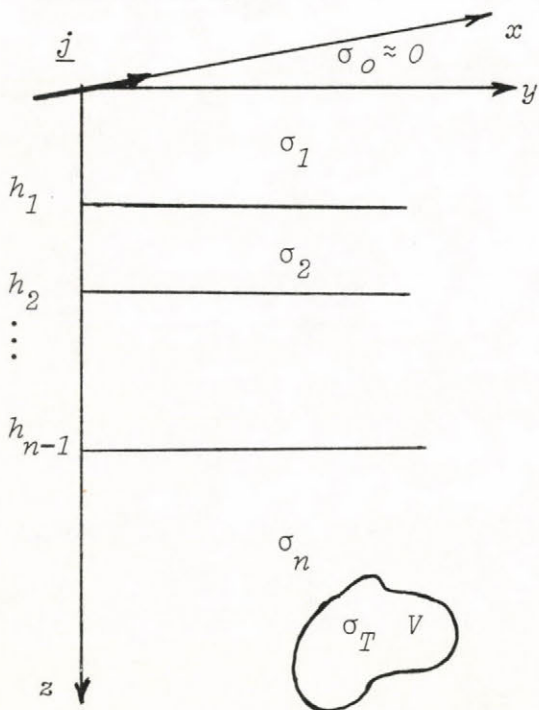


МЕТОД РАСЧЕТА АНОМАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ОТ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Р.Х. Фарзан

Рассматривается математическая модель распространения электромагнитного поля, возбуждаемого горизонтальным электрическим диполем, лежащим на поверхности Земли, в слоистой среде с неоднородностью конечных размеров V . Если поле изменяется по времени по закону $exp(-i\omega t)$, где $\omega = const$, с помощью преобразования Фурье система уравнений Максвелла сводится к системе векторных линейных дифференциальных эллиптических уравнений для векторов электрического и магнитного полей в трехмерной области с разрывными коэффициентами и с правой частью, представленной δ -функцией Дирака



для векторов электрического и магнитного полей в трехмерной области с разрывными коэффициентами и с правой частью, представленной δ -функцией Дирака

$$/1/ \quad \begin{aligned} rot \underline{E} &= i\omega \mu_0 \underline{M}, \\ rot \underline{M} &= \sigma \underline{E} + \underline{j}, \end{aligned}$$

где μ_0 - магнитная проницаемость, σ - кусочно-постоянная проводимость тока, плотность распределения источников поля $\underline{j} = \{I \delta(\underline{R}), 0, 0\}$. На границах сред касательные составляющие векторов поля непрерывны.

Введем обозначения:

$$/2/ \quad \sigma_c(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < 0, \\ \sigma_1, & 0 < z < h_1, \\ \sigma_2, & h_1 < z < h_2, \\ \vdots, & \\ \sigma_n, & h_{n-1} < z; \end{cases} \quad \sigma(M) = \begin{cases} \sigma_c(z), & M \notin V, \\ \sigma_T, & M \in V. \end{cases}$$

Обозначим через $\underline{E}^{(n)}, \underline{H}^{(n)}$ /вектора "нормального" поля/ решение системы уравнений

$$\begin{aligned} /3/ \quad \operatorname{rot} \underline{E}^{(n)} &= i\omega\mu_0 \underline{H}^{(n)}, \\ \operatorname{rot} \underline{H}^{(n)} &= \sigma_c(z) \underline{E}^{(n)} + \underline{j}. \end{aligned}$$

Тогда остающаяся "аномальная" часть полного поля $\underline{E}^{(a)} = \underline{E} - \underline{E}^{(n)}$ и $\underline{H}^{(a)} = \underline{H} - \underline{H}^{(n)}$ есть решение системы

$$\begin{aligned} /4/ \quad \operatorname{rot} \underline{E}^{(a)} &= i\omega\mu_0 \underline{H}^{(n)}, \\ \operatorname{rot} \underline{H}^{(n)} &= \sigma_c(z) \underline{E}^{(a)} + (\sigma(M) - \sigma_c(z)) \underline{E}. \end{aligned}$$

Система /3/ есть система уравнений для слоистой среды без аномалий. Ее решение считаем известным [1, 2]. Из /4/ видно, что эту систему тоже можно рассматривать как систему уравнений для слоистой среды с плотностью распределения "аномальных" электрических источников

$$/5/ \quad \underline{j}^{(a)} = (\sigma(M) - \sigma_c(z)) \underline{E}.$$

Видно, что $\underline{j}^{(a)}$ для $M \notin V$. Следовательно, для решения этой системы нужно знать полное электрическое поле в точках тела V .

Пусть $\underline{j}^{(x)}$ - источник электрического поля единичной мощности - диполь, параллельный оси Ox и расположенный в точке M_0

$$(M_0 \in V): \quad \underline{j}^{(x)} = \{\delta(R_{MM_0}, 0, 0\}^T, \quad R_{MM_0} = \overrightarrow{M_0 M}.$$

Пусть $\underline{E}^{(x)}$ - поле, возбуждаемое этим источником в точке M :

$$\underline{E}^{(x)}(M, M_0) = \{E_x^{(x)}, E_y^{(x)}, E_z^{(x)}\}^T.$$

Заметим, что это - решение системы уравнений для слоистой среды с погруженным источником, и эту проблему также считаем решенной [3].

Аналогично получаются поля $\underline{E}^{(y)}$ и $\underline{E}^{(z)}$. Компоненты этих векторов составляют фундаментальную матрицу электрического поля

$$/6/ \quad \hat{E}(M, M_0) = \begin{Bmatrix} E_x^{(x)} & E_x^{(y)} & E_x^{(z)} \\ E_y^{(x)} & E_y^{(y)} & E_y^{(z)} \\ E_z^{(x)} & E_z^{(y)} & E_z^{(z)} \end{Bmatrix} .$$

Электрическое аномальное поле, возбуждаемое источником $\underline{j}^{(a)}$ выразится тогда интегралом

$$/7/ \quad \underline{E}^{(a)}(M) = \int \int \int_{M_0 \in V} \hat{E}(M, M_0) \underline{j}^{(a)}(M_0) dV_{M_0} .$$

Выражение /7/, после подстановки /5/ можно переписать в виде:

$$/8/ \quad \underline{E}(M) + (\sigma_c - \sigma_T) \int \int \int_{M_0 \in V} \hat{E}(M, M_0) \underline{E}(M_0) dV_{M_0} = \underline{E}^{(n)}(M_0)$$

где первая часть известна. Если $M \in V$, то мы получаем интегральное векторное уравнение, причем под интегралом - сингулярная при $M_0 = M$ функция. Для численного решения этого уравнения область V разбиваем на элементы V_i , $i=1, \dots, N$, внутри которых электрическое поле \underline{E} можно считать приближенно постоянным и равным его значению в некоторой точке $M_i \in V_i$. Тогда интегральное уравнение /8/ в точках M_i переписется в виде:

$$\underline{E}(M_i) + (\sigma_c - \sigma_T) \sum_{j=1}^N \int \int \int_{M_0 \in V_j} \hat{E}(M_i, M_0) dV_{M_0} \cdot \underline{E}(M_j) = \underline{E}^{(n)}(M_i), \quad i=1, \dots, N;$$

или, вводя обозначение

$$/9/ \quad \hat{\alpha}_{ij} = (\sigma_c - \sigma_T) \int \int \int_{M_0 \in V_j} \hat{E}(M_i, M_0) dV_{M_0}$$

получим

$$/10/ \quad \underline{E}(M_i) = \sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_{ij} \underline{E}(M_j) = \underline{E}^{(n)}(M_i), \quad i=1, \dots, N.$$

Поскольку мы считаем известной матрицу \hat{E} , матрица $\hat{\alpha}_{ij}$ также известна. При известных $\hat{\alpha}_{ij}$ система /10/ представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решив которую можно определить электрическое поле в точках тела V . Затем, по формуле /5/ определив распределение аномальных источников, решаем систему /4/ для аномального поля. Вместе с нормальным полем это дает возможность определить полное электрическое и магнитное поле во всех точках пространства.

Элементы матрицы \hat{E} /6/, как известно /3/, выражаются через интегралы по бесконечному пределу от выражения, содержащего функцию Бесселя. Таким образом, элементы матрицы $\hat{\alpha}_{ij}$ /9/ есть четверные интегралы. Общее число скалярных уравнений - $3N$, число элементов всех матриц $\hat{\alpha}_{ij} - 9N^2$. Таким образом, при численном решении машинное время при увеличении N возрастает очень быстро.

В случае $i = j$ это усложняется тем, что под интегралом появляется неинтегрируемая сингулярность. Для вычисления этого интеграла предлагается следующий прием [4]. Из матрицы \hat{E} выделяется часть $\hat{E}^{(0)}$, соответствующая электрическому полю в однородном пространстве с электрической проводимостью $\sigma = \sigma_n$. Оказывается, что именно эта часть содержит в себе сингулярность полной матрицы \hat{E} . Оставшаяся после выделения часть $\hat{E}^{(1)}$ выражает влияние неоднородности пространства и уже не содержит особенностей, и соответствующая ей матрица $\hat{\alpha}_{ii}^{(1)}$ вычисляется так же, как $\hat{\alpha}_{ij}$ в случае $i \neq j$.

Электрическое поле в однородном пространстве выражается в явном виде, и матрицу $\hat{E}^{(0)}$ можно записать

$$/11/ \quad \hat{E}^{(0)} = \begin{pmatrix} U + \frac{1}{k_n^2} U''_{xx} & \frac{1}{k_n^2} U''_{xy} & \frac{1}{k_n^2} U''_{xz} \\ \frac{1}{k_n^2} U''_{xy} & U - \frac{1}{k_n^2} U''_{yy} & \frac{1}{k_n^2} U''_{yz} \\ \frac{1}{k_n^2} U''_{xz} & \frac{1}{k_n^2} U''_{yz} & U + \frac{1}{k_n^2} U''_{zz} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ik_n R}}{R}, \quad k_n^2 = i\omega\mu_0\sigma_n, \quad R = |M_0 M|$$

Поскольку, например,

$$\frac{1}{k_n^2} U''_{xx} = \frac{e^{-ik_n R}}{4\pi R \cdot \sigma_n} \left\{ \frac{-k_n^2 R^2 - 3ik_n R + 3}{R^2} \cdot \frac{x^2}{R^2} + \frac{ik_n R - 1}{R^2} \right\},$$

то видно, что при $R \rightarrow 0$ получается неинтегрируемая особенность. Запишем $\hat{\alpha}_{ii}^{(0)}$ в виде

$$/12/ \hat{\alpha}_{ii}^{(0)} = (\sigma_n - \sigma_T) \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \iiint_{V_r} \hat{E}^{(0)} dV + \lim_{r \rightarrow 0} \iiint_{V_i - V_r} \hat{E}^{(0)} dV \right\}$$

где V_r - шар радиуса r с центром в M_i . Можно показать [4], используя теорию потенциала [5], что первый интеграл

$$/13/ \hat{q}_1 = \sigma_n \lim_{r \rightarrow 0} \iiint_{V_r} \hat{E}^{(0)} dV = -\frac{1}{3} \hat{I}$$

где \hat{I} - единичная матрица. Второй интеграл

$$/14/ \hat{Q}_1 = \sigma_n \lim_{r \rightarrow 0} \iiint_{V_i - V_r} \hat{E}^{(0)} dV$$

особенностей содержать не будет. В случае тел с центральной симметрией /шар, куб, эллипсоид, прямоугольный параллелепипед и т.д./ эта матрица также будет диагональной, а для шара и куба будет иметь вид:

$$/15/ \hat{Q}_1 = Q_1 \cdot \hat{I}.$$

В частности, для шара радиуса R_0 получим в явном виде:

$$Q_1 = \frac{2}{3} [(1 - ik_n R_0) \exp(ik_n R_0) - 1].$$

Заметим также, что для симметричных тел матрица $\hat{\alpha}_{ii}^{(1)}$ также является диагональной:

$$/16/ \hat{\alpha}_{ii}^{(1)} = \frac{\sigma_n - \sigma_T}{\sigma_n} \begin{pmatrix} Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Были проведены расчеты для двухслойной среды ($n=2$) для шара и для куба одинакового объема и вычислены Q_1, Q_2 при различных ξ :

$$\xi^2 = \frac{8\pi^2}{h^2 \omega \mu_0 \sigma_1}, \quad h = h_1.$$

Расчеты проводились для следующих значений параметров:

объем тела $h^3 \cdot 0.064$:
 глубина залегания центра тела $2h$:
 отношение электрических проводимостей: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 100, \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = 10.$

Результаты расчетов приведены на Табл. 1. и 2.

ТАБЛИЦА 1: Значения Q_1 для шара и куба

	шар	куб
5	-0,00039593 + 0,0060568	-0,0003948 + 0,0059552
10	-0,000051498 + 0,0015673	-0,000051607 + 0,0015419
30	-0,0000024637 + 0,00017807	-0,0000022865 + 0,00017526
100	-0,0000006358 + 0,00001615	-0,00000040412 + 0,00001589
300	-0,0000001987 + 0,000001798	-0,00000034172 + 0,000001770
1000	-0,0000006755 + 0,0000001616	-0,00000033236 + 0,0000001591

ТАБЛИЦА 2: Значения Q_2 для шара и куба

	шар	куб
5	-0,025794 + 0,0050821	-0,023618 + 0,0043654
10	-0,0076815 + 0,015885	-0,0073779 + 0,014328
30	0,0095096 + 0,004545	0,0082985 + 0,004145
100	0,010316 + 0,0004383	0,0090272 + 0,0004012
300	0,010323 + 0,0004383	0,0090272 + 0,0004012
1000	0,010323 + 0,000048222	0,0090339 + 0,000043995

Результаты показывают, что во-первых, при выделении $\hat{\alpha}_{ii}^{(o)}$ мы действительно выделяем главную часть, т.к. оставшаяся часть по абсолютной величине намного меньше главной части. Более того, в $\hat{\alpha}_{ii}^{(o)}$ основную роль играет вклад поля вблизи источника ($|q_1| \gg |Q_1|$).

Далее, если q_1 определяет само наличие аномального источника данного объема, то Q_1 характеризуется конкретной конфигурацией локального тела, служащего источником. Оказывается, конкретная конфигурация не играет существенной роли. Различие между

значениями полных матриц $\hat{\alpha}_{ii}$ для шара и куба очень мало. Поэтому, если иметь в виду конечную цель - решение обратной задачи, то очевидно, что на основании измерений компонентов поля на поверхности невозможно различить эти два тела. Следовательно, возможно выделять тела определенного объема и формы /компактные, вытянутые и т.д./, но не конкретной конфигурации.

Из этого же незначительного различия между шаром и кубом одинакового объема следует, что при численном интегрировании при разбиении тела V на элементы V_i не важно, какую конкретную конфигурацию придать элементам V_i , и можно выбирать ее исходя из соображения упрощения вычисления элементов $\hat{\alpha}_{ii}$ - четверных интегралов.

Изложенные результаты получены совместно с проф. В.И. Дмитриевым /Москва/.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В.И. Дмитриев: Электромагнитное поле в неоднородных средах. МГУ, Труды Вычислительного центра . Москва, 1969.
2. Э.А. Федорова, Р.Х. Фарзан: Методы и алгоритмы численного исследования электромагнитных полей в слоистых средах. Сб. "Математические модели электромагнитной разведки в геофизике". Изд. Будапештского Университета им. Этвеша Лоранда. Будапешт, 1980.
3. Д. Молнарка, Т.Г. Павлова: Методы расчета электромагнитного поля источника, погруженного в слоистую среду. Там же.
4. В.И. Дмитриев, Р.Х. Фарзан: Методы расчета аномального электромагнитного поля от локальной неоднородности. Там же.
5. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.: Уравнения математической физики. Москва, "Наука", 1972.