

AZ 'ΑΞΙΩΜΑ SZÓ MINT MATEMATIKAI TERMINUS

I

A görög eredetű «axióma» szó még ma is közismert terminusa a matematikai szaknyelvnek. Tudomásom szerint azonban a filológia még sohasem magyarázta meg kielégítően ennek a szónak az eredetét és történetét. Ezért a következőkben kísérletet teszek arra, hogy megvilágítsam e fontos tudományos szakkifejezés származását és egyik ókori jelentésváltozását.

Ha kezünkbe vesszük az euklidészi «Elemek» görög szövegkiadását (ed. J. L. Heiberg, vol. I. Lipsiae 1883), rögtön az első könyv elején hármass csoportba osztva találjuk az ókori geometria *principiumait*. E hármass csoportnak a modern kiadó latin fordításában a következő neveket adta: *definitiones*, *postulata* és *communes animi conceptiones*. Bennünket ezúttal e három csoport közül az utolsónak, a «communes animi conceptiones»-nek a görög neve érdekel. Ez ugyanis Euklidés mai szövegében a *κοινὰ ἔννοια* nevet viseli. — Az euklidészi «Elemek» minden figyelmes olvasójának feltűnik mármost a következő: Részletesen szól a matematika princípiumairól — az imént említett hármass csoportról — az «Elemek» kitűnő ókori kommentátora, az i. sz. V. században élő Proklos is. Proklos azonban a «communes animi conceptiones» nevű csoportot *nem* ugyanazzal a görög kifejezéssel jelöli, mint Euklidés; nála e princípiumok neve *nem* *κοινὰ ἔννοια*, hanem *ἀξιώματα*.¹ Ismeri ugyan Proklos a *κοινή ἔννοια* nevet is,² de sohasem használja, hanem kivétel nélkül mindig az *ἀξιώματα* szóval helyettesíti. Sőt Proklos olyan magától értetődő természetességgel használja ezt az utóbbi kifejezést — ami pedig Euklidés mai szövegében sehol sem fordul elő —, hogy önkéntelenül is fölébred bennünk a gyanú: vajon ugyanaz az Euklidés-szöveg volt-e Proklos kezében, mint amit mi olvasunk? Nem állott-e az ő szövegében a *κοινὰ ἔννοια* kifejezés helyén az *ἀξιώματα* szó? — Megerősítheti ezt a gyanúnkat a következő két tény:

1. Az *ἀξιόματα* szó mint matematikai terminus ismeretes már az Euklidést megelőző korból is. Aristotelés beszél a matematikusok ún. axiómáiról,³ sőt több ízben szó szerint idézi is azt az axiómát, amely Euklidés mai szövegében mint harmadik *κοινή ἔννοια* szerepel.⁴

2. A *κοινὰ ἔννοια* kifejezés — amint ezt már P. Tannery is felismerte⁵ —

¹ Procli Diachodi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ed. G. Friedlein, 1873 p. 76, 6; 77, 1; 188, 2 et passim.

² Proclus 194, 8—9.

³ Met. Γ 3 1005 a 20; τὰ ἐν τοῖς μαθήμασι καλούμενα ἀξιώματα.

⁴ Met. K 4 1061 b 20, vö. Met. Γ 3 1005 a 19 kk.

⁵ Mém. Scientifiques (publ. par J. L. Heiberg—H. Z. Zeuthen, 1912 II 60. (P. Tannerynek ez a cikke még 1884-ből való.)

későbbi, valószínűleg sztoikus eredetű terminus. A sztoikusok mindenesetre *κοινὰ ἔννοια*-nak nevezték a «mindenki számára közös képzeteket».⁶

Úgy látszik tehát, későbbi, talán sztoikus hatásra vallhat az, hogy Euklidés szövegében a régi *ἀξιώματα* kifejezés helyébe a *κοινὰ ἔννοια* terminust írták. Ezt a változtatást azonban, úgy látszik, *nem mindegyik* ókori Euklidés-példányon hajtották végre. Még Proklosnak is olyan Euklidés-szöveg lehetett a kezében, amelyik a régi *ἀξιώματα* elnevezést változatlanul megtartotta.

Azt a sejtésünket, hogy Euklidés szövegében a régi *ἀξιώματα* elnevezést csak később, talán éppen sztoikus hatásra váltotta fel az újabb keletű *κοινὰ ἔννοια* terminus, nemcsak az teszi valószínűvé, hogy a *κοινὰ ἔννοια* kifejezés a sztoikus filozófia terminusa volt. Ezt a következtetésünket támogatja még egy másik megfigyelés is. Hiszen az *ἀξιόματα* szó maga is a sztoikus filozófia egyik terminusa — *csak hogy nem abban az értelemben, mint az ókori matematikában*. A sztoikusok *ἀξιόματα*-nak neveztek minden kijelentő állítást, tételt (Aussagesatz).⁷ Az a valaki tehát, aki az ókorban az euklidészi *ἀξιώματα*-t a későbbi eredetű *κοινὰ ἔννοια* terminussal helyettesítette, ezzel bizonyára meg is akarta különböztetni az euklidészi «axiómákat» a más természetű sztoikus «axiómáktól».

Az itt vázolt gondolatmenethez egyelőre még csak a következőt kell hozzáfűznöm. Ez a gondolatmenetem Tannerynek abból a *helyes* megfigyeléséből indul ki, hogy a *κοινὰ ἔννοια* kifejezés későbbi eredetű terminus. Hallgatólagosan azonban egyszerismind korrigáltam is már Tannerynek egyik tévedését. Tannery ugyanis megfigyeléséből arra következtetett, hogy azok a matematikai princípiumok, amelyeknek neve Euklidés szövegében egy «sztoikus» terminus (*κοινὰ ἔννοια*), nem is származhatnak magától Euklidéstől; talán csak később, az Euklidést követő időkben *utólag* állították össze ezeket és tették az «Elemek» legelejére. Valóban, én is úgy gondolom, hogy ezek az axiómák *nem* magától Euklidéstől származnak; eredetüket azonban nem az Euklidés utáni, hanem az Euklidés megelőző korokban kell keresnünk. Ezt a véleményemet támogatja az a körülmény is, hogy az egyik euklidészi axiómát — a harmadik *κοινὴ ἔννοια*-t — már Aristotelés is többször szó szerint idézi. A következőkből kiderül majd, hogy minden valószínűség szerint ugyanilyen régi — euklidész-előtti — eredetű az «Elemek» többi axiómája is.

2

Ha mármost meg akarjuk állapítani az *ἀξιόματα* szónak mint matematikai terminusnak eredeti pontos jelentését, akkor mindenekelőtt a következő fontos körülményt kell figyelembe vennünk:

Azok az ismert ókori kísérletek, amelyek a matematikai *ἀξιόματα* lényegét vagy nevét akarják megvilágítani, kétségtelenül mind Aristotelés hatása alatt állanak.

Bőségesen igazolható ez az utóbbi állítás akár Proklos Euklidés-kommentárjából is. Egy alkalommal pl. azt olvassuk nála: «Egyesek pontosabban elhatárolják az *axiómát* a kijelentő állítástól, és ezzel a szóval a közvetlenül,

⁶ Stoicorum Veterum Fragmenta, ed. H. v. Arnim, II 154, 29 kk.; III 51, 41.

⁷ Uo. II 193—220.

önmagában is meggyőző és világos tételt (τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον δι' ἐνάργειαν πρότασιν) jelölik; így értik ezt a kifejezést *Aristotelés és a matematikusok*, mert szerintük *axióma* és *közös képzet* (ἐννοια κοινή) egy és ugyanaz.⁸ Egy másik alkalommal viszont — ugyancsak Aristotelésre hivatkozva — ezt írja Proklos: «az axióma nem bizonyítható, de mindenki elfogadja az ilyen állítást lelki alkatánál fogva, mégha egyesek vitatkozó kedvükben kétségbe is vonják az ilyent».⁹

Az a gondolat tehát, hogy a matematikai axióma közvetlenül, önmagában is meggyőző és világos tétel — és hogy az ilyesmit csak az öncélú vita kedvéért szokták egyesek kétségbevonni — Aristoteléstől származik. Ez az utóbbi, két gondolatjel között idézett állítás — ami egyébként távolról sem állja meg a helyét — messzemenően befolyásolta magának a terminusnak, az *ἀξίωμα* szónak a megértését is. Világosan kitűnik ez azokból a szavakból, amelyekkel Proklos elkezdí az euklidészi axiómákra vonatkozó magyarázatát; ő ugyanis előbb szó szerint idézi az általa is hitelesnek tartott öt euklidészi axiómát, majd így folytatja: ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλοῦμενα ἀξιώματα καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται καὶ διαμυριβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδέις.¹⁰ Magyarra ezt az idézetet valahogy így fordíthatnánk: «Ezek az ún. bizonyíthatatlan axiómák; *axiómák* pedig azért, mert mindenki *igaznak tartja őket*, és nem is kételkedik bennük érvényességüket illetően senki.»¹¹ — Ez a fordítási kísérlet, persze, jóval bőbeszédűbb, mint az eredeti, és távolról sem érzékelteti Proklos magyarázatának szójátékszerű tömörségét. Proklos ugyanis magát az *ἀξίωμα* szót is meg akarja magyarázni azzal, hogy utal a név etymonjára, az *ἀξιώω* igére, illetőleg ennek az igének egyik jelentésére: «igaznak tart» (οὕτως ἔχειν ἀξιώω). — Nem kétséges, hogy Proklos magyarázata — legalább elvben — helyes. Az *ἀξίωμα* főnév csakugyan az *ἀξιώω* ige származéka; ha tehát meg akarjuk érteni a főnév pontos jelentését, az ige jelentéséből kell kiindulnunk. — De vajon ezt tette-e Proklos? — Nyilvánvaló, hogy *nem*, mint ahogy ez éppen az előbbi idézetből kétségtelenül megállapítható. Ahelyett ugyanis, hogy elfogulatlanul *kereste* volna a vizsgált szó eredeti jelentését, ragaszkodott előre megfogalmazott naiv és téves elképzeléséhez, és csak ezt akarta igazolni, amikor az *ἀξίωμα* szó állítólagos etymonjára, az *ἀξιώω* ige idézett jelentésére («igaznak tart») hivatkozott.¹² Az a naiv és téves elképzelés pedig, amelyhez Proklos ezúttal is ragaszkodott, nem egyéb, mint a már előbb is említett arisztotelészi gondolat: a matematikai *ἀξίωμα* érvényességét senki komolyan kétségbe nem vonhatja; ha egyesek mégis kétségbevonják az ilyen matematikai axiómákat, akkor ez csak az értelmetlen, öncélú vitatkozás kedvéért történik. Ezt a gondolatot képviselte Proklos etymológiája, és ezért származtatta az *ἀξίωμα* főnevet az *ἀξιώω* = «igaznak tart» igéből.

De Aristotelésnek a matematikai axiómákról alkotott *téves* elképzelése nemcsak az antik theorétikusokat vezette félre; ugyanilyen károsan befolyásolja ez még ma is a matematika történetíróit. A közelmúltban pl. az egyik

⁸ Proclus 194, 4 kk.

⁹ Proclus 182, 17 kk.

¹⁰ 193, 15—17.

¹¹ Vö. P. L. Schönberger fordításával: «Proklus Diadochus, Euklid-Kommentar (herausg. von M. Steck, Halle-Saale 1945)» 302.

¹² Az *ἀξιώω* szónak ehhez a jelentéséhez lásd a Pape-szótárban (1849) felsorolt helyeket.

jól ismert kutató, K. v. Fritz¹³ lényegében ugyanígy magyarázta az *ἀξιωμα* terminust, mint Proklos tette az i. sz. V. században. A különbség szinte csak annyi, hogy a modern kutató az *ἀξιόω* igének egy valamivel régebbi jelentésére hivatkozott («einschätzen», «für würdig halten») s ebből akarta levezetni az *ἀξιωμα* terminusnak azt a matematikai értelmét, amelyet hallgatólagosan ő is éppen olyan «közismertnek» vett, mint annak idején Proklos.

Azt hiszem, ezzel az Aristotelés óta hagyományossá és általánossá lett szómagyarázattal szemben a következő súlyos kifogások támaszthatók.

1. Mint könnyen kimutatható, az *ἀξιωμα* szó a *dialektikából* került át a matematikusok szaknyelvébe mint terminus technicus. Ezért *téves* olyan etymológiai «magyarázatot» keresni e szó jelentésére, amely a legjobb esetben is csak a terminus állítólagos matematikai értelmét világíthatná meg. Ha e terminus eredeti matematikai értelmét keressük, abból kell kiindulnunk: milyen értelemben használták ugyanezt a terminust a *dialektikában*? Hiszen valószínű — ha csakugyan a *dialektikából* került át ez a terminus a matematikába —, hogy eredetileg a matematikában is ugyanaz volt az értelme, mint a *dialektikában*. Márpedig bizonyos, hogy ennek a terminusnak a *dialektikában* *sohasem volt az az értelme, amelyet Aristotelés óta is csak a matematikában tulajdonítanak neki.*

2. Megvannak a nyomai annak is, hogy eredetileg ennek a szónak a matematikán *belül* sem volt az az értelme, amelyet Proklos tulajdonít neki. Kimutatható, hogy az *ἀξιωμα* terminusnak Proklosnál is olvasható félremagyarázása Aristotelés nyomán lett általánossá.

A következőkben tehát — szem előtt tartva az imént elmondottakat — előbb az *ἀξιωμα* szónak mint dialektikus és matematikus terminusnak a jelentését vizsgálom, majd pedig kimutatom: hogyan értendő e szó eredeti jelentése az euklidészi axiómák esetében?

3

Mielőtt megnevezném az *ἀξιωμα* szónak mint *dialektikus terminusnak* a jelentését, érdemes lesz emlékeztetnem arra, hogy a görög matematikai nyelvnek legtöbb régi terminusa hasonlóképpen dialektikus eredetű;¹⁴ ilyen dialektikus eredetű szakkifejezések a matematikában pl.: *θείσις*, *ὑπόθεσις*, *ἄρα* és főként az a matematikai terminus, amely vizsgált esetünkhöz a legközelebbi párhuzamot adja, az *αἴτημα* szó maga.

Ez a legutóbb említett terminus Euklidésznél a *postulatum* görög neve. A szójelentés ebben az esetben nem kétséges, minthogy az *αἰτέω* ige jelentése görögül: «kérni, kívánni, követelni», s ennek megfelelően *αἴτημα* a «követelést» vagy «követelményt» jelenti. A fontos csak az: egy pillanatra se feledezzünk meg róla: miféle «követelés» vagy «követelmény» neve a *dialektikában* az *αἴτημα*? — Gondoljunk két beszélgető dialektikus vitájára. Az egyik résztvevő feladata, hogy a vita során meggyőzze a másikat egy általa választott tétel (állítás) helyességéről. Ezért olyan premisszákat kell keresnie, amelyeket a másik is elismer és helyesnek tart; ezekből a premisszákból vezeteti aztán le az egyik partner logikus szükségszerűséggel azt a végső tételét (állí-

¹³ K. v. Fritz : Die APXAI in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte (herausg. von E. Rothacker) Bd. 1. Bonn 1955, 13—103; 29 kk.

¹⁴ Vö. K. v. Fritz : i. m.

tását), amelyet kezdetben a másik nem akart elfogadni.¹⁵ Ebből áll a vita során a meggyőzés. Hogy tehát a vita elindulhasson, olyan premisszákat kell találniok a beszélgetőknek, amelyekben mind a ketten megegyeznek, amelyeket mind a ketten bizonyítás nélkül igazaknak tartanak. Ezért *kéri* a beszélgetés egyik résztvevője, hogy valamilyen kezdőtételt a másik is elfogadjon. Figyelemre méltó egyébként, milyen gyakran találkozunk az V. és IV. századi görögök dialektikus vitáiban olyan kifejezésekkel, mint *kérni*, *kívánni*, *követelni* vagy *venni* (*λαμβάνειν*) az egyik oldalról, és *adni*, *megadni* vagy *nemadni* a másik oldalról.¹⁶ Sokratés pl. a «Menón» c. platóni dialógusban így szól partneréhez egy vizsgálódás elején:¹⁷ «engedd meg, hogy a kérdést egy feltevés alapján vizsgáljam» (*συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι*); ez más szóval azt jelenti: arra *kéri* partnerét, hogy valamilyen közösen elfogadott állításból indulhasson ki beszélgetésük. Ha ez a *kérés* teljesül, ez azt is jelenti, hogy a kiinduló pontban a vitatkozók megegyeztek. Az ily módon választott kiinduló tétel lesz a «feltevésük» (*ὑπόθεσις*). Néha azt a körülményt, hogy a vitatkozók — az egyik kérésére — valamilyen kiinduló tételben csakugyan megegyeztek, még azzal is kifejezésre juttatják, hogy az ily módon választott kezdőtételt *ὁμολόγημα*-nak nevezik;¹⁸ *ὁμολόγημα* az, amiben mind a ketten megegyeztek.

Az *αἴτημα* tehát olyan kiinduló tétele valamely dialektikus vitának, amelynek elfogadását az egyik partner a másiktól *kérte*, *követelte*. Ebben a vonatkozásban az *αἴτημα* szó szinonimája olyan dialektikus kifejezéseknek, mint *ὑπόθεσις* vagy *ὁμολόγημα*.

Ha azonban közelebbről vizsgáljuk a görög dialektika terminológiáját, mindjárt figyelmesek leszünk egy lényeges különbségre is: mintha az *αἴτημα* terminus mégsem pontosan azt jelentené, mint két megnevezett szinonimája, pl. a *ὁμολόγημα* szó! Az a körülmény ugyanis, hogy az *αἴτημα* esetében *csak* azt hangsúlyozzák: az egyik fél «követeléséről» van szó, de nem emelik ki egyszersmind azt is: vajon a másik fél *hozzájárul-e* ehhez a «követeléshez»? — mintha arra mutatna: talán az *αἴτημα* terminus éppen az ilyen *egyoldalú* dialektikus «követelésnek» volt a neve? Hiszen — mint már említettem — a másik terminus, a *ὁμολόγημα* szó éppen azt hangsúlyozza, hogy ebben az esetben a másik fél is hozzájárul az egyiknek a «kéréséhez», «követeléséhez». — Azt hiszem, ez az *αἴτημα* szóra vonatkozó sejtésem önként adódik már a két terminusnak — *ὁμολόγημα* és *αἴτημα* — egyszerű összehasonlításából is. Szerencsére azonban ebben az adott esetben nem kell megállnunk a pusztá sejtésnél. Forrásunk, Proklos félreérthetetlenül meg is mondja, hogy csakugyan így kell értenünk az *αἴτημα*-t. Ő ugyanis Aristotelésre hivatkozva (vö. Anal. post. I 10, 76 b 27—34) ezt írja: «Ha pedig az állítás — amelyből ti. valamely dialektikus vitánál ki akarunk indulni — valamilyen ismeretlen tétel, de a feltevés mégis megtörténik, *jóllehet a tanuló* (azaz a beszélgetés másik résztvevője) *nem járul hozzá, akkor αἴτημα-ról beszélünk.*»¹⁹ — Az *αἴτημα* szó tehát

¹⁵ K. v. Fritz : i. m. 20.

¹⁶ Vö. pl. Platón, «Phaidon» 100 B 5: ὑποθέμενος εἶναι τι καλὸν αὐτὸ καθ' αὐτὸ . . . ἃ εἰ μοι δίδως τε καὶ συγχωρεῖς εἶναι ταῦτα . . . Ἄλλὰ μὴν, ἔφη ὁ Κέβης, ὡς διδόντος σοι οὐκ ἄν φθάνοις περᾶντων. Vagy hasonlóképpen Aristot. Phys. Z 9, 239 b 30 (Zenón argumentumairól): τρίτος δ' ὁ νῦν ὀηθείς . . . συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν μὴ διδομένων γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογισμὸς.

¹⁷ Platón, «Menón» 86 E 3.

¹⁸ Vö. pl. Platón, «Theait». 155 A-B vagy Resp. IV 437 A.

¹⁹ Proclus 76, 17 kk.

mint dialektikus terminus a vitának olyan kiinduló tételét jelöli, amelynek elfogadását az egyik fél ugyan «kéri» vagy «követeli», de amelyhez a másik fél *nem okvetlenül járul hozzá.*

De nem akarom ebben az összefüggésben részletesebben tárgyalni az *αἴτημα* terminus problémáját. E rövid kitérés célja ezúttal csak az volt, hogy előkészítsem vele a másik terminusnak, az *ἄξιωμα* szónak a magyarázatát.

Valójában egyáltalán nem lesz nehéz megállapítanunk: mit jelentett az *ἄξιωμα* szó a dialektika terminológiájában? K. v. Fritz pl. legutóbb ezt írta erről már előbb is említett dolgozatában: «Aristotelés gyakran használja az *ἄξιωμα* szót egyszerűen *feltevés, vélemény* vagy *tantétel* (*Annahme, Meinung, Lehrstück*) értelemben is. A szónak ez a jelentése könnyen érthető az *ἄξιω* ige Aristotelész-előtti jelentésfejlődéséből.»²⁰ — Ezt az állítást, azt hiszem, minden további nélkül magunkévá tehetjük. De még tovább vezet bennünket K. v. Fritznek egy másik, ugyancsak helyes megjegyzése: «Aristotelés a Topikában a dialektikus kérdés-felelet játék jellemzése során az *ἄξιωv̄* igét gyakran arra a tételre vonatkoztatva használja, amelyről a kérdező azt reméli, hogy ezt a felelő is elfogadja. Ha az elfogadás bekövetkezik, akkor ezt a *τιθέναι* igével jelölik (vö. pl. 155 b 30 kk.; 159 a 14 kk. et passim). Ha az *ἄξιωv̄*-ra a *τιθέναι* következik, mehet tovább a dialektikus következtetés.»²¹ — Azt hiszem, még ezzel a jellemzéssel is egyetérthetünk.

A baj inkább ott van, hogy K. v. Fritz nem érti magát az *ἄξιωv̄* igét éppen abban az összefüggésben, amelyet a legutóbbi két idézetben nagyjából helyesen jellemzett. Ahelyett ugyanis, hogy ennek az igének «eredeti» jelentésére hivatkoznánk («einschätzen», «für würdig halten»), okosabb lesz elővennünk bármelyik megbízhatóbb görög szótárt (pl. Papet), s mindjárt kiderül belőle, hogy van ennek a szónak olyan közismert jelentése is, mint «kérni, kívánni, követelni» (*bitten, verlangen, fordern*).²² Az *ἄξιωv̄* igének ez az utóbbi jelentése az V. és IV. században annyira általános volt, hogy ezt igazában még bizonyítani sem kell. Inkább csak példaként idézem a következő két helyet Platónból: Resp. III 406 D: *παρά τοῦ ἰατροῦ φάρμακον ἄξιωv̄*, «az orvostól orvosságot *kérni*»; Apol. 19 D: *ἄξιωv̄ ὑμᾶς ἀλλήλους διδάσκειν, «kérlek benneteket, világosítsátok föl egymást».*

Nyilvánvaló, hogy az *ἄξιωμα* főnév is mint dialektikus terminus eredetileg csak «követelést», «követelményt» jelentett és semmi többet. Megvolt ennek a szónak ez a jelentése a dialektikán kívül is. Sophoklés pl. *ἄξιωμα*-nak mondta az istenek *követelését*.²³ Sőt az *ἄξιωμα* vagy *ἄξιωσις* szó jelentett *kérvényt*, írásbeli *folyamodványt* is.²⁴ — A szónak *ebből* az alapjelentéséből nagyon könnyen levezethető ugyanennek a terminusnak egyéb értelmi árnyalata is a dialektika terminológiáján belül: *ἄξιωμα* az az állítás, amelynek elfogadását az egyik beszélgető *kéri, követeli* — éppen úgy, mint az előbb említett *αἴτημα* —, ezért *ἄξιωμα* az «állítás», «vélemény», «tantétel» is.

²⁰ K. v. Fritz: i. m. 35.

²¹ Uo. 32 A 32.

²² Nem óhajtom kétségbevonni, hogy az *ἄξιωv̄* ige «kérni, követelni» jelentése ki-fejlődhetett a K. v. Fritz által hangsúlyozott «ősjelentésből» («für würdig halten»). De mégis félreértésre adhat alkalmat, ha ezt a pozitív értelmű «ősjelentést» a szó további jelentésfejlődésében is hangsúlyozzuk. Hiszen ez az ige kimutathatóan nagyon sokszor éppen a «hamis követelést», ill. «hamis feltevést» jelölte, pl. Her. 6, 87; Plat. «Menex» 239 stb.

²³ Oid. Col. 1451.

²⁴ Lásd a Pape-szótárban felsorolt helyeket.

Nyomatékosan hangsúlyozni kívánom, hogy a régebbi, Aristotelés előtti szóhasználat szerint *nem* volt ennek a kifejezésnek olyan jelentésárnyalata, mintha az *ἀξίωμα*-nak nevezett «követelés», «követelmény» *könnyen teljesíthető* lett volna, mintha *ἀξίωμα* «a hitelt érdemlő feltevés» volna. Nem, éppen ellenkezőleg! Az a benyomásunk, mintha *ἀξίωμα* a dialektikában — éppen úgy, mint az *αἴτημα* is — éppen az a «követelés» lett volna, amelyhez a másik partner *nem okvetlenül járult hozzá*. Ezt látjuk pl. a következő Platon-idézetből:²⁵

«Hiszen tudod, hogy a matematikusok kinevetnék azt, aki az „egyet” fel akarná osztani, és nem járulnának hozzá kísérletéhez. Mert ha te az „egyet” osztani akarnád, ők inkább megsokszoroznák ugyanazt, mert mindenképpen el akarnák kerülni, hogy az, ami *egy*, ne *egy*, hanem sok legyen. — S ha aztán valaki megkérdezné tőlük: Ugyan miféle számokról beszéltek, ti különös emberek? Hát hol van olyan *egy*, amilyennek ti *követelítek*? (*περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἐν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτε εἶσι*) Valami önmagában teljesen egyforma, különbség nélküli, amelynek részei sincsenek? — Vajon mit felelnének erre a kérdésre? — Nemde azt, hogy ők a *csak* gondolatban létező számokról beszélnek, azokról, amelyek másképp, mint gondolati úton meg se közelíthetők.»

Látjuk tehát, hogy a matematikusok által «*követelt*» (posztulált) «*egy*» fogalom valami olyasmi, amit a köznapi gondolkozás nem egykönnyen tesz magáévá. Az *ἀξίωω* szónak ez az itt idézett platóni használata is arra mutat, hogy az *ἀξίωμα* eredetileg aligha volt valami «önmagában is evidens», «mindenki által természetesnek tartott állítás».

Az *ἀξίωμα* szó tehát, mint a görög dialektika terminusa, pontosan ugyanazt jelentette, mint szinonimája, az *αἴτημα* kifejezés. A dialektika terminológiája szerint egyáltalán semmi különbség sincs olyan kifejezések között, mint *αἴτέω*, *αἴτημα* egyfelől, és *ἀξίωω*, *ἀξίωμα* másfelől.

Ugyanez a megállapítás érvényes az antik matematikára is — feltéve, hogy egyelőre nem vesszük figyelembe magát Euklidést és a hozzá kapcsolódó ókori tudományos irodalmat. Az *ἀξίωμα* szó a matematikusoknál is pontos szinonimája az *αἴτημα* kifejezésnek. Ezt nemcsak az egyes matematikusok szóhasználatából állapíthatjuk meg — különösen pl. Archimédéséből, akinél a *ὑπόθεσις*, *ὑποκείμενον*, *αἴτημα*, *ἀξίωμα*, *λαμβάνόμενον* azonos jelentésű szinonimák²⁶ —, hanem ugyanezt hangsúlyozza maga Proklos is. — Hiszen Proklos világosan megmondja — miután idézett egy példát arra, hogy Archimédés az *αἴτέω* terminust egy olyan esetben is használja, amikor ő, Proklos maga, inkább «axiómát» mondana: «Mások ugyan a matematika minden kiinduló tételét *axiómának* nevezik, mintahogy a levezetett tételekre is egységesen a *θεώρημα* nevet alkalmazzák.»²⁷

4

Úgy gondolom, az eddigiek során sikerült kimutatnom a következő két dolgot:

I. Az *ἀξίωμα* szó a dialektika terminológiájában ugyanazt jelentette, mint az *αἴτημα* kifejezés; mind a két terminus a dialógus egyik résztvevőjé-

²⁵ Resp. VII 526.

²⁶ Vö. K. v. Fritz: i. m. 57.

²⁷ Proclus 181, 20 kk.

nek olyan *követelését* (*feltevését, állítását*) jelölte, amelyhez a másik fél nem okvetlenül járult hozzá.

2. Amiképpen a dialektikában, ugyanúgy a matematikában is szinonimája volt az *ἀξίωμα* az *αἴτημα* terminusnak. — Úgy látszik azonban, ez a két terminus — *αἴτημα* és *ἀξίωμα* — az Euklidés utáni matematikában már *nem volt* olyan *korlátozó értelmű*, mint a dialektikában. Nincs nyoma annak, hogy *αἴτημα* vagy *ἀξίωμα* még az Euklidés utáni matematikában is olyan *be-nem-bizonyított állítást* jelölt volna, amelyet megkülönböztettek a *ὁμολογή-τῶν*, vagy *ὁπόθεσις*-től. A későbbi matematika nem tett már különbséget *ὁπόθεσις* és *αἴτημα* vagy *ἀξίωμα* között.

Az alábbiakban azt igyekszem kimutatni, hogy Euklidés szövegében az *ἀξίωμα* szó eredetileg ugyanazt jelentette, mint a dialektikában; ez más szóval azt jelenti, hogy elgondolásom szerint a görög matematika Euklidésig bezárólag még ismert olyan *be-nem-bizonyított kiinduló tételeket*, amelyekről tudták, hogy ezeket a dialektika szabályai szerint *gondolkozó partnerek* nem okvetlenül fogadják el. Ilyen *feltételes érvényű* «axiómáknak» számítottak azok a princípiumok is, amelyeknek a mi Euklidés szövegünkben már *κοινὰ ἔννοια* lett a nevük. — Mielőtt ezt kimutatnám, csak azt kell még előre-bocsátanom, hogy Proklosnak az euklidészi axiómákra vonatkozó magyarázatait²⁸ ezúttal szándékosan mellőzöm, minthogy ezek a magyarázatok többé-kevésbé mind Aristotelés téves elgondolásának visszhangjai.

Mindenekelőtt azt a kérdést kell most tisztáznunk: mennyiben vonható kétségbe az euklidészi axiómák helyessége? Hiszen Aristotelés szerint csak az értelmetlen, öncélú vitatkozás kedvéért szokták egyesek kétségbevonni a matematikai axiómák helyességét. Nézzük meg közelebbről Euklidés axiómáit.

Euklidés mai szövegében összesen kilenc axiómát találunk. A princípiumoknak ez a csoportja feltűnően egységes. Eltekintve ugyanis a legutolsó-tól, a kilencediktől, a többi nyolc mind az *egyenlőségről* állít valamit. Éppen ez a feltűnő egységtetés volt az oka annak, hogy a legtöbb kutató a 9. axiómát ki is rekesztette a princípiumoknak ebből a csoportjából;²⁹ ezzel valószínűleg csak később egészítették ki az euklidészi axiómákat. (Ezzel a 9. axiómával nem is foglalkozom most.) A többi euklidészi axióma tehát mind *egyenlőségi tétel*. Mint más összefüggésben rámutattam már, egyenlőségi tétel a 8. axióma is, bár formájában némileg különbözik a többitől: «az egész nagyobb, mint a rész».³⁰ Ez az állítás ti. «negatív egyenlőségi tétel» azért, mert a teljes gondolat, amit ki akar fejezni, tkp. ez: «a rész *nem egyenlő* az egészszel, az egész nagyobb, mint a rész». — Azt hiszem, könnyű lesz megértenünk, miért nevezték az Euklidésnél olvasható egyenlőségi tételeket «axiómáknak», ha összehasonlítjuk őket olyan másfajta egyenlőségi tételekkel, amelyeknek az antik dialektika terminológiája szerint *ὁμολογήματα* volt a nevük.

Plátón «Theaitétos» c. dialógusában *ὁμολογήματα* néven szerepel a következő két egyenlőségi tétel:³¹

1. «egy dolog sem nagyobbá, sem kisebbé nem lesz, sem tömegében sem szám szerint, amíg *egyenlő önmagával*»

²⁸ Lásd ezekről A. Frenkian: Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940, 19 kk.

²⁹ Vö. J. L. Heiberg: Euclides, Elementa I 1883 p. 10 és O. Becker: Die Grundlagen der Mathematik, Freiburg—München 1954 90.

³⁰ Matematikai Lapok, X. 1959 72—121.

³¹ «Theait». 155 A.

2. «amihez semmi nem járul hozzá, és amiből semmi el nem vétetik, az nem növekedhet és nem is csökkenhet, hanem *önmagával egyenlő* marad».

Ha alaposabban megvizsgáljuk ezeket az állításokat, mindjárt látjuk, hogy ezek tulajdonképpen az «önmagával egyenlő» fogalmára adnak kettős definíciót. Az első tétel kimondja, hogy az «önmagával egyenlő» fogalma kizárja annak a dolognak nagyobbá vagy kisebbé válását, amelyre ezt a megjelölést alkalmazzák. A második tétel megfordítja ezt az állítást és azt mondja ki, hogy éppen az a dolog «*egyenlő önmagával*», amely sem nagyobbá, sem kisebbé nem lesz. — Nem csoda, hogy ezeknek a tételeknek *ὁμολογήματα* a nevük, mert csakugyan alig képzelhető, hogy gondolkodó embernek kifogása lehessen ezek ellen az állítások ellen. Mert ezek csak *formális* tételek. Az első közülük más szavakkal fogalmazza meg, mit értsünk az «önmagával egyenlő» fogalmán, a második tétel pedig megfordítja ugyanezt a definíciót felcserélvén a szubjektumot és predikátumot. — Nyilvánvaló, hogy az antik dialektikusok éppen az ilyen formális tételeket tarthatták «különösen erős állításoknak» (vö. Platón, Phaidon 100 A), mert ezek nem valamilyen praktikus-empirikus tapasztalat általánosításai, hanem puszta gondolati konstrukciók, amelyek éppoly ellentmondásmentesek, mint ősképek, Parmenidés híres tétele: τὸ ὄν ἔστι, «a létező van».

Ezzel szemben vizsgáljuk meg most az euklidészi egyenlőségi axiómákat! Ezek magyar fordításban így hangzanak:

«1. Azok, amelyek ugyanazzal a mennyiséggel egyenlők, önmaguk között is egyenlők.

2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek is egyenlők lesznek.

3. Ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, a maradékok is egyenlők.

[4. Ha nem-egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem-egyenlők lesznek.

5. Ugyanannak a mennyiségnek a duplái egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között.]

7. Az egymásra-illők (azaz: a kongruens idomok) egyenlők egymás között.

8. Az egész nagyobb, mint a rész.»

Nincs ezek között a tételek között egyetlenegy olyan formális állítás sem, mint amilyenek az előbb tárgyalt platóni *ὁμολογήματα*-k. Ellenkezőleg! Ezek a tételek mind olyan viszonyt írnak le két dolog között («*egyenlő*»), ami bizonyos értelemben már szinte önmagában is *ellentmondásos*. Mert egyáltalán nem magától értetődő az, hogy két különböző dolog — ami tehát távról sem ugyanaz, hiszen azért «*két*» dolog és nem *egy!* — mégis *egyenlő* egymás között. Igazában természetes csak az, hogy valamely dolog *önmagával* egyenlő, de nem az, hogy ez a dolog még egy *másikkal* is egyenlő legyen! — Azonkívül ezek az euklidészi egyenlőségi tételek még olyan állítások is, amelyeknek helyességét csak *empirikus tapasztalattal (érzéki észrevéssel)* ellenőrizhetjük. A 7. axióma pl. csak azért igaz, mert látásunk, szemünk győz meg arról, hogy az egymásra illeszthető (kongruens) geometriai idomok egyenlők. Ugyanez érvényes a 8. axiómára is. Azt, hogy az egész nagyobb, mint a rész, a geometriai idomok esetében³² ugyancsak érzékszerveinkkel állapítjuk meg.

Gondoljunk mármost arra, hogyan ítélték meg az antik dialektika megteremtői, az eleai filozófusok az *érzékszervek útján nyert tudást, az empirikus*

³² Az euklidési axiómák eredetileg csak *geometriai* tételek; vö. O. Becker: i. m. 90.

tapasztalást? Maga Parmenidés erről a kérdésről így nyilatkozott: «Ne hagyd, hogy a sokat tapasztalt megszokás erre az útra kényszerítsen! Ne bízd magad céltalan látásodra, zúgó füledre és nyelvedre! Ne ezekkel, hanem értelmekkel dönts el a sokat vitatott kérdést, amelyet eléd tárok!»³³ Az eleaták minden érzéki megismerést, empirikus tapasztalást elutasítottak, mert ki tudták mutatni minden ilyen eredetű «tudásban» az ellentmondást. Szerintük igazi megismerés csak az lehet, amely függetleníteni tudja magát minden érzéki tapasztalástól, s amelyhez csak gondolati úton juthatunk el. — Azt hiszem, ennek az eleai elgondolásnak a jegyében érthetővé lesz az is, miért nevezhették az előbb tárgyalt platóni egyenlőségi tételeket *δμολογήματα*-nak (mert ezek csak formális gondolati konstrukciók), és miért kapták az euklidészi egyenlőségi tételek az *ἀξιώματα* nevet? — Mert ezek az utóbbiak érzéki észrevévéseinkből származnak, empirikus tapasztalataink általánosításai. Csakugyan megtörténhetett tehát az, hogy a dialógus egyik résztvevője «kérte», «követelte» ezeknek az egyenlőségi tételeknek az elfogadását, alapulvételét, hiszen ezeket az állításokat minden empirikus tapasztalat igazolni látszott. De egyáltalán nem volt bizonyos az, hogy a dialógus másik résztvevője — ha magáévá tette Parmenidés tanítását — hozzájárul-e ezekhez az euklidészi egyenlőségi tételekhez? — Ezért volt ezeknek a tételeknek régi nevük: *ἀξιώματα*.

5

Az előbbi fejezetben arra a következtetésre jutottam, hogy az euklidészi *κοινὰ ἔννοια* régi és eredeti neve, az *ἀξιώματα* szó egyértelműen megmagyarázható az eleai filozófia jegyében. Felmerül mármost a kérdés: vajon nem éppen az eleaták voltak-e azok, akik — mint Aristotelés célzott rá — «az értelmetlen és öncélú vita kedvéért kétségbevonták ezeknek az axiómáknak a helyességét?» — Vagy meg is fordíthatjuk ugyanezt a kérdést: vajon nem éppen az eleai tanítással szemben kellett-e a legrégebbi görög matematikusoknak ilyen «egyenlőségi követeléseket» (axiómákat) felállítaniok?

Azt hiszem, ezekre az utóbbi kérdésekre könnyű lesz felelnünk. Hiszen csakugyan tudjuk, hogy éppen az eleaták egészen más értelemben tárgyalták az «egyenlőség» problémáját, mint az előbb idézett euklidészi axiómák. Legutóbb — több mint negyedszázaddal ezelőtt — O. Becker így írt erről a kérdésről:³⁴

«Zénón paradoxona Achillésről és a teknősbékáról megfogalmazható mint halmazelméleti probléma. E szerint a felfogás szerint a paradoxon értelme a következő: ha Achillés utóléri a teknősbékát, akkor az általa megtett út — jól lehet ez sokszorosa a teknősbéka által ugyanezen idő alatt megtett útnak — minden egyes pontjában egyértelműen és megfordíthatóan leképezhető a teknősbéka által megtett út pontjaira. A két futó által ugyanazon időben elfoglalt pontok kölcsönösen és egyértelműen megfelelnek egymásnak. Ez pedig nem más, mint az ismert halmazelméleti tény: *két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens (gleichmächtig) lehet akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak.*»

Bizonyosak lehetünk afelől, hogy Zénón paradoxonának ez a halmazelméleti interpretációja a legkevésbé sem «anakronizmus». Egy másik dolgo-

³³ *Diels-Kranz* : Vorsokratiker^s I 28 B 7.

³⁴ «Mathematische Existenz», Halle a. d. Saale 1927, 144. Ez a felismerés azonban még ennél is jóval régebb keletű; vö. *P. Tannery* : *Revue Philosophique* XX p. 385, 1885 és *B. Russel* : *The Principles of Mathematics*, Vol. I § 331 p. 350 és §§ 340—341 p. 358—60, Cambridge 1903.

zatomban legutóbb rámutattam már arra, hogy Zénón antik formában csakugyan meg is fogalmazta azt a tényt: «két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens még akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak.»³⁵ Csak ebben az értelemben adható megnyugtató magyarázat arra az arisztotelészi híradásra, hogy «Zénón *bebonyította*: a fele idő egyenlő (= ekvivalens) a duplájával».³⁶ — Sőt, ezzel a zénóni tétellel kapcsolatban utaltam már arra is: a 8. euklidészi axiómát — «az egész nagyobb, mint a rész» — bizonyára éppen ez ellen a zénóni tétel ellen kellett felállítaniok az antik matematikusoknak. Nem akarom ezúttal megismételni régebbi érveimet, amelyek ezt az elgondolásomat támogatják; inkább csak kiegészítem őket a következőkkel.

Mint ismeretes, Euklidés nyolc egyenlőségi axiómájából a modern kiadó, J. L. Heiberg kirekesztette a 4., 5. és 6.-at. Az 5. és 6. esetében hivatkozott Proklosra (196, 25), aki éppenúgy mint ő, ezeket az axiómákat fölöslegeseknek tartotta;³⁷ sőt Heiberg ugyanezzel a megokolással interpolációkat is vélt fölfedezni Euklidés két tételében (Elem. I 37 és 38), minthogy ezek a tételek — a bizonyítási részben — majdnem szó szerint idézik a két kirekesztett axiómát. — Nem kétséges, hogy ebben az esetben mind Proklosnak, mind Heibergnek feltétlenül igaza van abban: a két kirekesztett axióma (5. és 6.) fölösleges Euklidés szövegében; az egész euklidészi geometria fölépíthető ezek nélkül is. A kérdés csak az: hogyan került mégis ez a két fölösleges axióma Euklidés szövegébe? — Aligha helyes P. Tannerynek az az elgondolása, hogy mind ezt a két axiómát, mind pedig Euklidés többi princípiumát csak később *utólag* absztrahálták volna az «Elemek» szövegéből.³⁸ Hiszen közismert — amint ezt más összefüggésben maga P. Tannery is hangsúlyozta —, hogy éppen ellenkezőleg: az euklidészi princípiumok között sok olyan akad, amely régebbi korok hagyománya, s amelyeket Euklidés szinte csak a hagyomány iránti tiszteletből vett be művébe.

Ez lehet az eset az 5. és 6. axiómával is: «ugyanannak a mennyiségnek a dupláit egyenlők egymás között» és «ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között». Mi adhatott mármost alkalmat — egyszer valamikor — arra, hogy ilyen tételeket állítsanak fel valamely mennyiség *duplájának* és *fele részének* egymás közötti egyenlőségéről? — Csak *egy* olyan eset ismeretes az antik irodalomból, amely alkalmat adhatott e tételek felállítására. Zénón előbb is említett paradoxona ti. Arisztotelés híradása szerint így hangzott: «a fele idő egyenlő a duplájával». Ez a paradoxon tehát éppen valamely mennyiség *duplájának* és *fele részének* «egyenlőségét» mondja ki. Utaltam legutóbb már arra is, hogy Zénón ezt a paradoxonát tulajdonképpen vonalszakaszokkal szemléltette, vonalszakaszokon mutatta meg, hogyan lehet valamely szakasz felerésze «egyenlő» a duplájával.

Gondoljunk mármost arra: hogyan próbálták cáfolni az antik theorétikusok Zénónnak ezt az abszurd állítását? Pusztán *elméleti úton* a paradoxon állítása *cáfolhatatlan*. Arisztotelésnek és tanítványainak ún. «cáfolatai» csak azt mutatják, mennyire *nem értették meg* e cáfolatok szerzői az eleai dialektika lényegét. Valódi cáfolat Zénón paradoxonára csak az lehetett, hogy empirikus tapasztalati tényekből indultak ki, s ezek alapján fogalmazták meg *bizonyít-*

³⁵ Lásd a 30. jegyzetet.

³⁶ *Diels-Kranz*: I 29 A 29 (=Aristot. Phys. Z 9. 239 b 33).

³⁷ Vö. *J. L. Heiberg*: i. m. p. 91.

³⁸ *Mém. Scient.* II 53.

hatalatlan (és csak véges halmazok esetére érvényes) tételeiket a zénóni paradoxon minden egyes részletével szemben.

Ha mármost e feltevésre gondolva vizsgáljuk Euklidés axiómáit, lehetetlen észre nem vennünk, hogy nem kevesebb, mint *négy* egymást követő axióma valójában nem is egyéb, mint Zénón tárgyalt paradoxonának empirikus cáfolata. Ez a *négy* axióma, amely tulajdonképpen csak Zénón paradoxonára vonatkoztatva lesz értelmessé, a következő:

5. Ugyanannak a mennyiségnek a *dupláit* egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a *felerészei* egyenlők egymás között.

7. Az *egymásra-illők* (= a kongruensek) egyenlők egymás között. (Zénón ábráján ti. *nem illettek* egymásra azok a vonalszakaszok, amelyeket ő mégis «egyenlőknek», azaz *ekvivalenseknek* állított.)

8. Az egész *nagyobb*, mint a rész. (Zénónnál ti. az «egész» és a «rész» *egyenlők, ekvivalensek* voltak.)

Nyilvánvaló, hogy ebből a négy tételből igazában csak a 8. nélkülözhetetlen az euklidészi geometria felépítéséhez. Ha nagyon szigorúak akarnánk lenni, kirekeszhetnénk nemcsak az 5. és 6.-at, hanem ugyanúgy a 7.-et is, hiszen Euklidés maga ezt az utóbbit is mindössze csak *kétszer* használja,³⁹ s még ezekben az esetekben is elkerülhette volna a használatát. — Azt hiszem azonban, *történeti* szempontból mégsem lenne helyes kirekeszteni ezt a legutóbb felsorolt csoportot. Ezeket a tételeket valószínűleg még az i. e. V. században akkor állították föl ugyanebben a sorrendben, amikor a görögök először tettek kísérletet a geometria axiómatikus megalapozására éppen Zénón cáfolhatatlan paradoxonaival szemben. Euklidés pedig ezeket a tételeket éppen olyan megfontolatlanul, csak tradíciótiszteletből vette föl művébe, mint az «egyesen vonal» és a «sik felület» definícióját, vagy a *ετερόμηκες, ὀμόβος ὁμοβοειδής, τρίπλευρα, πολύπλευρα* stb. terminusokat.⁴⁰

6

Összefoglalva az eddigieket, a következőket állapíthatjuk meg Euklidés axiómáiról:

Euklidés egyenlőségi tételei empirikus állítások, amelyeknek helyessége csak érzéki észrevevéssel ellenőrizhető. Éppen ezért ezek a bizonyíthatatlan tételek *nem* is elégitik ki az eleaták igényeit. Ezért nevezték ezeket a tételeket a dialektikus-theorétikus vita terminológiája szerint «követelményeknek», *ἀξιώματα*. Minthogy azonban a Platón utáni időkben egyre kevésbé értették már az eleai dialektika lényegét, megpróbáltak új értelmet adni a matematikában az *ἀξίωμα* terminusnak is. Arra hivatkoztak, hogy ezeknek az axiómáknak a helyességét éppen úgy nem lehet kétségbevonni józaneszű embernek, mint ahogy kétségbevonhatatlan tény a tűz melegsége.⁴¹ Így lett az «axióma» a kétségbevonhatatlan, a természetes igazság neve. A régi terminusnak ez az átértelmezése szorosan összefüggött azzal, hogy Aristotelés Zénón genialis paradoxonait is «szofizmáknak» minősítette. Mivel pedig az *ἀξίωμα* szó még így is kényelmetlen volt az Euklidés-szövegben, nemsokára kicserélték ezt az új terminussal: *κοινὰ ἔννοια*, «minden ember számára közös képzetek». Ezzel viszont sikerült elleplezniök nemcsak magának a kifejezésnek, hanem ennek az egész princípium-műfajnak is a dialektikus eredetét.

³⁹ K. v. Früz : i. m. 76 k.

⁴⁰ Vö. P. Tannery : *Mém. Scient.* II 540—544 és 48—63.

⁴¹ Proclus 181, 8 kk.