MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 20/1978.

AZ M HATÁRÉRTÉK – LOGIKA MONOTON OSZTÁLYAIRÓL

Gárdos Éva

1. § Bevezetés

A határérték logika fogalmát Sz.V. Jablonszkij vezette be [13] 1958-ban. Ennek a fogalomnak a szükségessége a véges logikák [12] és a végtelen értékű [14] tanulmányozásánál merült fel. Ugyanis a végtelen értékű logikák kontinuum sok függvényt tartalmaznak, igy ezen logikák kezelése meglehetősen nehézkes. Ezért vetődött fel egy olyan logika fogalom szükségessége, amely megszámlálható sok függvényt tartalmaz és bizonyos értelemben modelljének lehetne tekinteni minden k-értékű logikának. Ellentétben a többértékű és végtelen értékű logikákkal, a határérték-logika modelljének sok realizációja van, pontosabban kontinuum sok páronként nem izomorf határérték-logika létezik [1].

A vizsgálatok elsősorban az ekvivalencia osztályokra irányulnak és minden egyes parciális rendezés alkalmával az is az érdeklődés középpontjában van, hogy létezik-e minimális és maximális elem. A legismertebb és legegyszerűbb ekvivalencia az izomorfizmus. A [6, 8, 13] munkákból ismerets, hogy létezik kontinuum sok páronként nem izomorf határérték-logika.

Bizonyitást nyert [1], hogy az ismert algebrai rendezések mellett nincs maximális és minimális elem. A [1, 11] dolgozatban logikai uton bevezetett parciális rendezés a határérték-logikák halmazát szintén ekvivalanes osztályokra bontják fel és ilyen parciális rendezés mellett már léteznek maximális és minimális határérték-logikák. Maximális abban az értelemben, hogy tartalmaz minden más határérték-logikát, minimális abban az értelemben, hogy benne van minden más határérték-logikában.

Sz.V. Jablonszkij [12]-ben megvizsgálta a k-értékű logika majdnem teljes osztályait. Ezeket az osztályokat részben ő és még sokan mások [4, 5, 7, 11, 12] tanulmányozták.

Dolgozatnak célja az általa megvizsgált osztályok egyes reprezentánsainak vizsgálata egy M maximális határérték-logikában a [12]-ben megadott módszer segitségével.

A k-értékű logikában véges sok majdnem teljes osztály van. Dolgozatunkban bebizonyitjuk, hogy az általunk vizsgált határérték-logikában kontinuum sok monoton majdnem teljes osztály van. Sikerült általánositanunk a Jablonszkij-féle monoton majdnem teljes osztályokat és a következő eredményeket kaptuk:

1.) az M határérték-logikában minden r lineáris rendezéshez tartozó monoton függvényosztály mejden teljes;

2.) az M határérték-logikának kontinuum sok majdnem teljes osztálya van, sőt már a lineáris rendezésre nézve monoton függvények majdnem teljes osztályainak a száma is kontinuum.

2. § Alapfogalmak

2.1. **Definició.** [4]

Legyen E_k egy tetszőleges k-elemű halmaz. Jelölje P_k^n $(n = 0,1,2,\ldots)$ az olyan n változós $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvények halmazát, amelyek változói és értékei az E_k halmaz elemei.

$P_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_k^n$ függvényhalmazt k-értékü logikának nevezzük. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$, $k \geqslant 2$.

2.2. **Definició.**

Ha a 2.1. definicióban szereplő E_k véges halmazt valamilyen $\aleph_0$ számosságú $E_{\aleph_0}$ halmazzal helyettesitjük, akkor az igy kapott $P_{\aleph_0}$ függvényhalmazt végtelenértékű logikának nevezzük.

$E_{\aleph_0}$ a továbbiakban mindig a nem negativ egész számok halmazát jelöli, azaz $E_{\aleph_0} = \{0,1,2,\ldots,n, n+1,\ldots\}$.

2.3. **Definició.** [6]

A $P_{\aleph_0}$ végtelenértékű logika P részhalmazát határérték-logikának nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

a.) P függvényosztályban csak megszámlálhatóan végtelen sok függvény van.

b.) minden természetes k számhoz $(k \geqslant 2)$ létezik olyan A_k függvényhalmaz $(A_k \subseteq P)$, amelyet homorf módon le lehet képezni a k-értékű logikára.

Legyen P határérték-logika, ϵ az $E_{\aleph_0}$ részhalmaza $(\epsilon \subset E_{\aleph_0})$ és $g(x_1,\ldots,x_n) \leftarrow P$.

2.4. **Definició.**

Jelölje $g_\epsilon(x_1,\ldots,x_n)$ azt a függvényt, amely az ϵ halmaz n-szeres szorzathalmazán egyenlő a $g(x_1,\ldots,x_n)$ függvénnyel és azonkivül 0.

A $g_\epsilon(x_1,\ldots,x_n)$ függvényt a $g(x_1,\ldots,x_n)$ függvény halmazra vonatkozó szükitésének nevezzük.

2.5. **Definició.**

Azt mondjuk, hogy a $A_k (A_k \subset P_{\aleph_0})$ függvényhalmaz a k-értékű logika modellje az $\epsilon_k = \{e_0, e_1,\ldots,e_{k-1}\}$ $(k \geqslant 2)$ halmazon $(\epsilon_k \subset E_{\aleph_0})$, ha az $[A_k]$ halmazban létezik olyan $f(x_1,x_2)$ függvény, hogy

$$f_{\epsilon_k}(x_1,x_2) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{ha } (x_1,x_2) \leftarrow \epsilon_k x \epsilon_k \text{ és } \max(x_1,x_2) = e_i, \\ & \text{ahol } 0 \leqslant i \leqslant k-2, \\ & \\ e_0, & \text{ha } (x_1,x_2) \leftarrow \epsilon_k x \epsilon_k \text{ és } \max(x_1,x_2) = e_{k-1}, \end{cases}$$

$(e_0 < e_1 < \ldots < e_{k-1})$.

Könnyü belátni, hogy ha A_k a k-érékű logika modellje ϵ_k halmazon, akkor az A_k függvényhalmazban van legalább egy olyan függvényhalmaz, amelynek a szükitése az ϵ_k halmazra izomorf a k-értékü logikával.

2.6. **Definició.**[2]

A véges ϵ_k részhalmazok rendszerét az A függvényhalmaz tartományának nevezzük és T_A-val jelöljük. Az $\epsilon_k = \{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ halmaz akkor és csak akkor tartozik a T_A tartományhoz, ha a k-értékű logika modellje az ϵ_k halmazon.

2.7. **Definició.** [2]

A P határérték-logikát növekvőnek nevezzük, ha a T_p tartománya tartalmaz olyan véges halmazok végtelen sorozatát $(\Pi = \{\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_i, \ldots\})$, amelyre igaz, hogy

$\epsilon_i \subset \epsilon_{i+1}$ $(i = 2,3, \ldots)$.

2.1. **Tétel.** [2]

A határérték-logika maximális akkor és csak akkor, ha növekvő. A szuperpozició, zártság a majdnem teljesség fogalmat hasonlóan értelmezzük, mint [12]-ben.

3. § Az M határérték - logika

Határozzuk meg a maximális határérték-logika egy M reprezentását, amelyet a továbbiakban tanulmányozni fogunk:

Definiáljuk a $\mu_k(x_1,x_2) \leftarrow P_{\aleph_0}$ $(k \geqslant 2)$ függvényt a következőképpen:

$$\mu_k(x_1,x_2) = \begin{cases} e, & \text{ha } (x_1,x_2) \leftarrow \epsilon_k x \epsilon_k \text{ és } \max(x_1,x_2) = e-1, \\ & \text{ahol } 1 \leqslant e-1 \leqslant k-1 \\ 1, & \text{ha } (x_1,x_2) \leftarrow \epsilon_k x \epsilon_k \text{ és } \max(x_1,x_2) = k, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Jelölje M_k a $\mu_k(x_1,x_2)$ függvényhalmaz lezártját

$([\{\mu_k(x_1,x_2)\}])$ és $M = [\bigcup_{k=2}^{\infty} M_k]$.

3.1. **Megjegyzés.**

Könnyű belátni, hogy M_k izomorf a P_k-val és hogy M határérték-logika.

3.2. **Megjegyzés.**

Illusztrációként megadjuk a $\mu_2(x_1,x_2)$, $\mu_3(x_1,x_2)$ illetve $\mu_k(x_1,x_2)$ függvényeket

x_1/x_2	0	1	2	3	4 . . . . .
0	0	0	0	0	0
1	0	2	1	0	
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	
4	0		0		0

$\epsilon_k = \{1,2\}$

$\mu_2(x_1,x_2)$

x_1/x_2	0	1	2	3	4	
0	0	0	0	0	0	
1	0	2	3	1		
2	0	3	3	1		0
3	0	1	1	1		
4	0				0	
			0			0

$\epsilon_k = \{1,2,3\}$

$\mu_3(x_1,x_2)$

x_1/x_2	0	1	2	3	4	$k-1$	k	$k+1$ . . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0 . . . .
1	0	2	3	4	5	k	1	
2	0	3	3	4	5	k	1	
3	0	4	4	4	5	k	1	
4	0	5	5	5	5	k	1	0
$k-1$	0	k	k	k	k	k	1	
k	0	1	1	1	1	1	1	
$k+1$	0				0			

$\epsilon_k = \{1,2, \ldots ,k\}$

$\mu_k(x_1,x_2)$

3.1. **Tétel.**

M hatarérték logika.

Bizonyitás.

A 2.3 definició alapján be kell látnunk, hogy

a.) M függvényosztályban csak megszámlálhatóan végtelen sok függvény van.

Mivel $M = [\bigcup_{k=2}^{\infty} M_k]$ ahol mindenegyes M_k függvényosztály megszámlálhatóan végtelen sok függvényt tartalmaz és ilyen függvényosztályunk megszámlálhatóan végtelen sok van, akkor az uniójuk is és a lezártjuk is megszámlálhatóan végtelen számosságu.

b.) Minden természetes k-számhoz ($k \geqslant 2$) létezik egy olyan függvényhalmaz, amely homomorf módon le lehet képezni a k-értékű logikára. Az állitás közvetlenül következik abból, hogy a $\mu_k(x_1,x_2)$ függvénynek kölcsönösen egyértelmüen megfeleltethetjük a

$W_k(x_1,x_2)$ Webb függvényt [5].

A továbbiakban legyen $\epsilon_k \subset E_{\aleph_0} \setminus 0$ részhalmaza, amelyről az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\epsilon_k = \{1,2,\ldots,k\}$.

.3.3. **Megjegyzés.**

Az M határérték-logika függvényei rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy $f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) = 0$.

3.2. **Tétel.**

M maximális határérték-logika.

Bizonyitás.

Az M határérték-logika maximalitása közvetlenül adódik abból, hogy : M növekvő a 2.7 Definició értelmében és igy a 2.1.Tétel miatt ez szükséges és elegendő feltétel arra, hogy az M határérték-logika maximális legyen.

4. §. Az M határérték-logika monoton függvényosztályai

Ebben a paragrafusban az M határérték-logika monoton osztályait vizsgáljuk. Bebizo nyitjuk, hogy az M monoton osztályai a P_k monoton osztályaihoz hasonlóak és számosságuk kontinuum. Sőt, az M határérték-logikában kontinuum sok monoton majdnem teljes osztály van, mig a k-értékü logikában véges sok.

4.1. **Megjegyzés.**

Természetszerüen nem az M függvényosztályról, hanem annak egy ϵ_γ halmazra való M_{ϵ_γ} megszoritásáról beszélünk (ez vonatkozik az $f(x_1,\ldots,x_n) \leftarrow M$ függvényekre is)

Ez nem megszoritás a tételekre.

Az ϵ_γ halmazt egy $f(x_1, \ldots, x_n) \leftarrow M$ függvényből kiindulva a következőképpen kapjuk:

1.) Jelölje α az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény által felvett értékek maximumát

2.) β az a legnagyobb érték, amely valamely szám n-esben előfordulva még nem ad 0-t $(f(\ldots, p, \ldots) \neq 0)$

3.) $\gamma = \max(\alpha, \beta)$, $\epsilon_\gamma = \{1, 2, \ldots, \gamma\}$, $(k \geqslant \gamma)$.

4.1. **Definició.**

$\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, ha $\alpha_i, \leqslant \beta_i$, ahol $\alpha_i, \beta_i \leftarrow E_k (i = 1, \ldots, n)$.

Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, \ldots, x_n) \leftarrow P_k (P_{\aleph_0})$ függvény monoton a lineáris rendezésre nézve, ha tetszőleges $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \leftarrow E_k (E_{\aleph_0}) \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ kombináció párra $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$.

4.2. **Megjegyzés.**

$<$ -val jelöljük az $1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1$ rendezést. A $<_r$ lineáris rendezésben a 0 legyen egy kitüntetett elem, amely egyetlen $E_{\aleph_0} \setminus 0$ elemmel sem összehasonlitható. Jelöljük $M^r_{\epsilon_k}$ -val az ϵ_k feletti r rendezéshez tartozó összes monoton függvények halmazát. Ekkor

$$M^r = \bigcup_{k=2}^{\infty} M^r_{\epsilon_k}.$$

Tekinteni fogunk egy tetszőleges lineáris rendezést és bebizonyitjuk, hogy ezen rendezésre nézve a monoton függvények majdnem teljesek és különböző lineáris rendezésekhez különböző majdnem teljes osztályok tartoznak.

4.3. **Megjegyzés.**

$M^r_{\epsilon_k}$ mindazon $f(x_1, \ldots, x_n) <_r$ szerint monoton függvények halmaza az M^r monoton függvényosztályból, amelyekre igaz, hogy $f(x_1, \ldots, e, \ldots, x_n) = 0$ ha $e \not\leftarrow \epsilon_k$.

4.1. **Tétel.**

Az $M^r_{\epsilon_k}$ és M^r függvényosztályok zártak.

Bizonyitás.

Helyettesitsünk a változók helyébe $<_r$ szerint monoton függvényeket.

Legyen

$$f_{\epsilon_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_{\epsilon_k}(g_{\epsilon_k,1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_{\epsilon_k,2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$$

$$\ldots, g_{\epsilon_k,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

ahol $g_{\epsilon_k}, g_{\epsilon_k,1}, g_{\epsilon_k,2}, \ldots, g_{\epsilon_k,m}$ függvények $<_r$ szerint monoton függvények. Megmutatjuk, hogy a f függvény szintén monoton függvény az $<_r$ rendezésre nézve. Vegyünk két sorozatot $\tilde{\alpha}$-t és $\tilde{\beta}$-t ugy, hogy $\tilde{\alpha} <_r \tilde{\beta}$. Világos, hogy a feltétel miatt

$g_{\epsilon_k,i}(\tilde{\alpha}) \leqslant_r g_{\epsilon_k,i}(\tilde{\beta}), \quad (i = 1,2, \ldots, m)$

ezért a

$$\{ g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\alpha}), \ldots, g_{\epsilon_k,2}(\tilde{\alpha}), \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\alpha}) \} \text{ és a } \{ g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\beta}), g_{\epsilon_k,2}(\tilde{\beta}), \ldots, \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\beta}) \}$$

sorozatok olyanok, hogy

$$\{ g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\alpha}) g_{\epsilon_k,2}(\tilde{\alpha}), \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\alpha}) \} \leqslant_r \{ g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\beta}), g_{\epsilon_k,2}(\tilde{\beta}), \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\beta}) \}$$

Innen a g_{ϵ_k} függvény monotonitása miatt kapjuk, hogy

$$f_{\epsilon_k}(\tilde{\alpha}) = g_{\epsilon_k}(g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\alpha}), \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\alpha})) \leqslant_r g_{\epsilon_k}(g_{\epsilon_k,1}(\tilde{\beta}), \ldots, g_{\epsilon_k,m}(\tilde{\beta})) = f_{\epsilon_k}(\tilde{\beta}).$$

Igy a vizsgált függvényosztály invariáns a szuperpozicióval szemben, tehát zárt osztály. A tétel be van bizonyitva.

Jelöljük $C^j_{\epsilon_k}(x)$-vel a következő függvényt:

x	0	1 .... k	$k+1$ ....
$C^j_{\epsilon_k}(x)$	0	j .... j	0 ....

4.4. **Megjegyzés.**

Ha $<_r \equiv <$ rendezéssel, azaz azonos a szokásos $1 < 2 < 3 \ldots$ lineáris rendezéssel, akkor az e szerint a rendezés szerinti ismert monoton függvények M^1 osztályát kapjuk.

A következő néhány tétel és lemma bizonyitásának gondolatmenete Sz. V. Jablonszkij [12]-ben a k-értékü logika megfelelő tételeinek a bizonyitása alapján történt.

4.2. **Tétel.**

Az $M^1_{\epsilon_k}$ *monoton függvények osztályát a* $\max_{\epsilon_k}(x_1, x_2)$ $\min_{\epsilon_k}(x_1, x_2)$, $C^j_{\epsilon_k}(x)$ $(j = 1,2, \ldots, k)$ *és az* $m^i_{\epsilon_k}(x)$ $(i = 2, \ldots, k)$ *függvények generálják (amelyek* $M^1_{\epsilon_k}$ *-beliek), ahol*

$$m^{i}_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad 1 \leqslant x > i \quad és \quad x \leftarrow \epsilon_k; \\ k, & ha \quad k \leqslant x \geqslant i \quad és \quad x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & különben. \end{cases}$$

Bizonyitás.

Könnyű belátni, hogy az előbb felsorolt függvények monotonok.

Definiáljuk a $z^{\widetilde{\alpha},\beta}_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n)$ függvényt a következőképpen:

$$z^{\widetilde{\alpha},\beta}_{\epsilon_k}(x_1 \ldots, x_n) = \begin{cases} \beta, & \text{ha} \quad \widetilde{x} > \widetilde{\alpha} \quad \text{és} \quad x_i \leftarrow \epsilon_k (i = 1,2, \ldots, n); \\ 1, & \text{ha} \quad \widetilde{x} \not> \widetilde{\alpha} \quad \text{és} \quad x_i \leftarrow \epsilon_k (i = 1,2, \ldots, n); \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\alpha_i \leftarrow \epsilon_k)$.

Nyilvánvaló, hogy

$$z^{\widetilde{\alpha},\beta}_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{\epsilon_k}(\beta, m^{\alpha_1}_{\epsilon_k}(x_1), \ldots, m^{\alpha_n}_{\epsilon_k}(x_n)).$$

Legyen $z_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n)$ egy tetszőleges $M^1_{\epsilon_k}$-beli monoton függvény, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$z_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\widetilde{\alpha}\ \epsilon_k} \{ z^{\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})}_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n) \}.$$

Ezzel a tétel be van bizonyitva.

4.1. **Lemma.**

Ha $z(x_1, \ldots, x_n) \leftarrow M_k$ nem monoton függvény, akkor c^j-k behelyettesitésének segitségével megkaphatjuk az egyváltozós nem monoton függvényt.

Bizonyitás

Elegendő, ha csak ϵ_k-beli elemeket tekintünk és igy a bizonyitás teljesen azonosan történik mint [12]-ben

4.2. **Definició.**

A B halmaz a $B_1, B_2, \ldots, B_e$ halmazok direk összege, azaz $B = B_1 + B_2 + \ldots + B_e$ ha

1.) $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_e$;

2.) B_i-k páronként idegenek $(i = 1,2, \ldots, l)$ azaz

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \text{ha } i \neq j$$

4.1. 1. **Lemma** [12] .

Ha a B^* *halmaz felbontható két* C *és* D *nem üres halmaz direkt összegére és* $\tilde{\gamma}^0 \epsilon C$, $\tilde{\delta} \epsilon D$, *akkor létezik két olyan elem* $\tilde{\gamma} \epsilon C$ *és* $\tilde{\delta} \epsilon D$, *hogy az egyik közvetlenül következik a másik után. Emellett, ha* $\tilde{\gamma}^0 <_r \tilde{\delta}^0$; *(vagy forditva* $\tilde{\gamma}^0 >_r \tilde{\delta}^0$), *akkor* $\tilde{\gamma}^0 \leqslant_r \tilde{\gamma} <_r \tilde{\delta} \leqslant_r \tilde{\delta}^0$, *(vagy forditva* $\tilde{\gamma}^0 \geqslant_r \tilde{\gamma} >_r \tilde{\delta} \geqslant_r \tilde{\delta}^0$).

Bizonyitás.

Lásd [12].

4.3. **Tétel.**

Az M^1 *monoton függvényosztály majdnem teljes az* M *határérték-logikában, ahhol* M^1 *tetszőleges lineáris rendezés szerint monoton függvények osztálya.*

Bizonyitás

Azt kell bizonyitani, hogy $[\{ f(x_1, \dots, x_n) \} \cup M^1] = M$. $f(x_1, \dots, x_n) \epsilon M^1$.

Legyen $k \geqslant \gamma$, ahol $\gamma = \max(\alpha,\beta)$; $\alpha = \max f\,(\tilde{x})$, β maximuma azon értékeknek, amelyekre $f(\dots, \beta, \dots) \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $f_{\epsilon_k}(x_1, \dots, x_n)$ függvény és az $M^1_{\epsilon_k}$ halmaz generálja a $[\{ \mu_k(x_1,x_2)\}] = M_k$ logikát, amely izomorf a P_k k-értékü logikával.

Tehát legyen

$$f_{\epsilon_k}(x_1, \dots, x_n) \not\leftarrow M^1_{\epsilon_k}.$$

Akkor a 4.1 Lemma szerint a $C^j_{\epsilon_k}$ függvények segitségével felépithetjük a $g_{\epsilon_k}(x)$ egy változótól függő nem monoton függvényt.

Tegyük fel, hogy $x = t$-re

$$g_{\epsilon_k}(t) > g_{\epsilon_k}(t+1) \quad (g(0) = 0).$$

$$k^1_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} t, & \text{ha } x = 1; \\ t+1, \text{ ha } x \neq 1 & \text{és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 \text{ különben.} \end{cases}$$

$$k^2_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \leqslant g(t+1) & \text{és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ k, \text{ ha } x > g(t+1) & \text{és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0, \text{ ha } x \not\leftarrow \epsilon_k \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy $k^1_{\epsilon_k}(x)$ és $k^2_{\epsilon_k}(x)$ monoton függvények, azaz $k^1_{\epsilon_k}(x)$, $k^2_{\epsilon_k}(x) \leftarrow M^1_{\epsilon_k}$ és

$$k^2_{\epsilon_k}(g_{\epsilon_k}(k^1_{\epsilon_k}(x)) = \begin{cases} k, & \text{ha } x = 1 \\ 1, & \text{ha } x \neq 1 \qquad \text{és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Igy $k^2_{\epsilon_k}(g_{\epsilon_k}(k^1_{\epsilon_k}(x))) \equiv j^1_{\epsilon_k}(x)$, ahol

$$j^i_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} k, & \text{ha } x = i \neq 0 \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 1, & \text{ha } x \neq i \qquad \text{és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Nézzük meg a következő függvényeket:

$$\phi^i_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < i \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ k, & \text{ha } x \geqslant i \text{ és } x \leftarrow k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\psi^i_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leqslant i \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 2, & \text{ha } x > i \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy $\phi^i_{\epsilon_k}(x)$, $\psi^i_{\epsilon_k}(x) \leftarrow M^1_{\epsilon_k}$,

Következésképpen nekünk a következő függvényeink vannak:

$C^j_{\epsilon_k}(x)$, $\max_{\epsilon_k}(x_1, x_2)$, $\min_{\epsilon_k}(x_1 x_2)$ és $j^i_{\epsilon_k}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

4.3.1 **Lemma.**

A $C^j_{\epsilon_k}(x)$, a $\max_{\epsilon_k}(x_1, x_2)$ és a $j^i_{\epsilon_k}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ teljesek M_k–ban $([\{\mu_k(x_1, x_2)\}] = M_k)$.

ahol

$$C^j_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} j, & \text{ha } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$j^i_{\epsilon_k}(x) = \begin{cases} k, & \text{ha } x = i \neq 0 \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 1, & \text{ha } x \neq i \text{ és } x \leftarrow \epsilon_k; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Bizonyitás.

A változók száma szerinti teljes indukcióval adjuk meg, ugy hogy az adott függvényrendszerekből megkaphatjuk tetszőleges M_k-beli függvényt.

Legyen $f(x_1, \ldots, x_n)$ egy tetszőleges függvény az M_k–ból.

1.) Ha f nem függ változótól, azaz a $C^j_{\epsilon_k}(x)$ $(j = 1,2, \ldots, k)$ függvény, akkor az állitás triviális, mivel a kiinduló rendszer tartalmazza j-ket $(j = 1,2, \ldots, k)$.

2.) Tegyük fel, hogy kiindulva a függvényrendszerből a szuperpozició segitségével, fel lehet épiteni az összes $M^1_{\epsilon_k}$-beli n-változós függvényt. Megmutatjuk, hogy elő tudunk állitani egy tetszőleges $n + 1$ változóst függvényt $M^1_{\epsilon_k}$-ból és a 4.3.1 Lemmában adott függvényekből. Ezért megjegyezzük, hogy ha feltesszük

$$\max_{\epsilon_k}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \max_{\epsilon_k}\{\max_{\epsilon_k}[\ldots \max_{\epsilon_k}(\max_{\epsilon_k}(y_1, \ldots, y_n) \ldots] y_n\}$$

(hasonlóan $\min_{\epsilon_k}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$-re),

akkor

$$f_{\epsilon_k}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max_{\epsilon_k}\{\min_{\epsilon_k}[j^1_{\epsilon_k}(x_{n+1}), f(x_1, \ldots, x_{n-1} 1)]$$
$$\min_{\epsilon_k}[j^2_{\epsilon_k}(x_{n+1}), f(x_1, \ldots, x_n\ 2)] \min_{\epsilon_k}[j^k_{\epsilon_k}(x_{n+1}), f(x_1, \ldots, x_n\ k)]\}$$

$(\epsilon_k = 1,2, \ldots, k)$.

Innen azonnal kapjuk az állitást.

A fenti lemma értelmében tehát ez a rendszer teljes.

Igy a tétel be van bizonyitva.

4.3 Tételből következik:

4.4. Tétel.

Az M határérték-logikában minden lineáris rendezéshez tartozó monoton függvényosztály (M^r) majdnem teljes.

Bizonyitás

Amennyiben a $M^r_{\epsilon_k}$ függvényhalmaz duálisa az $M^1_{\epsilon_k}$ függvényhalmaznak

$$s_{\epsilon_k}(x) = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_k \\ \\ 1,2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

(ahol ϵ_k halmaz elemei a következőképpen van elrendezve $a_1 <_r a_2 <_r \ldots <_r a_k$)

előállitására vonatkozóan, akkor az itt $M^1_{\epsilon_k}$ osztályra meghatározott eredményeket átvihetjük (a dualitás elve szerint) az $M^r_{\epsilon_k}$ függvényosztályra.

4.1. **Következmény.**

Minden $M^r_{\epsilon_k}$ függvényosztály majdnem teljes M_k-ban.

4.5. **Tétel.**

Az *M határérték-logikában majdnem teljes monoton osztályok száma kontinuum.*

Bizonyitás.

Mivel az M megszámlálható sok függvényből áll, igy több mint kontinuum sok majdnem teljes osztály az M-ben nem is lehet.

Az, hogy az M^r osztályok száma kontinuum következik abból, hogy

a.) a különböző $<_r$ rendezések száma kontinuum,

b.) a különböző rendezésekhez különböző M^r-ek felelnek meg.

4.2. **Következmény.**

Az M határérték-logikában kontinuum sok majdnem teljes osztály van.

I r o d a l o m

[1] J. Demetrovics: A határérték-logikák homomorfizmusairól Alk. Mat. 1. (1975.) (125-138).

[2] J. Demetrovics: Az M maximális határérték-logikáról Alk. Mat. 2 (1976), (57-66).

[3] S.L.Lec, E.T. Lee: On Multivalued Symmetric Functions, IEEE. Trans. on Computers C-21. (1972.) (312-317)

[4] I. Rosenberg: Uber die Verschi den keit maximaler Klassen Rev. Roum. math jures et appl. 14, (1969) (413-438)

[5] D.L. Webb: Generation of any n-valued logic by one binary operator. Proc. Mat. Acad Sci 21. (1935) (252-254).

[6] Г.П. Гаврилов: О мощности множества предельных логик, обладающих конечным базисом, Сб. "Проблемы кибернетики" вып. 21, М., "Наука" /1969/, /113-126/.

[7] В.М. Гниденко: Нахождение порядков предельных классов в трехзначной логике, Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 8, М., /1962/, /341-346/.

[8] Я. Деметрович: О числе попарно неизоморфных предельных логик, Сб. "Дискретный анализ", вып. 24, Новосибирск, "Наука", /1974/, /21-29/.

[9] Я. Деметрович: О сравнении предельных логик при моделировании в них конечнозначных логик, Акта Кибернетика, /1974/, /2/.

[10] Я. Деметрович: О свойствах минимальной предельной логики, Штудиа Мат. Акад. Шси. Нунг. 9., /1974/, /1-2/.

[11] Я. Деметрович: О некоторых гомоморфизмах и отношениях для предельных логик, Сб. "Проблемы кибернетики" 30., Москва, /1975/, /5-42/.

[12] С.В. Яблонский: Функциональные построения в к-значной логике, Труды Мат. АН СССР, 51., /1958/, /5-142/.

[13] С.В. Яблонский: О предельных логиках, Докл. АН СССР 118.4. /1958/, /657-660/.

[14] С.В. Яблонский: О некоторых свойствах счетных замкнутых классов из $P_{\aleph_0}$, Докл. АН СССР 124.5., /1959/, /990-993/.

[15] С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев: Функции алгебры логики и классы Поста, "Наука", Москва, /1966/.

Р Е З Ю М Е

О монотонных классах предельной логики М

Ева Гардош

В настоящей работе мы докажем, что в предельной логике М имеется континуум монотонных предполных классов. Нам удалось обобщить линейные монотонные предполные классы типа С.В. Яблонской и получили следующие результаты:

- в предельной логике М каждому линейному упорядочению соответствует монотонный предполный класс;
- для каждого линейного упорядочения множества $E_{\aleph_0}$ имеется континуум монотонных предполных классов.

S u m m a r y

On the monotone classes of the M limit-logic

Eva Gardos

In this paper we prove, that in the limit-logic which is examined by us, containes continuum monotone almost-complete classes.

We succeed in generalizing the monotone almost-complete classes defined by Jablonszkij and we obtained the next results:

1.) In the M limit-logic any monotone function-classes belong to every r linear order are almost-complet classes, moreover the number of the almost-complete classes of the monotone functions look at linear order is already continuum.