MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 21/1978.

К В А З И М О Д У Л И, II.

До Лонг Ван, Нгуен Куок Тоан

0. Понятие квазимодуля было введено в [1]. В настоящей заметке мы быдем определять и рассматривать некоторые специальные типы подквазимодулей, которые, как увидим, играют здесь такие же роли, какие играют в теории групп соответствующие типы подгрупп.

1. Пусть дан Ω - квазимодуль G. Для любых $a, b \in G$; $\beta \in u\{1\}$ поставим

$$[a,b]_\beta =_{df} a^{-\beta} b^{-\beta} (ab)^\beta ;$$

$$[a]^b_\beta =_{df} b^{-\beta} (ab)^\beta$$

В следующем, вместо $[a, b]_1$ и $[a]^b_1$ мы тоже пишем просто $[a, b]$ и $[a]^b$ соответственно.

<u>Лемма 1.</u> Пусть G произвольный Ω - квазимодуль. Тогда для любых a, b из G и любых элементов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ $(n \geq 1)$ из Ω мы имеем

$$[a]^b_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n} = [[a]^b_{\beta_2}]^{b^{\beta_2+\dots+\beta_n}} \cdot [[a]^b_{\beta_2}]^{b^{\beta_3+\dots+\beta_n}} \cdots [[a]^b_{\beta_{n-1}}]^{b^{\beta_n}} \cdot [a]^b_{\beta_n}.$$

<u>Доказательство.</u> Мы докажем индукцией по n. При $n = 1$ лемма верна тривиально. При $n = 2$ имеем

$$[a]^b_{\beta_1+\beta_2} = b^{-(\beta_1+\beta_2)} (ab)^{\beta_1+\beta_2} = b^{-\beta_2} b^{-\beta_1} (ab)^{\beta_1} (ab)^{\beta_2} =$$

$$= b^{-\beta_2} b^{-\beta_1} (ab)^{\beta_1} \, b^{\beta_2} \, b^{-\beta_2} (ab)^{\beta_2} =$$

$$= b^{-\beta_2} [a]^b_{\beta_2} \, b^{\beta_2} [a]^b_{\beta_2} = [[a]^b_{\beta_1}]^{b^{\beta_2}} \cdot [a]^b_{\beta_2} ,$$

т.е. лемма верна и в этом случае. Теперь допустим, что $n > 2$ и лемма была доказана для $n-1$. Тогда, из верности леммы для $n = 2$ и из индуктивного предложения следует

$$[a]^b_{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n} = [a]^b_{\beta_1+(\beta_2+\ldots+\beta_n)} = [[a]^b_{\beta_1}]^{b^{\beta_2+\ldots\beta_n}} \cdot [a]^b_{\beta_2+\ldots+\beta_n} =$$

$$= [[a]^b_{\beta_1}]^{b^{\beta_2+\ldots+\beta_n}} [[a]^b_{\beta_2}]^{b^{\beta_3+\ldots+\beta_n}} \ldots [[a]^b_{\beta_{n-1}}]^{b^{\beta_n}} \cdot [a]^b_{\beta_n}$$

значит лемма справедлива для n. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.</u> Пусть G произвольный заданный Ω - квазимодуль и пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ $(n \geq 1)$ есть элемент из Ω такие, что каждый β_i, $i = 1,2,\ldots,n$ является эндоморфизмом или антиэндоморфизмом группы G. Тогда для любых a, b из G мы имеем

$$[a]^b_{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n} = [a^{\beta_1} b^{\beta_1'+\beta_2+\ldots+\beta_n}] \cdot [a^{\beta_2} b^{\beta_2'+\beta_3+\ldots+\beta_n}] \ldots [a^{\beta_{n-1}} b^{\beta_{n-1}'+\beta_n}] \cdot [a^{\beta_n} b^{\beta_n'}],$$

где β_i' равно β_i или 0 в зависимости от того, является ли β_i эндоморфизмом или антиэндоморфизмом группы G, $i = 1,2,\ldots, n$.

<u>Доказательство.</u> Легко видеть, что если β_i является эндоморфизмом группы G, то $[a]^b_{\beta_i} = [a^{\beta_i} b^{\beta_i}]$; а если β_i - антиэндоморфизмом группы G, то $[a]^b_{\beta_i} = [a^{\beta_i} b^{0}]$. От этого, для каждого i, $1 \leq i \leq n$, имеем

$$\begin{aligned}
[[a]^b_{\beta_i}]^{b^{\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n}} &= [[a^{\beta_i} b^{\beta_i'}]]^{b^{\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n}} \\
&= b^{-(\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n)}\, b^{-\beta_i'}\, a^{\beta_i}\, b^{\beta_i'}\, b^{\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n} \\
&= b^{-(\beta_i'+\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n)}\, a^{\beta_i}\, b^{\beta_i'+\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n} \\
&= [a^{\beta_i} b^{\beta_i'+\beta_{i+1}+\ldots+\beta_n}] .
\end{aligned}$$

Но тогда справедливость леммы 2 сразу следует из леммы 1.

2. Пусть дан Ω - квазимодуль G. Тогда множество

$$Z(G) =_{df} \{a\in G \mid \forall b\in G\ \forall\alpha,\beta\in \Omega\cup\{1\} = [a^{\alpha},b]_{\beta} = e\}$$

мы будем называть <u>центром</u> Ω - квазимодуля G.

По определению видно, что $Z(G) \leq Z^{gr}(G)$, где $Z^{gr}(G)$ обозначает центр группы G. Итак, каждый элемент из $Z(G)$ перестановочен с любым элементом из G; в частности, элементы из $Z(G)$ перестановочны между собой.

<u>Теорема 1.</u> Центр $Z(G)$ Ω - квазимодуля /унитарного/ является Ω - модулем /унитарным/ и является идеалом квазимодуля G.

<u>Доказательство.</u> Из Определения центра видно, что если $a\in Z(G)$ то $a^{\gamma}\in Z(G)$ при любом $\gamma\in\Omega$.

Пусть $a,\ c\in Z(G)$. Тогда при любых $b\in G$; $\alpha,\beta\in\Omega\cup\{1\}$ мы имеем

$$((ac)^{\alpha}b)^{\beta} = (c^{\alpha}a^{\alpha}b)^{\beta} = (c^{\alpha}(a^{\alpha}b))^{\beta} = (a^{\alpha}b)^{\beta}c^{\alpha\beta} =$$
$$= b^{\beta}a^{\alpha\beta}c^{\alpha\beta} = b^{\beta}(c^{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}) = b^{\beta}(ac)^{\alpha\beta},$$

т.е. $[(ac)^{\alpha},\ b]_{\beta} = e$, значит $ac\in Z(G)$. Здесь и в дальнейшем мы условимся $\alpha\ .\ 1 = 1\ .\ \alpha = \alpha$ при всяком $\alpha\in\Omega$.

Затем, если $a\in Z(G)$, то для любого $\alpha\in\Omega\cup\{1\}$, $(a^{-1})^{\alpha}a^{\alpha} = (aa^{-1})^{\alpha} = e^{\alpha} = e$, т.е. $(a^{-1})^{\alpha} = a^{-\alpha}$. Но тогда для любых $b\in G,\ \alpha\in\Omega,\ \beta\in\Omega\cup\{1\}$, $[(a^{-1})^{\alpha},\ b]_{\beta} = [a^{-\alpha},\ b]_{\beta} = e$. Потом, по определению центра, для любых $b\in G,\ \beta\in\Omega\cup\{1\}$ имеем

$$e = [a,\ a^{-1}b]_{\beta} = a^{-\beta}(a^{-1}b)^{-\beta}b^{\beta},\ \text{т.е.}\ b^{-\beta}(a^{-1}b)^{\beta} = a^{-\beta}$$

Но тогда $[a^{-1},\ b]_{\beta} = (a^{-1})^{-\beta}b^{-\beta}(a^{-1}b)^{\beta} = a^{\beta}b^{-\beta}(a^{-1}b)^{\beta} = a^{\beta}a^{-\beta} = e$.
Итак мы доказали, что $[(a^{-1})^{\alpha},b]_{\beta} = e$ при любых $b\in G$,

$\alpha,\beta\in\Omega\cup\{1\}$, значит $a^{-1}\in Z(G)$.

Так как элементы из $Z(G)$ перестановочны между собой то для любых $a,\ c\in Z(G),\ \alpha\in\Omega$ имеем $(ac)^{\alpha} = c^{\alpha}a^{\alpha} = a^{\alpha}c^{\alpha}$. Таким образом $Z(G)$ является подквазимодулем квазимодуля G и Ω - модулем. Конечно, если G унитарен, то $Z(G)$ также унитарен.

Наконец, так как для любых $a\in Z(G),\ b\in G,\ \beta\in\Omega\cup\{1\}$, имеем $[a,b]_{\beta} = e$, т.е. $b^{-\beta}(ab)^{\beta} = a^{\beta}\in Z(G)$ то $Z(G)$ является идеалом квазимодуля G . Теорема доказана.

Обобщая понятия центра квазимодуля мы приходим к понятию централизатора. Пусть даны два подквазимодуля A , B Ω - квазимодуля G . Тогда

$$Z_A(B) =_{df}\{a\in A \mid \forall b\in B\ \forall\alpha,\beta\in\Omega\cup\{1\} = [a^{\alpha},\ b]_{\beta} = e\}$$

называется <u>централизатором</u> подквазимодуля B в подквазимодуле A .

Очевидно, что $Z_A(B) \le Z_A^{gr}(B)$, где $Z_A^{gr}(B)$ есть централизатор подгруппы B в подгруппе A . Для рассматривания $Z_A(B)$ необходима следующая лемма .

<u>Лемма 3.</u> Если Ω -квазимодуль G удовлетворяет условию

(1.) Аддитивная группа кольца Ω обладает системой Σ обозначающих, которая состоит из эндоморфизмов группы G ,

то для любых $a\in G$, $\alpha\in\Omega$ имеем

$$(a^{-1})^{\alpha} = a^{-\alpha}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $a\in G$, $\alpha\in\Omega$. Ввиду условия (1), α должен представиться в виде $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ при $\alpha_i\in\pm\Sigma$, $i = 1,\ 2,\ldots,\ n$. Где $+\Sigma = \Sigma$, $-\Sigma = \{-\delta \mid \delta\in\Sigma\}$. Но тогда имеем

$$(a^{-1})^{\alpha}=(a^{-1})^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} = (a^{-1})^{\alpha_1}(a^{-1})^{\alpha_2}\ldots(a^{-1})^{\alpha_n} =$$
$$= (a^{\alpha_1})^{-1}(a^{\alpha_2})^{-1}\ldots(a^{\alpha_n})^{-1} = a^{-\alpha_1}a^{-\alpha_2}\ldots a^{-\alpha_n} =$$
$$= a^{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} = a^{-\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1), а A, B - два произвольных подквазимодуля квазимодуля G, то $Z_A(B)$ будет подквазимодулем квазимодуля G.

Доказательство. По определению видно, что из $a\in Z_A(B)$ следует $a^{\gamma}\in Z_A(B)$ при любом $\gamma\in\Omega$.

Пусть $a, c\in Z_A(B)$, $b\in B$, $\gamma\in\Omega\cup\{1\}$. Ввиду (1), $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n$, где $\gamma_i\in\pm\sum\cup\{1\}$. Мы имеем

$$[(ac)^{\gamma}]^{b} = b^{-1}(ac)^{\gamma}b = b^{-1}(ac)^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n}b =$$
$$= b^{-1}(ac)^{\gamma_1}(ac)^{\gamma_2}\ldots(ac)^{\gamma_n}b.$$

Заметим, что при $\gamma_i\in\sum\cup\{1\}$, то $(ac)^{\gamma_i} = a^{\gamma_i}c^{\gamma_i}$; при $(ac)^{\gamma_i}=c^{\gamma_i}a^{\gamma_i}$, то $(ac)^{\gamma_i}=c^{\gamma_i}a^{\gamma_i}$; а элементы $a^{\gamma_i}, c^{\gamma_j} (i,j=1,\ldots,n)$ перестановочны между собой и с b. Таким образом

$$[(ac)^{\gamma}]^{b} = (ac)^{\gamma}.$$

Пусть теперь $\alpha,\beta\in\Omega\cup\{1\}$, $\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ при $\beta_i\in\pm\sum\cup\{1\}$. Из только что доказанного и леммы 2 следует

$$[(ac)^{\alpha}]^{b}_{\beta} = [(ac)^{\alpha\beta_1}]^{b^{\beta_1'+\beta_2+\ldots+\beta_n}}\cdot[(ac)^{\alpha\beta_2}]^{b^{\beta_2'+\beta_3+\ldots+\beta_n}}\ldots[(ac)^{\alpha\beta_n}]^{b^{\beta_n'}} =$$
$$= (ac)^{\alpha\beta_1}(ac)^{\alpha\beta_2}\ldots(ac)^{\alpha\beta_n} = (ac)^{\alpha\beta_1+\alpha\beta_2+\ldots+\alpha\beta_n} =$$
$$= (ac)^{\alpha(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)} = (ac)^{\alpha\beta},$$

т.е. $[(ac)^{\alpha},b]_{\beta} = e$, значит $ac\in Z_A(B)$.

Пусть $a\in Z_A(B)$, $b\in B$. Прежде всего при $\alpha\in\Omega$, $\beta\in\Omega\cup\{1\}$ имеем по лемме 3

$$[(a^{-1})^{\alpha}, b]_{\beta} = [a^{-\alpha}, b]_{\beta} = e .$$

Затем, если $\beta\in\Omega$, $\beta = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, при $\beta_i\in \pm\Sigma$, то, по лемме 2, имеем

$$[a^{-1}]^{b}_{\beta} = [a^{-\beta_1}]^{b^{\beta'_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}} [a^{-\beta_2}]^{b^{\beta'_2+\beta_3+\ldots+\beta_n}} \ldots [a^{-\beta_n}]^{b^{\beta'_n}} =$$

$$= a^{-\beta_1} a^{-\beta_2} \ldots a^{-\beta_n} = a^{-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)} = a^{-\beta} ,$$

т.е. $[a^{-1}, b]_{\beta} = e$. Наконец, видно, что $[a^{-1},b]=ab^{-1}a^{-1}b=e$. Итак, мы доказали, что $[(a^{-1})^{\alpha},b]_{\beta} = e$ при любых $b\in B$; $\alpha, \beta\in\Omega\cup\{1\}$. Но это значит $a^{-1}\in Z_A(B)$.

Таким образом $Z_A(B)$ является подквазимодулем квазимодуля G . Теорема доказана.

Отношение между $Z_A(B)$ и $Z^{gr}_A(B)$ устанавливается следующей теоремой.

<u>Теорема 3.</u> Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) , A , B - два произвольных подквазимодуля квазимодуля G , то

$$\forall a\in G\ (a\in Z_A(B) \longleftrightarrow \forall\alpha\in\Sigma\cup\{1\} = a^{\alpha}\in Z^{gr}_A(B)) .$$

<u>Доказательство.</u> Видно, что если $a\in Z_A(B)$, то $\forall\alpha\in\Sigma\cup\{1\}$: $a^{\alpha}\in Z^{gr}_A(B)$. Обратно, пусть имеет место последнее . Тогда, ввиду (1) , легко видеть, что $\forall\alpha\in\Omega\cup\{1\}=a^{\alpha}\in Z^{gr}_A(B)$, отсюда, в частности, имеем $[a^{\alpha}]^{b} = a^{\alpha}$ для любых $b\in B$, $\alpha\in\Omega\cup\{1\}$. Теперь пусть $\beta\in\Omega$, $\beta = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ при $\beta_i\in \pm\Sigma$, $b\in B$. Тогда по лемме 2 и только что сказанному

$$[a^{\alpha}]^{b}_{\beta} = [a^{\alpha\beta_1}]^{b^{\beta'_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}}[a^{\alpha\beta_2}]^{b^{\beta'_2+\beta_3+\ldots+\beta_n}}\ldots[a^{\alpha\beta_n}]^{b^{\beta'_n}} =$$

$$= a^{\alpha\beta_1}a^{\alpha\beta_2}\ldots a^{\alpha\beta_n} = a^{\alpha\beta_1+\alpha\beta_2+\ldots+\alpha\beta_n} = a^{\alpha(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)} = a^{\alpha\beta}.$$

Итак мы доказали, что $[a^{\alpha},b]_{\beta} = e$ при любых $b \in B$, $\alpha,\beta \in \Omega \cup \{1\}$. Но это значит $a \in Z_A(B)$. Теорема доказана.

Так как $Z(G) = Z_G(G)$, из теоремы 3 следует

Следствие 1. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1), то

$$\forall a \in G\ (a \in Z(G) \leftrightarrow \forall \alpha \in \Sigma \cup \{1\} : a^{\alpha} \in Z^{gr}(G)).$$

Как увидим в дальнейшем, вообще $Z_A(B) \neq Z_A^{gr}(B)$, даже в том случае, когда G удовлетворяет (1). Следующее следствие дает одно достаточное уловие для $Z_A(B) = Z_A^{gr}(B)$.

Следствие 2. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) и

(2) $\forall a,b \in G\ \forall \alpha \in \Omega = b^{-1}a^{\alpha}b = (b^{-1}a\,b)^{\alpha}$,

то для любых подквазимодулей A, B имеем $Z_A(B) = Z_A^{gr}(B)$. В частности, мы всегда имеем $Z(G) = Z^{gr}(G)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $Z_A^{gr}(B) \le Z_A(B)$. Пусть $a \in Z_A^{gr}(B)$. Тогда для любого $b \in B$

$$b^{-1}\,a\,b = a.$$

Отсюда, ввиду (2), для любого $\alpha \in \Omega \cup \{1\}$

$$b^{-1}\,a^{\alpha}\,b = (b^{-1}\,a\,b)^{\alpha} = a^{\alpha},$$

значит $a^{\alpha} \in Z_A^{gr}(B)$, и следовательно, ввиду теоремы 3, $a \in Z_A(B)$, что и требовалось доказать.

3. Пусть A, B - два подквазимодуля Ω- квазимодуля G. Тогда

$$N_A(B) =_{df} \{a \in A \mid \forall b \in B\ \forall \alpha \in \Omega \cup \{\pm 1\}\ \forall \beta \in \Omega \cup \{1\} : [b]^{a^{\alpha}}_{\beta} \in B\}$$

называется нормализатором подквазимодуля B в подквазимодуле A. В частности, $N_G(B)$ называется нормализатором подквазимодуля B и обозначается $N(B)$.

Очевидно, что $N_A(B) \le N_A^{gr}(B)$, где $N_A^{gr}(B)$ - нормализатор подгруппы B в подготовке A.

Теорема 4. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1); A, B - два произвольных подквазимодуля, то $N_A(B)$ будет подквазимодулем квазимодуля G.

Доказательство. Прежде всего видно, что если $a \in N_A(B)$, то $a^\gamma \in N_A(B)$ при любом $\gamma \in \Omega$.

Затем, ввиду леммы 3, если $a \in N_A(B)$, то для любых $b \in B$, $\alpha \in \Omega \cup \{\pm 1\}$, $\beta \in \Omega \cup \{1\}$ имеем

$$[b]_\beta^{(a^{-1})^\alpha} = [b]_\beta^{a^{-\alpha}} \in B,$$

значит $a^{-1} \in N_A(B)$.

Пусть теперь $a, c \in N_A(B)$. Тогда при любом $b \in B$, если $\gamma \in \sum \cup \{1\}$, то

$$[b]^{(ac)^\gamma} = (ac)^{-\gamma} b (ac)^\gamma = c^{-\gamma} a^{-\gamma} b a^\gamma c^\gamma = [[b]^{a^\gamma}]^{c^\gamma} \in B;$$

а если $\gamma \in -\sum \cup \{-1\}$, то

$$[b]^{(ac)^\gamma} = (ac)^{-\gamma} b (ac)^\gamma = a^{-\gamma} c^{-\gamma} b c^\gamma a^\gamma = [[b]^{c^\gamma}]^{a^\gamma} \in B.$$

Затем, если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \pm \sum \cup \{\pm 1\}$, то, ввиду только что сказанного, имеем при любом $b \in B$

$$[b]^{(ac)^\alpha} = (ac)^{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} b (ac)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

$$= (ac)^{-\alpha_1}(ac)^{-\alpha_2}\ldots(ac)^{-\alpha_n} b (ac)^{\alpha_1}(ac)^{\alpha_2}\ldots(ac)^{\alpha_n}$$

$$= [\ldots][b]^{(ac)^{\alpha_1}}[^{(ac)^{\alpha_2}}\ldots]^{(ac)^{\alpha_n}} \in B.$$

Наконец, если $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$, $\beta_i \in \pm \sum \cup \{1\}$, то, из леммы 2 и только что доказанного следует, что при любых $b \in B$, $\alpha \in \Omega \cup \{\pm 1\}$

$$[b]_{\beta}^{(ac)^{\alpha}} = [b^{\beta_1}]^{(ac)^{\alpha(\beta_1'+\beta_2+\ldots+\beta_n)}} \cdot [b^{\beta_2}]^{(ac)^{\alpha(\beta_2'+\beta_3+\ldots+\beta_n)}} \ldots [b^{\beta_n}]^{(ac)^{\alpha\beta_n'}} \in B \ .$$

Но это значит $ac \in N_A(B)$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) , B - произвольный подквазимодуль, то $N(B)$ будет наибольшим подквазимодулем квазимодуля G , принимающим B в качестве идеала.

Доказательство. По теореме 4, $N(B)$ является подквазимодулем квазимодуля G . Затем, при любых $b\in B$, $a\in N(B), \beta\in\Omega\cup\{1\}$ имеем

$$a^{-\beta}\ (ba)^{\beta} = [b]_{\beta}^{a} \in B \ .$$

Но это значит, что B является идеалом $N(B)$.

Пусть теперь A - произвольный подквазимодуль квазимодуля G , принимающий B в качестве идеала. Тогда, если $a\in A$, то, при любых $b\in B$, $\alpha\in\Omega\cup\{\pm 1\}$, $\beta\in\Omega\cup\{1\}$, имеем

$$[b]_{\beta}^{a^{\alpha}} = (a^{\alpha})^{-\beta}\ (ba^{\alpha})^{\beta} \in B \ ,$$

значит $a\in N(B)$. Итак $A \le N(B)$. Теорема доказана.

Лемма 4. Пусть Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) , и A - произвольный подквазимодуль G . Тогда A будет идеалом квазимодуля G тогда и только тогда, когда он является нормальным делителем группы G .

Доказательство. Необходимость следует из определения идеала. Докажем достатосность. Пусть A - нормальный делитель группы. Тогда, при любых $a\in A$, $b\in G$ имеем $[a]^{b} \in A$. Затем, если $\beta = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, $\beta_i \in \pm\Sigma\cup\{1\}$, то, из леммы 2 и только что сказанного следует, что для любых $a\in A$, $b\in G$

$$[a]_{\beta}^{b} = [a^{\beta_1}]^{b^{\beta_1'+\beta_2+\ldots+\beta_n}} [a^{\beta_2}]^{b^{\beta_2'+\beta_3+\ldots+\beta_n}} \ldots [a^{\beta_n}]^{b^{\beta_n'}} \in A \ ,$$

Значит A является идеалом квазимодуля G, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1), а A, B - два произвольных подквазимодуля квазимодуля G, то $Z_A(B)$ будет идеалом Ω - квазимодуля $N_A(B)$.

Доказательство. По теоремам 2 и 4, $Z_A(B)$ и $N_A(B)$ являются подквазимодулями квазимодуля G. Пусть $a \in Z_A(B)$. Тогда, при любых $b \in B$, $\alpha \in \Omega \cup \{\pm 1\}$, $\beta \in \Omega \cup \{1\}$ имеем

$$b^{-\beta}[b]_{\beta}^{a^{\alpha}} = b^{-\beta}a^{-\alpha\beta}(ba^{\alpha})^{\beta} = a^{-\alpha\beta}b^{-\beta}(a^{\alpha}b)^{\beta} = [a^{\alpha}, b]_{\beta} = e,$$

т.е. $[b]_{\beta}^{a^{\alpha}} \in B$. Но это значит $a \in N_A(B)$, и следовательно $Z_A(B)$ является подквазимодулем квазимодуля $N_A(B)$.

Так как свойства (1) наследственно, то $N_A(B)$ также удовлетворяет (1). Но тогда для показания того, что $Z_A(B)$ является идеалом $N_A(B)$, ввиду леммы 4, только надо показать, что $Z_A(B)$ является нормальным делителем группы $N_A(B)$, т.е. показать, что для любых $a \in Z_A(B)$, $c \in N_A(B)$ имеет место $c^{-1}ac \in Z_A(B)$. Для этого, по теореме 3, достаточно показать, что

$$\forall \alpha \in \Sigma \cup \{1\} : (c^{-1}ac)^{\alpha} \in Z_A^{gr}(B).$$

Но последний факт верен потому, что при любом $b \in B$ имеем

$$b^{-1}(c^{-1}ac)^{\alpha}b = b^{-1}c^{-\alpha}a^{\alpha}c^{\alpha}b = (c^{\alpha}b)^{-1}a^{\alpha}(c^{\alpha}b) =$$

$$= (b_1c^{\alpha})^{-1}a^{\alpha}(b_1c^{\alpha}) = c^{-\alpha}b_1^{-1}a^{\alpha}b_1c^{\alpha} =$$

$$= c^{-\alpha}a^{\alpha}c^{\alpha} = (c^{-1}ac)^{\alpha},$$

где b_1 - надлежащий элемент из B. Теорема доказана.

4. Пусть G произвольный Ω - квазимодуль и A, B - два его подквазимодуля. По определению взаимным коммутантом подква-

зимодулей A и B, обозначаемым $[A, B]$, мы будем называть идеал подквазимодуля (A, B), порожденный множеством всех элементов вида $[a,b]_\alpha$, где $a \in A$, $b \in B$, $\alpha \in \Omega \cup \{1\}$. Здесь и в дальнейшем квазимодуль, порожденный множеством M обозначаем через (M).

Теорема 7. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) и (2); а A, B - два произвольных идеала G, то

$$H = ([a, b]_\alpha \mid a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in \Omega \cup \{1\})$$

будет идеалом квазимодулей G.

Доказательство. Прежде всего при любых $a, b, c \in G$; $\alpha \in \Omega \cup \{1\}$ имеем

$$c^{-1}[a, b]_\alpha c = [c^{-1}ac,\ c^{-1}bc]_\alpha .$$

В самом деле, используя (2) получаем

$$\begin{aligned} c^{-1}[a, b]_\alpha c &= c^{-1}a^{-\alpha}b^{-\alpha}(ab)^\alpha c = c^{-1}a^{-\alpha}c\ c^{-1}b^{-\alpha}c\ c^{-1}(ab)^\alpha c = \\ &= (c^{-1}ac)^{-\alpha}\ (c^{-1}bc)^{-\alpha}\ (c^{-1}abc)^\alpha = \\ &= (c^{-1}ac)^{-\alpha}\ (c^{-1}bc)^{-\alpha}\ (c^{-1}ac\ c^{-1}bc)^\alpha = [c^{-1}ac, c^{-1}bc]_\alpha \end{aligned}$$

Теперь, из только что доказанного ясно, что при любом образующем h из H имеем $c^{-1}hc \in H$ для всякого c из G. Затем, если h_1, h_2 - два произвольных элемента из H таких, что $c^{-1}h_ic \in H$, $i = 1, 2$, то имеем

$$c^{-1}h_1^{-1}c = (c^{-1}h_1c)^{-1} \in H \ ;$$

$$c^{-1}h_1h_2c = (c^{-1}h_1c)(c^{-1}h_2c) \in H \ ;$$

$$c^{-1}h_1^\alpha c = (c^{-1}h_1c)^\alpha \in H$$

где α - любой элемент из Ω. Итак мы доказали, что для любых $h \in H$, $c \in G$, $c^{-1}hc \in H$. Но это значит, по лемме 4, что H должен быть идеалом квазимодуля G, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) и (2), а A, B - два произвольных идеала квазимодуля G, то

$$[A, B] = ([a, b]_\alpha \mid a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in \Omega \cup \{1\}) .$$

В частности, когда $A = B = G$, мы имеем

$$[G, G] = ([a, b]_\alpha \mid a, b \in G;\ \alpha \in \Omega \cup \{1\}) .$$

Замечание. Для унитарных Z - квазимодулей, понятия подквазимодулея и идеала квазимодуля соответственно сводятся к понятиям подгруппы и нормального делителя группы; понятия центра, централизатора, нормализатора, взаимного коммутанта - к одноименным понятиям в теории групп; а условия (1) и (2) выполнены автоматически. Таким образом, применяя выше сформулированные утверждения к с лучаю унитарных Z - квазимодулей, мы получаем известные факты в теории групп. Например, для теоремы 1 имеем: центр любой группы G будет абелевой группой и будет нормальным делителем группы G; Для теоремы 5 имеем : нормализатор произвольной подгруппы B группы G будет наибольшей подгруппой группы G, принимающей B в качестве нормального делителя; или для теоремы 6 имеем : если A, B - две произвольные подгруппы группы G, то централизатор подгруппы B в подгруппе A будет нормальным делителем нормализатора подгуппы B в подгруппе A.

5. В утверждениях, сформулированных в этой заметке мы часто наложили на квазимодулях ограничения (1) и (2). Как мы уже отметили выше, унитарные Z - квазимодули обладают свойствами (1) и (2). Этими свойствами, очевидно, обладают и модули. В следующем примере покажем, что существуют квазимодули, обладающие свойствами (1) и (2), но не являющиеся ни унитарными Z - квазимодулями, ни модулями. Затем, так как свойства (1) и (2) определяются тождествами, то они инвариантны относительно операций взятия подквазимодулей, взятия гомоморфных образов и взятия декартова произведения. Это показывает, что класс квазимодулей со свойствами (1) и (2) довольно

широк, и следовательно, утверждения, сформулированные здесь достаточно сильны.

Пример 1. Рассмотрим мультипликативную группу G всех невырожденных матриц второго порядка с рациональными элементами. Если a - такая матрица, то ее определитель будет отличным от нуля рациональным числом и поэтому может быть написан в виде $\frac{\lambda}{t} 2^{n(a)}$, где числа λ, t нечетны, а число $n(a)$ целое. Из того, что определить произведения матриц равен произведению определителей, вытекает, что

$$n(ab) = n(a) + n(b)$$

для любых $a, b \in G$.

Определяем отображение $\alpha = G \to G$ следующим образом

$$a^{\alpha} =_{df} \begin{pmatrix} 1 & n(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Равенства

$$(ab)^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & n(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n(a)+n(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^{\alpha} . b^{\beta}$$

показывает, что α будет эндоморфизмом группы G.

Видно, что

$$z^{gr}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \text{ - отличное от нуля рациональное число} \right\}$$

Теперь, если на множестве

$$\Omega = \{(\alpha, n) \mid n \text{ целое} \}$$

определяем операции сложения и умножения следующим образом :

$$(\alpha, n) + (\alpha, m) = (\alpha, n+m) \quad ;$$

$$(\alpha, n) . (\alpha, m) = (\alpha, 0) ,$$

то легко проверить, что Ω будет коммутативным кольцом, аддитивная группа которого порождается элементом $(\alpha, 1)$.

Затем, для любых $a \in G$, $(\alpha, n) \in \Omega$ положим

$$a^{(\alpha, n)} = (a^{\alpha})^n$$

и заметим, что $a^{\alpha^2} = e$, где e - единичная матрица, то легко видеть, что G будет Ω - квазимодулем.

Так как

$$a^{(\alpha, 1)} = a^{\alpha} ,$$

то Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) при $\sum = \{(\alpha, 1)\}$.

По следствию 1, $a \in Z(G)$ тогда и только тогда, когда $a \in Z^{gr}(G)$ и $a^{(\alpha,1)} \in Z^{gr}(G)$, т.е. тогда и только тогда, когда $a \in Z^{gr}(G)$ и $n(a) = 0$. Таким образом имеем

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{t} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{t} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, t \text{ - нечетные числа} \right\} ,$$

значит $Z(G) \neq Z^{gr}(G)$, и следовательно, по следствию 2 , Ω - квазимодуль G не удовлетворяет (2) .

Одним словом, построенный нами Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) , не удовлетворяет (2) , не является ни унитарным Z - квазимодулем, ни модулем.

<u>Пример 2.</u> Пусть A, B - две произвольные некоммутативные группы. Положим

$$G = A \times B.$$

Затем, на множестве

$$\Omega \quad \{(p, g) \mid p, g \text{ - целые}\}$$

определяем операции сложения и умножения следующим образом:

$$(p,g) + (r, \lambda) = (p + r, g + \lambda) ,$$

$$(p,g) . (r, \lambda) = (pr, gr + p\lambda + g\lambda) .$$

Легко проверить, что Ω будет кольцом с единицей $(1, 0)$, а его аддитивная группа имеет систему образующих $\Sigma = \{(1,0),(0,1)\}$

Если для любых $(a,b)\in G$, $(p,g)\in\Omega$ положим

$$(a,b)^{(p,g)} = (a^{p+g}, b^{p}) ,$$

то, прямой проверкой, легко видеть, что будет унитарным Ω - квазимодулем.

Из

$$(a, b)^{(1,0)} = (a, b)$$

$$(a, b)^{(0,1)} = (a, e)$$

следует, что Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1) .

Затем имеем

$$(c,d)^{-1}(a,b)^{(p,g)}(c,d) = (c^{-1}a^{p+g}c, d^{-1}b^{p}d)=((c^{-1}ac^{\ p+g}, d^{-1}bd)^{p})=$$

$$=(c^{-1}ac,d^{-1}bd)^{(p,g)}=((c,d)^{-1}(a,b)(c,d)^{(p,g)},$$

значит Ω - квазимодуль G также удовлетворяет (2) .

Одним словом, Ω - квазимодуль G удовлетворяет (1), (2) , не является ни унитарным Z - квазимодулем, ни модулем.

Цитированная литература

|1| До Лонг Ван, Нгуен Куок Тоан. Квазимодули 1.

Ö s s z e f o g l a l ó

Kvázimodulok II.

Do Long Van – Nguen Kuok Toan

A szerző az előző cikkében definiált kvázimodulok tulajdonságait vizsgálja. Bevezeti a rész kvázi modulok speciális osztályait, és megmutatja, hogy a kvázimodulok elméletében azok ugyanazt a szerepet töltik be, mint a csoportelméletben a megfelelő részcsoportosztályok.

S u m m a r y

Quasimodules II.

Do Long Van – Nguen Kuok Toan

The author deals with properties of quasimodules defined in a previous paper. He introduces special classes of subquasimodules and demonstrates their roles in the theory of quasimodules being the same as those of the corrresponding subgroups in group theory.

SZÁMOK Repró. 72208203/203. A/4. 430 pld.