MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 26/1982

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Й. Тереки

1. Хорошо известная теорема Лагранжа - Дирихле гласит, что положение равновесия консервативной механической системы устойчиво, если потенциальная энергия имеет строгий минимум в этом положении равновесия. Проблема обратимости этой теоремы в общем случае пока не решена. Она решена В.П. Паламодовом в том случае, когда потенциальная энергия является аналитической функцией и число степеней свободы системы равно 1 или 2 [2].

Проблема не решена и в том случае, если на систему помимо потенциальных сил действуют и диссипативные силы с полной диссипацией. Если положение равновесия изолировано, то оно устойчиво тогда и только тогда, если потенциальная энергия имеет минимум в положении равновесия [7] . Однако, если положение равновесия не изолировано, то только при дополнительных условиях известна его устойчивость по части или по всем переменным [1, 5].

Здесь мы ограничиваемся случаем, изученным В.П. Паламодовом, предполагая, что на систему действуют и диссипативные силы. Мы дадим необходимые и достаточные условия для устойчивости положений равновесия.

2. Пусть даны функции $T : R^2 x R^2 \to R$, $\Pi : R^2 \to R$, $Q : R x R^2 x R^2 \to R^2$ со следующими условиями: $T(u,v)=\frac{1}{2}(A(u)v,v)$, где $A(u)$ симметрическая определенно положительная матрица при всех $\|u\| < H$ $(u \in R^2,\ H>0)$ и предположим, что ее элементы имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. $\Pi(u)$ аналитична при $\|u\| < H$, $\Pi(0)=0$ и $\frac{\partial \Pi(0)}{\partial u}=0$. $Q(t,u,v)$ - - непрерывная функция, удовлетворяющая локальному условию Лип-

шица по u и v, кроме того

$$\| Q(t,u,v)\| \leq c_1 \| v\| \qquad (t\geq 0, \| u\| <H, \ v\in R^2),$$

$$(Q(t,u,v),v)\leq -c_2 \| v\|^2 \qquad (t\geq 0, \| u\| <H, \ v\in R^2),$$

где $c_1, c_2 > 0$ - постоянные.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$/1/ \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(x,\dot{x})}{\partial v}\right)- \frac{\partial T(x,\dot{x})}{\partial u} = - \frac{\partial \Pi(x)}{\partial u} + Q(t,x,\dot{x}),$$

представляющую собой уравнения движений голономной механической системы со стационарными связями под действием диссипативных сил Q /T и Π - кинетическая и потенциальная энергии/. Легко видеть, что $Q(t,u,0)\equiv 0$, следовательно $x=\dot{x}=0$ является положением равновесия системы /1/.

Определение. Положение равновесия $x=\dot{x}=0$ системы /1/ называется равномерно устойчивым, если для всех $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из $\| x_o\| +\| \dot{x}_o\| <\delta$ следуют неравенства

$$\| x(t;t_o,x_o,\dot{x}_o)\| < \varepsilon \qquad (t\geq t_o\geq 0),$$

$$\| \dot{x}(t;t_o,x_o,\dot{x}_o)\| < \varepsilon \qquad (t\geq t_o\geq 0).$$

Теорема 1. Положение равновесия $x=\dot{x}=0$ системы /1/ является устойчивым тогда и только тогда, если $\Pi(u)\geq 0$ в малой окрестности $u=0$. В случае устойчивости

$$\dot{x}(t;t_o,x_o,\dot{x}_o) \to 0, \quad x(t;t_o,x_o,\dot{x}_o) \to \text{const.} \quad (t\to\infty)$$

при малых $\| x_o\|$, $\| \dot{x}_o\|$.

Имеется пример, который показывает, что теорема 1 перестает быть верной, если $\Pi(u)$ не аналитична 4 .

3. В качестве примера можно привести движение материальной точки по поверхности $z=f(x,y)$ в пространстве $Oxyz$ под влиянием силы тяжести $\vec{F}=(0,0,-mg)$ и силы трения, направление которой противоположно скорости и ее величина пропорциональна скорости. В этом случае

$$T(u,v)=\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2+v_2^2+\left(\frac{\partial f(u_1,u_2)}{\partial x}\,v_1+\frac{\partial f(u_1,u_2)}{\partial y}\,v_2\right)^2\right),$$

$$\Pi(u)=mgf(u_1,u_2)\qquad Q(t,u,v)=-\mu\frac{\partial T(u,v)}{\partial v},$$

где $u=(u_1,u_2)^T$, $v=(v_1,v_2)^T$ и $\mu>0$ - постоянная. Очевидно, что материальная точка находится в покое на поверхности в тех местах, где градиент функции $f(x,y)$ уничтожается.

Предполагаем, что $f(x,y)$ является аналитической функцией. Для этого движения имеет место:

Следствие. Положение равновесия $x=x_o$, $y=y_o$ материальной точки, движущейся по поверхности $z=f(x,y)$, устойчиво тогда и только тогда, если $f(x,y)$ имеет минимум, необязательный строгий, в точке $x=x_o$, $y=y_o$.

Отметим, что эта задача в частном случае $f(x,y)=y^2(1+x^2)$ была исследована в работах [3, 6], но в этих работах исследована устрйчивость только относительно y и скоростей.

4. Для доказательства теоремы 1 нам нужно было обобщить классическую теорему А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. Наше обобщение можно сформулировать для произвольных систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, записанных в виде

$$/2/\qquad \begin{aligned}\dot{x}&=X(t,x,y)\\ \dot{y}&=Y(t,x,y)\end{aligned}\qquad (t\geq 0,\ x\in R^n,\ y\in R^m),$$

где $X: R\times R^n\times R^m\to R^n$, $Y: R\times R^n\times R^m\to R^m$ - непрерывные функции при $t\geq 0$, $\|x\|<H$, $\|y\|<H$ $(H>0)$. Пусть $X(t,0,0)=0$, $Y(t,0,0)=0$ при $t\geq 0$. Предположим, что единственность решений обеспечена.

Пусть $V: R\times R^n\times R^m\to R$ непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные. Тогда $\dot V_{(2)}(t,x,y)$ определяется соотношением

$$\dot V_{(2)}(t,x,y)=\frac{\partial V(t,x,y)}{\partial t}+\left(\frac{\partial V(t,x,y)}{\partial x},\ X(t,x,y)\right)+\left(\frac{\partial V(t,x,y)}{\partial y},Y(t,x,y)\right).$$

<u>Теорема 2.</u> Допустим, что существуют непрерывные функции $V,W,f:R\times R^n\times R^m\to[0,\infty)$ такие, что V,W имеют непрерывные частные производные первого порядка и

(i) $V(t,0,0)=W(t,0,0)=f(t,0,0)=0$,

(ii) $a(\|y\|)+f^{\sigma}(t,x,y)\leq V(t,x,y)$,

(iii) $\dot V_{(2)}(t,x,y)\leqq -c_1 V^{1+\alpha}(t,x,y)$,

(iv) $\dot W_{(2)}(t,x,y)\leqq -c_2 W(t,x,y)+c_3 f(t,x,y)$,

(v) $\|Y(t,x,y)\| < c_4(W(t,x,y)+f(t,x,y))$

при $t\geqq 0$, $\|x\|<H$, $\|y\|<H$ где функция $a:[0,\infty)\to[0,\infty)$ строго возрастает, $a(0)=0$, c_i $(i=1,\dots,4)$, α,σ – неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству $\alpha\sigma<1$. Тогда решение $x=0, y=0$ системы /2/ равномерно устойчиво, и $x(t;t_0,x_0,y_0)\to\text{const.}$, $y(t;t_0,x_0,y_0)\to 0$ $(t\to\infty)$, если только $\|x_0\|$ и $\|y_0\|$ достаточно малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Озиранер А.С.: Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестник МГУ, 1972 : 1, 73-80.

2. Паламодов В.П.: Об устойчивости равновесия в потенциальном поле. Функциональный анализ и его приложения, 11 /1977/ : 4, 42-55.

3. Румянцев В.В.: Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. Прикл. мат. мех. 35 /1971/ : 1, 138-143.

4. Тереки Й. - Хатвани Л.: О частичной устойчивости и сходимости движений. Прикл. мат. мех. 45 /1981/ : 3, 428-435.

5. Hatvani J. A Generalization of the Barbashin-Krasovskij Theorems to the Partial Stability in Nonautonomous Systems. Coll. Math. Soc. János Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, 1979, p. 381-409.

6. Peiffer K. - Rouche N. Liapunov's Second Method Applied to Partial Stability, Journal de Mécanique, 8/1969/, 333-334.

7. Salvadori L. Sull'estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilitá del Routh. Ricerche Mat. 15 /1966/, 162-167.