac{n}{r}} . a^{\frac{m}{\lambda}})^{r\lambda},\end{aligned}$$

отсюда

$$a^{\frac{n}{r}+\frac{m}{\lambda}} = a^{\frac{n}{r}} . a^{\frac{m}{\lambda}} .$$

Затем мы имеем также

$$\begin{aligned}((a^{\frac{n}{r}})^{\frac{m}{\lambda}})^{r\lambda} &= (((a^{\frac{n}{r}})^{\frac{m}{\lambda}})^{\lambda})^{r} = ((a^{\frac{n}{r}})^{m})^{r} \\ &= ((a^{\frac{n}{r}})^{r})^{m} = a^{nm},\end{aligned}$$

отсюда

$$(a^{\frac{n}{r}})^{\frac{m}{\lambda}} = a^{\frac{nm}{r\lambda}} = a^{\frac{n}{r}\cdot\frac{m}{\lambda}}$$

Итак мы доказали, что G является $Z[\Pi^{-1}]$ - квазимодулем. Унитарность этого квазимодуля очевидна.

Обратно, пусть G есть унитарный $Z[\Pi^{-1}]$ - квазимодуль. Тогда для каждого $a \in G$ и каждого П-числа $r > 0$, уравнение /1/ имеет $a^{\frac{1}{r}}$ в качестве решения потому, что ввиду /КВМ.2/ и /КВМ.3/

$$(a^{\frac{1}{r}})^r = a^{\frac{1}{r}\cdot r} = a^1 = a \quad .$$

Затем, если b - любое решение уравнения /1/, то

$$b = b^{r\cdot\frac{1}{r}} = (b^r)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}}$$

Таким образом уравнение /1/ имеет единственное решение в группе G ; иначе говоря, G является ПD-группой.

Заметим, что когда П совпадает с множеством всех простых чисел, то $Z\,[П^{-1}]$ становится полем Q всех рациональных чисел. Таким образом, в качестве прямого следствия Теоремы 5 мы получаем следующую теорему

Теорема 6. Группа G будет D -группой тогда и толко тогда, когда она является унитарным квазимодулем над полем Q всех рациональных чисел.

Цитированная литература

1 Курош А.Г., Лекции по общей алгебре, Москва, 1962.

2 Курош А.Г., Теория групп, Москва, 1967

3 Baumsiag G., Some aspects of groups with unigue roots, Acta Math. 104 /1960/, 217-303.

S u m m a r y

Quasimodules

Do Long Van – Nguen Kuok Toan

The notion of guasimodule is introduced, by definition of which the class of all guasimodules contains, in particular, all group and modules. It is shown that there are many guasimodules which are neither groups nor modules. A necessary and sufficient condition for a group with a ring of unary operations being a guasimodule is shown. The characteristics of some well-known classes of groups in terms of guasimodules are formulated.

Ö s s z e f o g l a l ó

Kvázimodulok

Do Long Van – Nguen Kuok Toan

A cikk bevezeti a kvázimodulok fogalmát, melynek definiciója alapján a kvázimodulok osztálya tartalmazza speciálisan az összes csoportokat és modulokat. Megmutatja, hogy sok kvázimodul van amelyik sem csoport sem modul. Szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy olyan csoport amelyik rendelkezik egyváltozós operációk egy gyűrűjével kvázimodul legyen. A csoportok néhány jól ismert osztályának jellemzőit leirja kvázimodul terminólogiában.