SZABÓ ÁRPÁD

A MATEMATIKAI "BIZONYÍTÁS" GÖRÖG TERMINUS TECHNICUSA

IN MEMORIAM
K. REINHARDT
1886—1958

A görög matematikai nyelv egyik leggyakrabban használt terminusa a *δείκνυμι* ige. Megtaláljuk pl. Euklidesnél minden egyes bizonyítás zárómondatában. Euklides ugyanis tételeit először mindig mint egyszerű állítást fogalmazza meg ; azután megmagyarázza ugyanezt az állítást egy olyan példán amelyet a szó bizonyos értelmében «konkrétnak» kell tekintenünk ; majd bemutatja az állítás bizonyítását a «konkrét» példán. A bizonyítás utolsó mondata megismételi a «konkrét» példára vonatkoztatva ugyanazt a tételt, amelyet az elején általános formában mint állítást fogalmazott meg. Végül pedig éppen erre a megismétlésre hívja fel a figyelmet minden euklidesi bizonyítás sztereotíp zárómondata : *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* = *quod erat demonstrandum*. Már abból a körülményből is, hogy Euklides mindig ragaszkodik ehhez az egyszerű szkhémához,[1] kitűnik : fejtegetéseinek leglényegesebb része éppen az a *demonstratio*, amelyre a zárómondat *δεῖξαι* igéje nyomatékosan visszamutat. — Természetesen jól tudjuk, mit jelent görögül a *δείκνυμι* ige. A szó jelentése és jelentésfejlődése az első pillanatra egyáltalán nem látszik problématikusnak. Tudomásom szerint még senki sem ütközött meg azon, hogy éppen ez a szó lett a matematikai bizonyítás terminus technicusa. Ezért nem is vizsgálták meg alaposabban a szó jelentésváltozását a matematikai szaknyelven belül. Pedig ez a vizsgálat hasznos lehet az evidencia fogalmának történeti fejlődése szempontjából is. — Lássuk előbb a szót a köznapi használatban.

A szótárak a *δείκνυμι* ige jelentéseit általában a következő három csoportra osztják : 1. *mutatni, megmutatni*, 2. *szóval vagy beszéddel megmutatni, kioktatni vlmire*, 3. *bizonyítani, bebizonyítani (*1. *zeigen, zum Vorschein bringen*, 2. *durch Worte kundmachen, unterweisen*, 3. *erweisen, beweisen;* 1. *faire voir, montrer, indiquer*, 2. *faire connaître par la parole, expli uer*, 3. *démontrer, prouver)*. Ez az összeállítás könnyen azt a gondolatot sugalmazhatja, hogy a szónak az első csoportban megadott jelentése egyszersmind az eredeti, legrégibb jelentés is, hiszen a közvetlen *megmutatást*, a *rámutatást* csakugyan konkrétabb cselekvésnek érezzük, mint a szóval, a beszéddel való megmutatást. Platon egy alkalommal meg is magyarázza a szónak ezt a «legősibb» jelentését : *τὸ δεῖξαι λέγω εἰς τὴν τῶν ὀφθαλμῶν αἴσθησιν καταστῆσαι.*[2] De hiba lenne, ha megfeledkeznénk arról, hogy az igének a második csoportban

[1] A szerkesztési feladatok záró-formulája nem így hangzik, hanem : *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι* pl. El. I. 1, 2, 3 stb. A bizonyítási feladatokban viszont már az első mondatban is megtaláljuk a *δείκνυμι* igét, pl. Eucl. Elem. X. App. 27 (Heiberg): *προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι ὅτι κτλ.*

[2] Platón, Crat. 430 E.

megadott jelentése («szóval, beszéddel megmutatni») fölbukkan már az Odysseiában is (12, 25). Sőt az Ilias és az Odysseia egyik-másik helyén (pl. Ilias 19, 333 vagy Od. 10,302) olyan összefüggésben használja a költő ugyanezt a szót, hogy már alig tudjuk eldönteni, vajon konkrét megmutatásról, rámutatásról, vagy egyszerűen csak szóval való megmutatásról beszél-e. Ha ehhez hozzászámítjuk még annak a latin *dico* igének a jelentését is, amely etymológiailag közvetlen rokona a vizsgált görög kifejezésnek, akkor arra a következtetésre kell jutnunk, hogy a görög *δείκνυμι* bizonyára réges-régen, már az írásbeliség korát megelőző időkben is, egyformán jelölhette mind a konkrét megmutatást, a rámutatást, mind pedig a szóval való megmutatást, a megmagyarázást. Ha viszont ez így van, akkor az általános szótörténet aligha adhat választ arra a kérdésünkre : vajon a *δείκνυμι* igének három csoportban fölsorolt jelentései közül melyiket vették át eredetileg a legrégibb görög matematikusok? — De megkísérelhetjük a választ erre a kérdésre akkor, ha a matematika történetéből indulunk ki.

Jamblichos, a Vita Pythagorica szerzője, munkájának egyik sokszor idézett helyén[3] arról beszél, hogyan lett közismertté a pythagoreusok tudománya, a matematika, amelyet kezdetben titokban tartottak. Elmondja, hogy a pythagoreusok, akik vagyonközösségben éltek, egy alkalommal egyik társuk hibájából elveszítették minden pénzüket. Hogy a veszteség megtérüljön, megengedték a kár okozójának : szerezzen pénzt a geometriával. Ezt a rövid történetet Jamblichos a következő görög mondattal fejezi be : *ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορίη* V.P. 89[4]. A szöveg összefüggéséből nyilvánvaló, hogy arról a pythagorasi, illetőleg Pythagorastól származó (*πρὸς Πυθαγόρου*) «geometriáról» van szó, amelynek alapján a kár okozója geometriai tárgyú előadásokat tarthatott. Ez a «geometria» minden bizonnyal valamilyen írásos összefoglalás lehetett,[5] egyike azoknak a régi, elveszett kézikönyveknek, amelyeknek jóval későbbi, klasszikussá lett és általunk is jól ismert formája az euklidesi «Elemek». — Tekintet nélkül arra, hogy Jamblichos híradása csakugyan valamely hiteles történeti esemény emlékét őrzi-e, mint egyesek gondolják,[6] vagy csak költött legenda-e, rendkívül tanulságos számunkra az imént idézett görög mondat. E szerint a mondat szerint ugyanis a legrégibb görög geometriai kézikönyv neve «*historia*» volt, ugyanúgy mint ahogy még Herodotos is az i. e. 5. sz. második felében kutatásainak összegyűjtött eredményeit, kilenc könyvét, *ἱστορίης ἀπόδεξις*-nek nevezhette.

Az a geometria viszont, amelynek görögül *ἱστορίη* a neve, csak valamilyen gyakorlati (empirikus) és főként *szemléletes jellegű* tudomány lehetett ;

[3] Tudomásom szerint *P. Tannery* (La géométrie grecque, Paris 1887, 81) hívta fel a figyelmet legelőször erre a fontos szakaszra ; vö. *B. L. van der Waerden*: Erwachende Wissenschaft, Basel—Stuttgart 1956, 190.

[4] *M. Th. Kiessling* kiadása (Lipsiae 1815) így interpretálja a kérdéses mondatot : *Vocabatur autem Geometria a Pythagora h i s t o r i a*. A baj csak az, hogy ez az intrpretáció önmagában nem elég világos. *B. L. van der Waerden* interpretációja (i. m. 191 : «*Überlieferung des Pythagoras*») tartalmát tekintve nagy egészében helyes ugyan, de félreérti a *ἱστορίη* szót. Ez a félreértés *Tannery*től származik, aki a francia «*histoire*» értelmét vetítette vissza a görög *ἱστορίη*-be ; ezért interpretálhatta *Tannery* előbb idézett munkájában a kérdéses kifejezést így : «*tradition touchant Pythagore*». Ezzel azonban ő maga, *Tannery*, sem volt megelégedve ; nyolc évvel később egy másik dolgozatában (vö. Mém. scient. II 474) ugyanezeket a görög szavakat már így interpretálja :«*tradition venant de Pythagore*».

[5] Vö. *B. L. van der Waerden:* i. m.

[6] *B. L. van der Waerden* ugyanott.

erre mutat a *ἱστορίη* elnevezés. A homéroszi nyelvben *ἵστωρ*-nak a szemtanút, a döntőbírót nevezik. A későbbi szóhasználat szerint pedig *ἱστορίη* mindig *empirikus tudás*, amely vagy *közvetlen szemléletből* származik, vagy legalábbis olyan kutatások összefoglalása, amelyeknek végső forrása azoknak az embereknek *saját szemükkel való látására* vezethető vissza, akik aztán ezt a látásból származó tudásukat másoknak továbbadták. Herodotos pl. — akinél legelőször találkozunk ezzel a szóval — *ἱστορίη*-nek a szemtanúktól származó tudást nevezi.[7]

Ha viszont *ἱστορίη empirikus, látásból származó tudás*, akkor bizonyára nagy szerepet játszott abban a régi geometriában, amelynek még *ἱστορίη* volt a neve, a *konkrét megmutatás*, a *láthatóvá tevés*. Föltehető, hogy az iónok régi geometriája[8] még csak egyszerű «földmérés», praktikus-empirikus jellegű készség, ügyesség, hozzáértés volt.[9] Azon a fokon viszont, amikor ez a geometria a *ἱστορίη* nevet kapta, meg is kellett már mutatniok, valahogy láthatóvá kellett tenniök a kezdetben csak gyakorlati jellegű ismeretet, hozzáértést. Ezen a fokon tehát a *δείκνυμι* szó *a konkrét láthatóvá tevést, a szemléltetést* kellett, hogy jelölje. A kérdés csak az, hogy vajon történeti adatokkal igazolhatjuk-e ezt az elgondolásunkat? — Dolgozatom első fejezetében megpróbálom rekonstruálni a szemléltetésnek, a láthatóvá tevésnek azt a módszerét, amellyel a legrégibb, még erősen empirikus jellegű görög geometria dolgozott.

I

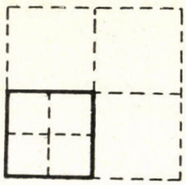
A «Menón» című platóni dialógusnak egyik jólismert részletében (82b — 85e) azt kérdezi Sokrates egy egyszerű, tanulatlan rabszolgától: hogyan lehetne megduplázni egy olyan négyzetnek a területét, amelynek két láb hosszú az oldala, oly módon, hogy a négyzetalak a megduplázás után is változatlanul maradjon? Hogy a félreértést elkerüljék, Sokrates mindjárt meg is mutatja a kérdezett rabszolgának rajzban azt a négyzetet, amelynek két láb hosszú az oldala. (A felrajzolt négyzet tehát négy kisebb négyzetből áll.) Kérdés tehát: hogyan lehetne ezt a négyzetalakú területet négyzetformában megduplázni? — Miután Sokrates nyomatékosan fölhívta a figyelmet arra, hogy annak a négyzetnek az oldala, amelynek a területét meg kellene kétszerezni, *két láb hosszú*: a megkérdezett előbb arra gondol, hogy a terület megkétszerezése után bizonyára kétszer olyan hosszú lesz a négyzet oldala is, tehát

[7] *Bruno Snell:* Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplatonischen Philosophie (Philologische Untersuchungen, herausg. von *A. Kiessling* u. *U. v. Wilamowitz-Moellendorff,* 29. Heft, Berlin 1924) 59—71. — *A. Frenkian;* RÉIE (1938) 468—474. *A. Frenkian* hangsúlyozza, hogy *ἱστορίη* = «*science empirique appuyée sur l' autopsie*» és «*science empirique, résultat d'une recherche faite par exploration ou par la vue*, azonkívül kiemeli még: «*ce sens a persisté aussi longtemps qu'on a parlé et écrit le grec ancien*».

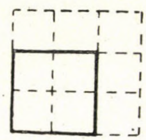
[8] *U. v. Wilamowitz—Moellendorff:* Platon I 493: «Ionisch ist das Wort und die Sache» (ti.: die Geometrie). Vö. még *B. Snell* i. m. 78.

[9] Vö. *Pólya Gy:* A gondolkodás iskolája, Bpest 1957, 13: «Az euklidészi módon tárgyalt matematika rendszeres, deduktív tudománynak tűnik; ezzel szemben a matematika — miközben dolgozik vele az ember — kísérleti, induktív jellegű.» — A mi szempontunkból ennél valamivel többet mond ugyanennek a munkának régebbi német változata (Schule des Denkens, Bern 1949, 9): «Nach Euklid dargestellt, erscheint die Mathematik als eine systematische, deduktive Wissenschaft; aber *Mathematik im Entstehen* erscheint als eine experimentelle, induktive Wissenschaft».

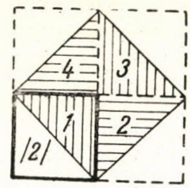
az oldalhosszúság *négy láb* lenne. — Sokrates erre a válaszra azonnal fölrajzolja a négy láb oldalhosszúságú négyzetet oly módon, hogy az eredeti négyzet egyik oldalának hosszát megkétszerezi, és ezzel az új oldalhosszúsággal négyzetet rajzol (1. ábra). A rajzból viszont azonnal kiderül, hogy a nagyobb négyzet nem kétszerese, hanem négyszerese az eredeti négyzet területének. A kérdezett rabszolgának be kell látnia, hogy első kísérlete nem sikerült, rosszul felelt Sokrates kérdésére, mert az oldalhosszúság megduplázásával nem megkétszerezzük, hanem megnégyszerezzük a négyzet területét. — A következő lépésben aztán így okoskodik tovább a kérdezett. Annak a négyzetnek az oldala, amely területében kétszerese az eredeti négyzet területének, nyilván *nagyobb* lesz



1. ábra



2. ábra

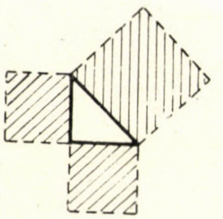


3. ábra

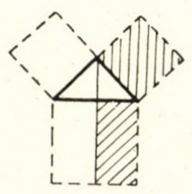
mint az eredeti négyzet oldala. A keresett oldalhosszúság tehát *nagyobb mint kettő*, mert kettő annak a négyzetnek az oldalhosszúsága, amelynek területét meg akarjuk duplázni. Az előbbi kísérletből viszont látjuk már, hogy *négy* nem lehet a keresett oldalhosszúság, mert a négy láb oldalhosszúságú négyzet területe már nem kétszerese, hanem négyszerese az eredeti négyzet területének. A keresett oldalhosszúság tehát *kisebb lesz mint négy.* — Nagyobb mint kettő és kisebb mint négy — a három. Talán éppen a három láb oldalhosszúságú négyzet területe lesz a duplája az eredeti négyzet területének. — Sokrates erre az újabb kísérletre egy újabb rajzzal felel : meghosszabbítja az eredeti két láb oldalhosszúságú négyzet egyik oldalát három egységnyire, és az újabb — három láb — oldalhosszúsággal négyzetet rajzol (2. ábra). A rajzból viszont azonnal kiderül, hogy ezúttal sem sikerült megduplázni az eredeti négyzet területét ; a nagyobb négyzet területe ugyanis most kilenc kisebb négyzetből áll, holott ha csakugyan megdupláztuk volna az eredeti négyzet területét, akkor az új négyzetnek csak nyolc kisebb négyzetből kellene állnia, mert az eredeti négyzet négy kisebb négyzetből állott. A rajzból a rabszolgának ismét be kell látnia, hogy válasza ezúttal is téves volt. — A kérdést végül is úgy oldja meg Sokrates, hogy újabb ábrát rajzol és ezen megmutatja, hogy az eredeti négyzet területe csakugyan megnégyszerezhető azáltal, hogy az oldalhosszúságot megduplázzuk — pontosan úgy, ahogy a rabszolga első ízben akarta. Ugyanakkor azonban az ily módon nyert négy darab négyzetet átlóikkal két-két egyenlő háromszögre bonthatjuk. A megrajzolt átlók viszont ugyancsak négyzetet alkotnak, amely négy egyenlő háromszögből áll (3. ábra). Nyilvánvaló, hogy ennek az utóbbi négyzetnek a területe éppen a duplája az eredeti négyzet területének, mert a nagyobb négyzet ezúttal *négy*, az eredeti pedig *két* egyenlő háromszögből áll. Ezzel sikerült megdupláznunk az eredeti négyzet területét, és a négyzetalak is változatlan maradt.

Látjuk ebből a dialógus-részletből, hogy a *konkrét megmutatás*, a *rajzzal való szemléltetés* milyen nagy szerepet játszik a beszélgetésben. Az a tény, hogy a két első kísérlet téves, a harmadik pedig helyes eredményre vezet, éppen azáltal lesz evidenssé, hogy az állítás helyes vagy helytelen voltát a rajzon empirikusan, látással ellenőrizhetjük. Sokrates maga mondja egyszer a beszélgetés folyamán: «Mondd meg pontosan (ti. hogy milyen hosszú lesz a keresett oldal), ha pedig nem akarod számokban kifejezni, *mutasd meg a kérdéses hosszúságot a rajzon.*»[10] — Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy Platón ezzel a klasszikus jelenettel tulajdonképpen a matematikai megismerés «apriori» jellegét akarja illusztrálni.[11] Sokrates a rajzon való konkrét bemutatással azt a benyomást kelti hallgatóiban, mintha egyáltalán semmi új ismeretre sem tanítaná a megkérdezett rabszolgát, csak «emlékeztetné» kérdéseivel — és természetesen a rajzon való megmutatással! — régi, elfelejtett tudására.

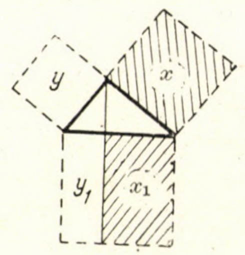
Régen megjegyezték már, hogy ez a Menón-részlet milyen eleven képet ad a Platón korabeli geometriai oktatásról.[12] Azt hiszem, ugyanakkor ez a részlet fényesen illusztrálja annak a régi görög geometriának a módszerét és bizonyítási technikáját is, amely még nem *μάθημα* csak *ἱστορίη* volt. Ezt az állításomat a következő két pont igazolja.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

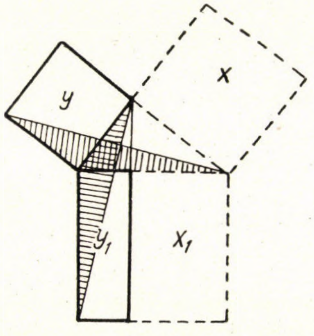
1. Valószínűvé tehető, hogy a görögök eredetileg az ún. Pythagoras-tételt — általános formájában is! — ugyanazzal a szemléltető módszerrel bizonyították, mint amellyel Sokrates is illusztrálja a tanulatlan rabszolga előtt föltett kérdésének a megoldását. Világos ugyanis, hogy a Sokrates által szemléletesen bebizonyított állítás — *valamely kisebb négyzet átlójára emelt nagyobb négyzet területében kétszerese a kisebb négyzet területének* — tulajdonképpen a Pythagoras-tétel egyik speciális esete. Mert a kisebb négyzet átlója nem egyéb, mint egy egyenlőszárú derékszögű háromszög *átfogója;* erre az átfogóra emelt négyzet pedig — Sokrates bizonyítása szerint — egyenlő annak a két kisebb négyzetnek a területével, amelyet az egyenlőszárú derékszögű háromszög egy-egy *befogójára* (a kisebb négyzet oldalaira) emelhetünk (l. a *4. ábrát*). Éppen ilyen empirikusan és szemléletesen bebizonyíthatjuk azt is,

[10] Platón, Menon 83 E: *πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς· καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον.* — Csak mellékesen utalok arra, hogy az előbbi Platón-idézetből a következő szavak: «*ha pedig nem akarod számokban kifejezni*» — mennyire ironikusak. Mert a kérdezett mennyiséget, a négyzet átlóját — ha számokban fejezzük ki ugyanannak a négyzetnek az oldalát! — egyáltalán nem lehet számokban meghatározni. Hiszen a négyzet oldala és átlója összemérhetetlen (inkommenzurábilis) mennyiségek. Platón tehát az idézett szavakkal nyilván ironikusan utal az inkommenzurábilitás (vö. Eucl. El. X. App. 27, Heiberg) problémájára.

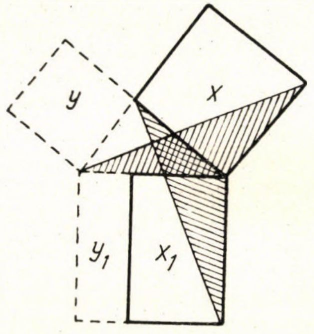
[11] Vö. *O. Becker:* Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg—München 1954, 109 k.

[12] *O. Becker:* i. m.

hogy az eredeti négyzet másik átlójának a meghosszabbításával az átfogóra emelt nagyobb négyzet területét két egyenlő téglalapra bonthatjuk. Minthogy viszont a két egyenlő téglalap területösszege (vagyis az átfogóra emelt négyzet) egyenlő a két — egymás között ugyancsak egyenlő — kisebb négyzet területösszegével, világos az is, hogy az egyik téglalap területe az egyik négyzet, a másik téglalap területe pedig a másik négyzet területével tehető egyenlővé. Ez más szóval azt jelenti, hogy *5. ábránkon* a sattírozott illetőleg üresen hagyott felületek — egy-egy téglalap és négyzet — egymás között egyenlőek. Mindezek az állítások rendkívül egyszerűen, empirikusan és szemléletesen levezethetőek egymásból. Legutóbbi, 5. ábránk alapján viszont fölmerül a kérdés : vajon nem érvényes-e ugyanez az összefüggés az általános (a *nem*-egyenlőszárú) derékszögű háromszögre is? Rajzoljunk valamely általános derékszögű háromszög minden oldalára egy-egy négyzetet, azután



7. ábra



8. ábra

bocsássunk a derékszögből merőlegest az átfogóra és hosszabbítsuk meg ezt a vonalat mindaddig, amíg ez az átfogóra rajzolt négyzetet két különböző nagyságú téglalapra bontja (lásd a 6. ábrát). Ez az utóbbi, az átfogóra merőleges egyenes képviseli ti. ebben az esetben azt a «másik átlót», amely a négyzet esetében az átlóra emelt nagyobb négyzet területét két egyenlő téglalapra bontotta. Kérdés már most ezek után : vajon nem érvényes-e ebben az esetben is az az összefüggés, amelyet az egyenlőszárú derékszögű háromszög esetében megfigyeltünk? Vagyis kérdés : 6. *ábránkon* a sattírozott illetőleg üresen hagyott négyzet és téglalap, x és x_1 illetőleg y és y_1 nem egyenlőek-e? — Csakugyan Euklides az «Elemek» I. könyvében a Pythagoras-tétel bizonyítását (47. tétel) éppen erre a meggondolásra építi.[13] Egy rendkívül egyszerű és szellemes segédszerkesztéssel kimutatja, hogy a *7. ábránkon* látható két, különbözőképpen sattírozott háromszög egyenlő, azaz kongruens. Minthogy pedig e két háromszög közül az egyik az y-nal jelölt négyzetnek, a másik pedig az y_1-gyel jelölt téglalapnak a félterülete,[14] az y és y_1 területek egyenlőek. Ugyanez a segédszerkesztés alkalmaz-

[13] Tévedés, amit ezzel kapcsolatban *O. Becker* (i. m. 20) ír : «Auf einen Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes mittels Proportionen weist der Euklidische Beweis (Elem. I 47) hin, der selbst zwar... Proportionen vermeidet, aber doch noch *einen älteren Beweis, der solche verwendete, durchschimmern lässt* (?)».

[14] Vö. Eucl. Elem. I 41 : «*Si parallelogrammum et eandem basim habet, quam triangulus aliquis, et in iisdem parallelis est, duplo maius est parallelogrammum triangulo*» (*I. L. Heiberg* fordítása szerint).

ható természetesen — mint *8. ábránk* mutatja — az x-szel jelzett négyzetre illetőleg az x_1-gyel jelzett téglalapra is, vagyis ezek a felületek is egyenlőek egymás között. Ha már most összeadjuk a 7. és 8. ábra tanulságát, akkor szemléletesen bebizonyítottuk a Pythagoras-tétel általános formáját: *a derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet területe egyenlő a két befogóra emelhető négyzetek területeinek az összegével.*

Látjuk tehát, hogy tulajdonképpen még Euklides is a szemléltetésnek azzal az egyszerű módszerével bizonyítja be a Pythagoras-tételt, mint amelylyel Platón Sokratese illusztrálja a tanulatlan rabszolga előtt a négyzet terület-megduplázásának a problémáját. Tagadhatatlan azonban az is, hogy Euklides szövegében az előbbi gondolatsor és bizonyítás korántsem olyan szemléletes, mint amilyenné az én vázlatomban lett. Hiszen közismert, hogy éppen e tárgyalt bizonyítás szemléletességének a hiánya tette annyira bizalmatlanná Schopenhauert Euklidesszel szemben. Kérdés tehát: csakugyan szemléletes-e a bemutatott bizonyítás, amint ezt előbbi fejtegetéseim alapján gondolhatnánk, vagy szó sem lehet szemléletességről, amint ezt Schopenhauer egy alkalommal bosszankodva megjegyezte? — Azt hiszem, a két megállapítás igazában nem zárja ki egymást. Schopenhauernak igaza volt, Euklides egyáltalán nem szemléletes a szó konkrét értelmében. De Euklides bizonyításai ugyanakkor nagyon sokszor — mint a tárgyalt esetben is — rendkívül egyszerűen szemléletessé tehetők. Aki ezt az állításomat ellenőrizni akarja, vizsgálja csak meg a következő fontos euklideszi tételek bizonyításait: *Eucl. II.* 4, 5, 6, 7 etc. Egészen feltűnő ezekben az esetekben — mint az előbb tárgyalt példán is — a gondolatsorok *eredeti* szemléletessége. Csakhogy Euklides arra törekszik, hogy *elrejtse, elkendőzze* az eredeti szemléletességet. Véleményem szerint ez az elkendőzés nagyon határozott és tudatos törekvés volt Euklides részéről. E dolgozat utolsó fejezetében választ adok majd arra a kérdésre is: miért *kellett* a görögöknek arra törekedniök, hogy elkendőzzék geometriai bizonyításaik eredeti szemléletességét. — Ami az előbb tárgyalt bizonyítást magát illeti: azt hiszem, a bemutatott példa — valamint az a körülmény, hogy Euklides legtöbb geometriai bizonyítása ugyanígy szemléletessé tehető — igazolja, hogy a görög geometria eredeti bizonyításformája a konkrét megmutatás, az egyszerű szemléltetés volt. (Egyébként a Pythagoras-tétel görög bizonyításának a genezisét[15] csak azért rekonstruálhattuk, mert rendelkezésünkre állott Platón «Menón» című dialógusának idézett részlete.)

2. Egy másik fontos bizonyíték — arra ti., hogy a legrégibb görög geometriában a bizonyítás konkrét megmutatás, egyszerű szemléltetés volt — kiolvasható a történeti hagyomány egyik érdekes adatából. Proklos ugyanis, Euklides késői kommentátora, az «Elemek» I. könyvének 17. definiciójával kapcsolatban a következőket mondja: «Azt állítják, *Thales* volt az első, aki *bebizonyította*, hogy az átmérő felezi a kör területét.»[16] Régebben kissé bizalmatlanul fogadták ezt a kijelentést.[17] Kétségbevonták a híradás hitelességét,

[15] Nemcsak maga a Pythagoras-tétel, hanem ennek egy másfajta «szemléletes bizonyítása» is megvolt már a görögök előtt az ókori keleti kultúrákban; vö. *O. Becker:* i. m. 20. — Természetesen ez még távolról sem jelenti azt, mintha a görögség előtti kultúrák ismerték volna a matematikai *tétel, bizonyítás, dedukció* stb. fogalmát.

[16] Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii (ed. *G. Friedlein*) p. 157, 10: *τὸ διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαί φασιν.* — Proklos forrása ezúttal is valószínűleg Eudemos volt.

[17] Pl. *Abel Rey:* La jeunesse de la science grecque. Paris 1933. 42.

legalábbis annyiban, hogy elismerték ugyan, Thales csakugyan fölismerhette a tényt magát — hogy ti. az átmérő felezi a kör területét —, de aligha valószínű, hogy Thales ezt be is tudta volna «bizonyítani». Ha Euklides kommentátora mégis Thales bizonyításáról beszél ezzel kapcsolatban, akkor ez részéről csak téves szóhasználat lehet. — Nos ezzel a felfogással szemben mindenekelőtt Proklost magát kell védelmünkbe vennünk. Proklos ugyanis általában elég körültekintően választja meg ilyen természetű kifejezéseit. A csúcsszögek egyenlőségéről szólva pl. megjegyzi — az euklidesi «Elemek» I. könyvének 15. tételéhez: a tételt magát Thales ismerte föl, a tudományos bizonyítás viszont Euklidestől származik.[18] Ebben az esetben tehát világosan megmondja Proklos, hogy a csúcsszögek egyenlőségének ismert bizonyítása *nem* Thalestől származik, csak későbbi kiegészítés. (Csak azt a kérdést hagyja ezúttal nyitva: vajon maga Thales is nem adott-e már valamilyen más bizonyítást ugyanerre a tételre, amely bizonyítás az ő — Proklos — véleménye szerint még nem lenne eléggé tudományos jellegű; mert különben ugyan miért hangsúlyozná Proklos olyan nyomatékosan Euklides bizonyításának «tudományos» jellegét: *ἐπιστημονικὴ ἀπόδειξις*?) — Ha tehát Proklos egy másik alkalommal, a kör átmérőjével kapcsolatban, Thales *bizonyítását* emlegeti, akkor semmi esetre sem szabad félremagyaráznunk a szavait. Thales minden valószínűség szerint be tudta már bizonyítani geometriai állításait.[19] A kérdés csak az, milyenek lehettek Thales bizonyításai?

Emlékeztethetünk ebben az összefüggésben K. v. Fritznek az *ἐφαρμόζειν*-módszerrel kapcsolatos megfigyeléseire.[20] K. v. Fritz ugyanis fölhívta a figyelmet arra, hogy Euklides ugyan fölállítja az I. könyv elején a kongruencia axiómáját, az ún. *ἐφαρμόζειν*-axiómát,[21] de később egyáltalán nem használja ezt az elvet, jóllehet az egyenlőségi definiciókban sok bizonytalanságot elkerülhetett volna, ha az egymásra-illesztés empirikus módszerét kissé sűrűbben alkalmazza.[22] Tudjuk viszont Proklos szövegéből, hogy régebben ezt az empirikus módszert, az *ἐφαρμόζειν*-módszert, olyan bizonyításokban is alkalmazták, amelyeket Euklides már egyáltalán nem használ föl. «Ezt a módszert tehát régebben sokkal többször használhatták, mint amennyire ez Euklides szövegéből kitűnik. Úgy látszik, ez a módszer még a matematika-történet korábbi szakaszából származik, s talán az sem véletlen, hogy abból az öt tételből, amelyet a hagyomány Thalesnek tulajdonít, négy közvetlenül, az ötödik pedig közvetve bizonyítható az egymásraillesztés módszerével.»[23] — Ha még tovább megyünk ezen az úton, megállapíthatjuk, hogy Proklos maga is megemlíti:[24] az a tétel, hogy az átmérő felezi a kör területét, bebizonyítható az egymásra-illesztés módszerével. Csak az nem tűnik ki ezúttal világosan Proklos szavaiból: vajon Thalesnek pár sorral előbb említett bizonyítása nem éppen ennek a módszernek az alkalmazásából állott-e? Mégis úgy gondolom, K. v. Fritz

[18] Proclus (ed. *G. Friedlein*) p. 299, 1: *τοῦτο ...τὸ θεώρημα ...εὑρημένον μὲν ὥς φησὶν Εὔδημος ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως ἠξιωμένον παρὰ τῷ στοιχειωτῇ.*

[19] Vö. *B. L. van der Waerden:* i. m. 146 kk.

[20] *K. v. Fritz:* Die APXAI in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte. Bd. 1. Bonn 1955. 13—103.

[21] Eucl. Elem. I «Communes animi conceptiones 7»: «*Quae inter se congruunt, aequalia sunt*» (*I. L. Heiberg* fordítása szerint).

[22] *K. v. Fritz:* i. m. 77.

[23] *K. v. Fritz:* uo.

[24] Proclus (ed. *G. Friedlein*) p. 157, 17.

nyomán föltehetjük : Thales a tételeit oly módon bizonyította, hogy a tárgyalt geometriai idomokat «egymásra illesztette» és így empirikusan illusztrálta, szemléltette «megmutatta», hogy állításai igazak. Ez a bizonyítás csakugyan nem volt még más, mint empirikus megmutatás, a régi *ἱστορίη*-nek nevezhető geometria általános módszere. A tudománynak ezen a fejlődési fokán a *δείκνυμι* szó még magát a konkrét megmutatást jelentette.

II

A megelőző fejezet szerint a legrégibb görög geometria módszere a konkrét megmutatás volt. A bizonyítás vagy cáfolás ebben a kezdetleges és még túlnyomórészt empirikus tudományban abból állott, hogy a tényeket konkréten megmutatták, szemléltették. A *δείκνυμι* terminus tehát a tudománynak ezen a fejlődési fokán a konkrét megmutatást, szemléltetést jelölte. — Ez más szóval azt is jelenti, hogy csatlakozom K. v. Fritz véleményéhez, aki legutóbb hangsúlyozta : a legrégibb görög tudományban bizonyára jelentős szerepe lehetett a *szemléletes evidenciának*. K. v. Fritz ezt a véleményét arra alapította, hogy az Euklides előtti tudományban minden jel szerint sokkal gyakrabban alkalmazták az egymásra-illesztés empirikus módszerét, mint később.[25] Ugyanakkor azonban hangsúlyozta ez a kutató azt is, hogy a görögök későbbi tudománya *nem* elégedett meg a szemléletesség evidenciájával. Éppen ellenkezőleg, később arra törekedtek, hogy az empirikus elemeket kiiktassák a tudományból. Euklides lehetőleg nem használta az egymásra-illesztés módszerét. Thales régi «tételét» pl., amely szerint az átmérő felezi a kör területét, inkább beleépítette egyik definíciójába (El. I 17. def.), nem törődve azzal, hogy ily módon túlterheli a definíciót. De különben is, Euklides igyekezett még azokban az esetekben is, amelyekben már semmiképpen sem kerülhette el az egymásra-illesztés módszerét, legalább axiomatikusan megalapozni eljárását, és amenynyire csak lehet, megfosztani a módszert empirikus jellegétől.[26] A görög tudománynak ez az «anti-empirikus» és szinte «szemlélet-ellenes» tendenciája, amelyre K. v. Fritz helyesen hívta föl a figyelmet, véleményem szerint meglehetősen régi keletű. Hiszen különben is föltűnt már másoknak, hogy Hippokratesnek a holdacskák quadraturájáról szóló híres fragmentuma olyan egyenlőtlenségeket is gondosan bebizonyít, amelyek bármely megfelelő ábráról azonnal láthatóak lennének.[27] Úgy látszik, mintha ez a megfigyelés arra vallana, hogy már az i.e. 5. sz. közepe táján a chiosi Hippokrates is valamiképpen az előbb említett «szemléletellenes tendencia» hatása alatt állhatott, azért nem elégedett meg bizonyításaiban a puszta szemléletességgel. Eszerint tehát következő kérdésünk így hangzik : mennyiben befolyásolta a tudományos fejlődésnek ez a «szemlélet-ellenes tendenciája» a *δείκνυμι* szónak mint matematikai terminusnak a jelentését? Hogy világosabban lássuk magát a problémát, a következőkben megvizsgáljuk a görög arithmetika jelenleg legrégibbnek ismert tételsorozatából kettőnek a bizonyítását. A megvizsgálandó tételsorozat Euklides művében maradt fönn.

[25] *K. v. Fritz:* i. m. 94.
[26] *K. v. Fritz:* uo. — Euklidesnek ezzel a törekvésével függ össze nyilván az is, hogy a Pythagoras-tételnek föntebb ismertetett bizonyítása sem egyértelműen szemléletes.
[27] *B. L. van der Waerden:* Die Arithmetik der Pythagoreer I. Math. Ann. 120 (1947—49) 140.

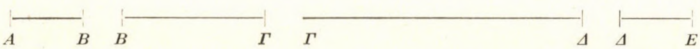
O. Becker már több mint 20 évvel ezelőtt kimutatta, hogy az ún. páros- és páratlanról szóló tanítás az euklidesi «Elemek» IX. könyvében a régi pythagoreus arithmetika egyik töredéke. Eredeti formájában ez a tanítás — amely úgy látszik, már Euklides korában is csak történeti szempontból lehetett érdekes — még az i.e. 5. század közepe táján vagy a század első felében keletkezhetett.[28] Ennek a tanításnak első két tétele Euklides megfogalmazásában így hangzik:

Elemek, IX. 21: *Páros számok összege mindig páros.*

és

Elemek, IX. 22: *Tetszőleges páratlan számok, párosszor összeadva, páros számot adnak.*

Világos, hogy ezeknek a tételeknek az érvényességét soha számoló kétségbe nem vonhatta. Ilyesmit bebizonyítani igazában fölösleges. Annál tanulságosabb viszont a mi szempontunkból: hogyan bizonyítja őket Euklides: A bizonyítás a IX. 21 tétel esetében pl. azzal kezdődik, hogy Euklides az állítást egy «konkrétnak» tekintendő példán illusztrálja.[29] «Legyenek AB, BΓ, ΓΔ és ΔE tetszőleges páros számok; azt állítom, hogy összegük, AE is páros szám.» Az a körülmény, hogy Euklides az adott páros számokat két-két betűvel (AB, BΓ stb.) összegüket pedig AE-vel jelöli, arra mutat, hogy a számokat mint «vonalszakaszokat», összeadásukat pedig mint egyenes vonalszakaszok összeadását szemléltette a következőképpen:



9. ábra

A bizonyítás viszont az előbbi magyarázat után így hangzik: «Minthogy *AB*, *BΓ*, *ΓΔ* és *ΔE* páros számok, mindegyiküknek van (egész számú) felük, úgyhogy az egésznek, *AE*-nek is van fele, Páros szám viszont az, amely felezhető (utalás a VII. könyv 6. definíciójára). *AE* tehát páros szám. Quod erat demonstrandum.» — Dehát egyáltalán mi köze van ennek a bizonyításnak az előbb említett «szemléltetéshez»? Mennyiben látható az említett vonalszakaszokon (*AB*, *BΓ* stb.) az, hogy ezek páros számokat ábrázolnak? Hiszen ugyanezek a vonalszakaszok ugyanezekkel a betűkkel a következő tétel (El. IX. 22) bizonyításában már éppen megfordítva *páratlan számokat* ábrázolnak! A páros és páratlan számok különbsége vonalszakaszokkal egyáltalán nem ábrázolható, mert az egyenes szakasz mindig felezhető, a számok közül viszont csak a párosak felezhetők. Sőt a görög aritmetika szerint még az *egység* sem ábrázolható mint valamely egyenes vonalszakasz, mert az egység *oszthatatlan*[30], a szakasz

[28] *O. Becker:* Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente. Quellen und Studien zur Gesch. der Mathematik Abt. B. Bd. 3 (1936) 533—553; lásd még: *O. Becker:* Grundlagen der Math. 38 k.

[29] Eucl. Elem. IX. 21: *'Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ AB, BΓ, ΓΔ, ΔE· λέγω ὅτι ὅλος ὁ AE ἄρτιός ἐστιν.*

'Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔE ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ AE ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ AE· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[30] Platón, Resp. VII 525 D — 526 A.

pedig mindig osztható. De Euklides, úgy látszik, még azzal sem törődik, hogy valamiképpen szemléletessé tegye : hogyan lesz a páratlan számból páros szám. A IX. 22 tétel bizonyításában pl. azt olvassuk : «Vonjuk ki az adott tetszőleges páratlan számokból, az AB, $\mathrm{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ és ΔE-ből az egységet, és akkor ezek páros számokká lesznek.» Ezt azonban csak mondja a bizonyítás, de egyáltalán semmit sem szemléltet az említett vonalszakaszokon.

Hogy mennyire alkalmatlan Euklides eljárása az említett tételek szemléltetésére — holott eredetileg a bizonyítás nem is volt egyéb, mint egyszerű szemléltetés, — az különösen kitűnik akkor, ha összehasonlítjuk «szemléltetését» azzal a módszerrel, amellyel a páros és páratlan egyszerű tételeit eredetileg illusztrálták. O. Becker ugyanis filológiai módszerekkel kimutatta, hogy ezeket a tételeket eredetileg minden valószínűség szerint számoló kövekkel (ψῆφοι) azaz az ún. ψηφοφορία-val vezették le. A páros számokat fele részben fehér, fele részben pedig fekete kövekkel ábrázolták. Valamely páratlan szám viszont úgy jött létre, hogy egy páros számhoz hozzáadtak még egy fehér vagy fekete követ, vagy elvettek belőle egyet. A ψηφοφορία segítségével pl. az előbbi tétel a következőképpen illusztrálható : Legyen AB = 4, $\mathrm{B}\Gamma = 6$, $\Gamma\Delta = 10$, $\Delta\mathrm{E} = 2$ és AE = 22. Az első sor csak ábrázolja az adott páros számokat ; a másodikban összeadjuk őket, a harmadikban pedig — a kommutativitás elvének érvényesítésével — rendezzük a «félrészeket», azaz a fehér és fekete köveket, hogy ezáltal is kitűnjék : az összegben is ugyanannyi fehér, mint ahány fekete kő van, azaz : az összeg is páros szám.

1., ○○●● ○○○●●● ○○○○○●●●●● ○●
2., ○○●● ○○○●●● ○○○○○●●●●● ○●
3., ○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●

10. ábra

Látjuk tehát, hogy az ábrázolás régebbi módszere, az ún. *ψηφοφορία* csakugyan sokkal szemléletesebb, mint az a módszer, amelyet Euklides alkalmaz. Euklides eljárása — legalábbis az adott esetben — már alig-alig emlékeztet az eredeti «konkrét megmutatásra». Még mielőtt kísérletet tennénk arra, hogy megfejtsük ennek a különös, újfajta, «euklidesi szemléltetésnek» az értelmét le kell szögeznünk néhány fontos történeti ténymegállapítást.

Mindenekelőtt bizonyos az, hogy *nem* Euklides volt az első, aki az arithmetikában a számokat *vonalszakaszokkal* és nem számolókövekkel ábrázolta. Ugyanez a módszer megvolt már az i.e. 5. században is, Úgy látszik, a számolókövek használatát csak egészen kezdetleges, nem-tudományos fokon voltak hajlandók megtűrni. A pythagoreusok tudományos jellegű arithmetikája a számokat már az 5. században is vonalszakaszokkal ábrázolta. Erre mutat pl. Archytasnak egy Boetiusnál fönnmaradt töredéke.[31] Ennek a töredéknek a szövegében a számokat egy-egy betű (A, B, C) képviseli, mint ahogy gyakran látjuk ezt Euklidesnél is, pl. az «Elemek» VII. könyvében. Ugyanakkor viszont Archytas ugyanebben a töredékben két számnak — D-nek és E-nek — az összegét DE betűkkel jelöli, ami Euklidesnél elképzelhetetlen volna. Többek között ennek az utóbbi jelölésmódnak a régiessége is bizonyíték volt arra, hogy a kérdéses Archytas-töredék — bár csak latin fordításban maradt reánk —

[31] Boetius : De institutione musica (ed. *G. Friedlein,* Lipsiae 1867) p. 285.

hitelesnek tekinthető.[32] Nem kétséges viszont, hogy az Archytas-szövegnek ezek a betűi — A, B, C, D, E, DE — számokat «ábrázoló» vonalszakaszokat képviselnek ugyanúgy, ahogy jól ismerjük ezt az ábrázolásmódot bármelyik későbbi eredetű görög arithmetikai szövegből.

A másik fontos történeti jellegű ténymegállapítás, amelyet előre le kell szögeznünk : a számoknak vonalszakaszokkal való ábrázolása semmiképpen sem lehet következménye annak a közismert «geometrizálásának», amelyet O. Neugebauer mutatott ki a görög matematika történeti fejlődésében. Mert ez az alapvető jellegű változás — az egész matematika általános geometrizálása — csak Archytas *után* következett be.[33]

Mi lehet már most az oka annak, hogy a görög arithmetikusok föladták a számolókövekkel való ábrázolást és a számokat mint tetszőleges vonalszakaszokat szemléltették? — Könnyű lesz rámutatnunk ennek a döntő jelentőségű módszerváltásnak legalább egyik okára.[34] Nyilvánvaló ugyanis, hogy a számolókövekkel mindig csak egy bizonyos, konkrét páros vagy páratlan számot, tehát a *hatot*, a *hetet* vagy valamelyik másikat, ábrázolhatták ; de nem szemléltethették számolókövekkel a páros vagy páratlan számot általában. Éppen ez volt kezdettől fogva a döntő különbség a számolókövek használata és a geometriai idomok rajzzal való szemléltetése között. A geometriai idomokat könnyű volt általános érvényűségükben szemléltetni. Egy tetszőlegesen kicsiny vagy nagy négyzet a szemlélet számára maga *a négyzet* volt. (Nem volt probléma még a geometriai mérték sem, mert esetről esetre tetszőlegesen állapíthatták meg a legkényelmesebb mértékegységet.) De nem volt ilyen egyszerű a puszta számok ábrázolásának a kérdése. A számolókövek erre a célra túlságosan konkrét-jellegűnek bizonyultak ; velük csak adott konkrét számokat lehetett szemléltetni. A nagyobb általánosság érdekében kénytelenek voltak elhagyni a számolóköveket, és inkább vonalszakaszokkal szemléltetni a puszta számokat is. Bizonyos szempontból ez az áttérés az arithmetikában a vonalszakaszokkal való ábrázolásra könnyű lehetett kezdetben már csak azért is, mert az empirikus geometriában különben is hozzászoktak már ahhoz, hogy bármilyen szakasz képviselhetett szinte bármilyen valóságos mértéket, csak az alkalmas mértékegységet kellett jól megválasztani. — Csakhogy a számoknak vonalszakaszokkal való ábrázolásakor — amint ezt a páros és páratlan elméletéből látjuk — *elveszett a konkrét szemléltetés eredeti értelme*. Azok a vonalszakaszok, amelyeket Euklides a IX. 21 tétel bizonyításában említ (AB, BΓ stb.), már nemcsak páros, hanem ugyanolyan joggal páratlan számokat is képviselhetnek. És ebből a fajta szemléltetésből már nem is tűnik ki, hogy a páros számok összege csakugyan mindig páros szám. A bizonyítás ezúttal már nem is a konkrét megmutatásra épül. Inkább a páros szám definíciójára emlékeztet bennünket Euklides : *páros az a szám, amely felezhető (amelynek egész-számú fele van)*. Minthogy pedig az említett és vonalszakaszokként ábrázolt számok mind ilyenek, természetes, hogy az az

[32] *B. L. van der Waerden:* Die Arithmetik der Pythagoreer I. Math. Ann. 120 (1947—49) 134.

[33] Vö. *O. Neugebauer:* Zur geometrischen Algebra, Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3. 1936. 247.

[34] Lehet, hogy a szemléltetés módszerének itt tárgyalt megváltozásához egyéb okok is hozzájárultak. A törtek, az inkommenzurábilis mennyiségek és a kontinuum is sokkal inkább ábrázolhatók vonalszakaszokkal, mintsem számoló-kövekkel. Úgy gondolom azonban, a módszerben beállott változás egyéb okai sokkal kevésbé megfoghatóak, és kevésbé jelentősek is, mint az, amiről a fenti szöveg szól.

összeg is, amely csak ilyen számokból áll, ugyanilyen lesz, ennek is lesz egészszámú fele. — Egészen paradox hatású azonban az, hogy Euklides e mellé a bizonyítás mellé még mindig fölrajzoltatja a számokat ábrázoló vonalszakaszokat, holott ebből az ábrázolásból már egyáltalán nem lesz láthatóvá az, amit a bizonyításnak kellene «megmutatnia». Úgy látszik azonban, erre az esetre is érvényes Parmenidesnek archaikusan megfogalmazott felszólítása : *λεῦσσε δ'ὅμως ἀπεόντα νόῳ παρεόντα βεβαίως* «Használd szemeid helyett értelmedet, és lásd az *értelemmel* azt is, ami távol van, mint jelenlevőt».[35]

III

Eddigi vizsgálataink eredményeit a következőkben foglalhatjuk össze. A *δείκνυμι* szó a görögök legrégibb, még túlnyomórészt empirikus tudományában a szemléltetés, a konkrét láthatóvá tevés műveletét jelölte. A tudománynak ezen a fejlődési fokán a bizonyítás — mind a geometriában, mind pedig az arithmetikában — abból állott, hogy a tárgyalt tényállást vagy rajz segítségével vagy számolókövek alkalmazásával konkréten megmutatták, láthatóvá tették. A tényállás konkrét megmutatása volt a bizonyíték arra, hogy az állítás helyes-e vagy téves, mert az evidencia ezen a fokon még csak a szemlélet, a látás evidenciája volt. — Egy későbbi fejlődési fokon viszont «antiempirikus», «szemlélet-ellenes» tendencia lépett föl. Ezen a későbbi fokon a bizonyítás már nem abból állott, hogy a tényállást konkréten megmutatták, hanem inkább abból, hogy más úton, általános érvényűen «mutatták ki» a szükségszerű voltát annak, amit az állítás tartalmazott. Minthogy azonban a görögök részben még ezen a későbbi fejlődési fokon is kitartottak az eredeti szemléltetés mellett — vagy talán nem tudtak ettől teljesen elszakadni —, különös *disszonancia* állott elő tudományukban. Ez a disszonancia nemcsak abból állott, hogy a «megmutatás» terminusát (*δείκνυμι*) még akkor is használták, amikor igazában — mint legutóbbi példánk nyilvánvalóvá tette — már semmi lényeges látnivalót sem tudtak «megmutatni» ; ugyanez a disszonancia nyilatkozott meg abban is, hogy a görög tudomány külső megjelenésében valami egészen másnak tűnt, mint ami igazában volt. — Érdekes, hogy a régiek maguk mennyire tudatában voltak ennek a disszonanciának. Platón pl. hangsúlyozta egy alkalommal, hogy a geometriával foglalkozó tudósok «nevetséges és erőltetett kifejezéseket» használnak. Ezek ugyanis úgy tesznek, mintha tudományuk valamiféle «tevékenység» volna, és mintha kutatásaik célja valamilyen «cselekvés» lenne. Arról beszélnek pl., hogy «négyszögesítenek» valamit, vonalat «húznak», vagy egy felületet «odaillesztenek» stb. Pedig ennek a tudománynak a célja — Platon szerint — «örök dolgok megismerése» és nem annak a kutatása, ami egyszer lesz, másszor meg elmúlik.[36] — Nem kétséges, hogy Platón ezen a helyen többek között éppen arra a disszonanciára is fölhívja a figyelmet, amely a szokásos geometriai ábrázolás következtében áll elő ; az általa kifogásolt kifejezéseket éppen a szemléltetés során használja a geometria, és részben ezek a kifejezések is okozzák azt, hogy könnyen megfeledkezünk arról : tulajdonképpen nem arról van szó, amit lerajzolunk és megfoghatóvá teszünk (ezt nevezi Platón *mulandónak*), hanem arról, amit

[35] Idézi Parmenides szövegét : Clemens, Strom. V. 335 St. Lásd még Empedokles fr. 17, 21 (Diels). — A Parmenides-idézet parafrázisához lásd *K. Reinhardt:* Parmenides und die Gesch. der griech. Philosophie. Bonn 1916. 49.

[36] Platón, Resp. VII 527 A—B.

bármilyen tökéletes rajz vagy ábrázolás is csak nagyon durván és távolról tud megközelíteni (ezt nevezi Platón *öröknek*). Hogy az említett Platón-részlet csakugyan a görög tudománynak éppen arra a problémájára céloz, amely szorosan összefügg a «szemléletességgel», az kitűnik többek között abból is, hogy Platón hangsúlyozza ugyanebben az összefüggésben : «az arithmetika nem tűri, hogy olyan számokból induljunk ki, amelyeknek látható és tapintható testük van» ; az arithmetikusok tulajdonképpen csak elgondolható számokról beszélnek, olyanokról, amelyek másképp mint gondolati úton nem is közelíthetők meg».[37] Euklides viszont ezeket a *csak elgondolható számokat* mégis mint vonalszakaszokat szemlélteti.

A régiek tehát tudatában voltak az említett disszonanciának. Csak a modern kutatást vezette félre — legalábbis a múltban — a puszta látszat. Régebben ugyanis azt hitték, hogy éppen a *szemléletesség* az antik tudomány legjellemzőbb vonása. Csak legutóbb kezdte hangsúlyozni K. Reidemeister : mennyire alaptalan előítélet az antik tudomány szemléletességéről vallott nézet. Az igazság ti. inkább az, hogy már a pythagoreus matematika is *elfordult* attól, ami szemléletes — a tisztán fogalmi felé.[38]

Bennünket ebben az összefüggésben mindenekelőtt az a kérdés érdekel, vajon nem deríthetnénk-e ki az okát annak, ami ezt a különös változást, a szemlélettől való elfordulást, előidézte? Vajon a *δείκνυμι* terminus történeti jelentésfejlődésének a vizsgálata nem világíthatná-e meg jobban ezt a kérdést is? — Vegyük szemügyre mégegyszer Euklides IX. 21 tételének a bizonyítását.

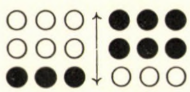
Világos, hogy ebben az esetben a szemléltetésnek már nincs fontos szerepe. A bizonyítás a konkrét tényállás helyett most már valami mást mutat meg, ti. azt, hogy a tétel — *a páros számok összege páros szám* — hogyan következik abból a definícióból, amely kimondja, hogy *páros az a szám, amelynek van (egész-számú) fele*. Ennek az összefüggésnek a «megmutatását» a matematikában *közvetlen (direkt) bizonyításnak* nevezik. A direkt bizonyítás ugyanis a tételt *közvetlenül* vezeti vissza egyszerűbb praemissa-jára. — Nem hallgathatom el ebben az összefüggésben azt, hogy ma még aligha tudnék magyarázatot adni arra a kérdésre : vajon miért érezték a görögök szükségesnek azt, hogy egy történetileg pontosan meghatározható időszakasztól kezdve a matematikában a konkrét megmutatást a direkt bizonyítás formájával cseréljék föl? Azt hiszem azonban, a probléma megoldását nem is erről az oldalról kell megkísérelnünk. Véleményem szerint ugyanis a matematikai *direkt bizonyítás* — mint erre már más alkalommal is utaltam — a tudományos módszer fejlődésének csak egy *viszonylag későbbi szakaszán lép föl*. A matematikai *indirekt bizonyítás* módszere ennél *valamivel korábbi keletű* lehet. Csakugyan, a legrégibb — de már deduktív! — görög matematikában gyakran találkozunk indirekt bizonyításokkal.[39]Az alábbiakban részletesebben megvizsgálom a régi páros és páratlanról szóló tanításnak egyik indirekt bizonyítását. A probléma, amelyre választ keresek : mit «mutat meg» az indirekt bizonyítás?

[37] Uo. 525 D : ...*οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται*. 526... *περὶ τούτων λέγουσιν ὧν διανοηθῆναι μόνον ἐγχωρεῖ, ἄλλως δ᾽οὐδαμῶς μεταχειρίζεσθαι δυνατόν*.

[38] *K. Reidemeister:* Das exakte Denken der Griechen. Hamburg 1949. 51.

[39] Lásd : *Á. Szabó:* Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden ? Acta Ant. Hung. 4 (1956) 109—152 ; az indirekt bizonyítás kérdéséhez különösen 137 kk.

Euklides IX. könyvének 30. tétele kimondja : *Ha valamely páratlan szám osztója egy páros számnak, akkor ugyanez a páratlan szám osztója az előbbi páros szám felének is.* — Mielőtt azt vizsgálnánk, hogyan bizonyítja be ezt a tételt Euklides indirekt úton, lássuk előbb : hogyan lehet ezt az állítást «szemléltetni», a *ψηφοφορία* segítségével konkréten «megmutatni» a helyességét?[40] Legyen a vizsgált konkrét páros szám *18;* ennek a páros számnak páratlan osztója pl. : *3.* Az idézet tétel azt állítja, hogy a páratlan szám, 3, nemcsak az előbbi párosnak, a *18*-nak, hanem a *18* felének $\left(\frac{18}{2} = 9\right)$ is osztója. Ezt a tényállást kell valamiképpen szemléletessé tennünk. — A *18*-at, amelynek osztója a *3*, felfoghatom úgy mint két szám szorzatát : $18 = 3 \times 6$. Két szám szorzatát viszont «geometrikusan» mint «felületet» ábrázolhatom, mert a felület a «hosszúság» és «szélesség» szorzata. A *18*-as szám tehát — mint 3×6 — a *ψηφοφορία* segítségével a következőképpen ábrázolható :



11. ábra

Az egész «felület» a *18*-at ábrázolja. A függőleges sorokban a *3—3* kő azt mutatja, hogy a *18*-nak mint páros számnak osztója egy páratlan szám. Ha most az egész «felületet» egy függőleges vonallal kétféle osztom, egyszerre látom, hogy a *3*-as szám csakugyan osztója mind a két fél-résznek ; a különbség a két fél-rész között csak annyi, hogy a bal oldalon a páratlan osztót, a *3*-at, két fehér és egy fekete, a jobb oldalon viszont ugyanazt az osztót két fekete és egy fehér kő szemlélteti. Csakugyan igaz tehát a tétel : a páratlan szám, a *3*, nemcsak az egész páros számnak, a *18*-nak, hanem a páros szám felének is osztója. — Látjuk tehát : a tétel konkrét példán nagyon könnyen szemléltethető, azaz bizonyítható is, ha megelégszünk a konkrét látás evidenciájával. De az Euklidesnél fönnmaradt bizonyítás szerzője már nem elégedett meg ilyen konkrét szemléltetéssel ; általános érvényűen, minden elképzelhető esetre vonatkoztatva akarta «megmutatni», hogy állítása igaz. Ezért választott az adott konkrét számok (a *3* és a *18*) helyett absztrakt-általánosakat, *A* és *B*. (Egyébként a választott absztrakt számokat ezúttal is mint vonalszakaszokat «ábrázolta», de magából a bizonyításból már semmit sem tudott láthatóvá tenni!) Gondolatmenete a következő volt ; ha a páratlan szám *A* (= *3*) osztója a páros számnak, *B* (= *18*)-nak, akkor *A* csak azért lehet osztója a *B* felének (a 9-nek) is, mert *B* egy páratlan számnak (a «*három*»-nak) és egy másik *páros számnak* (a «*hat*»-nak) a szorzata. A 11. ábrán látjuk is, hogy a függőleges sorokban páratlan, a vízszintes sorokban azonban *páros számok* vannak ábrázolva. Ez minden esetben így kell hogy legyen, amikor egy páratlan szám osztója egy párosnak. Ha megegyezünk abban, hogy a páratlan szám osztót a függőleges sorokban ábrázoljuk, akkor a vízszintes sorokban csak valamilyen páros számot ábrázolhatunk ; mert ha páratlan szám lenne a vízszintes sorokban is, akkor az egész «felület», az ábrázolt szám maga is páratlan lenne, már

[40] Nagy egészében rekonstruálta már ezt a szemléltetést *O. Becker:* i. m. 538 ; a gondolatmenet plasztikusabbá tétele érdekében részben eltérek *Becker* módszerétől.

pedig nem ilyen esetekről beszél a tétel. Azt kellene tehát általános érvénnyel bebizonyítani, hogy a szóban forgó esetben a vízszintes sorokban *csak páros szám állhat.* Ha ezt bebizonyítottuk, akkor ebből már «eo ipso» következik a vizsgált tétel is.

Euklidesnél a tétel indirekt bizonyításának a gondolatmenete a következő. (Tudjuk már a megelőző tételből — Eucl. El. IX. 19. —, hogy két páratlan szám szorzata maga is páratlan szám.) Azt állítom, hogy páratlan osztó *(A)* és páros osztandó *(B)* esetében a hányados, *Γ*, páros (= nem páratlan) szám. Mert tegyük föl az ellenkezőjét, és ha lehetséges, legyen a *Γ* szám «páratlan» *(λέγω, ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω);* vizsgáljuk meg, mi következnék ebből. Az osztónak és a hányadosnak a szorzata egyenlő az osztandóval. A mi esetünkben az osztó a feltétel értelmében *páratlan szám.* Ha a hányados is «páratlan szám» lenne – ahogy próbaképpen föltettük —, akkor az osztandó maga is, mint két páratlan számnak — az osztónak és a hányadosnak — a szorzata, páratlan lenne. Ez azonban nem lehetséges *(ὅπερ ἄτοπον)*, mert mi éppen abból az esetből indultunk ki, hogy az osztandó *páros szám.* Az a föltevés tehát, hogy a hányados «páratlan szám», téves, mert ellentmondásra vezet. Csak ennek a föltevésnek az ellenkezője lehet igaz : *a hányados páros szám* .Ebből áll Euklides indirekt bizonyítása.

Az indirekt bizonyítás tehát egy *ἀδύνατον*-t vagy *ἄτοπον*-t mutat ki. Nem magát a tételt bizonyítjuk be, hanem az ellenkezőjét cáfoljuk. Azt akartuk bebizonyítani, hogy a *Γ* szám az adott esetben *páros,* de ahelyett, hogy ezt az állítást «szemléletesen megmutattuk» vagy közvetlenül (direkt úton) a praemissa-jára vezettük volna vissza, megmutattuk, hogy ennek az állításnak az ellenkezője hamis, mert *ἄτοπον.* Valamely állítás indirekt bizonyításához tehát mindenekelőtt meg kell fogalmaznunk a tétel ellenkezőjét, hogy aztán megmutathassuk ennek az ellenkező állításnak az abszurd voltát. Ezt az utóbbit Euklides általában a következő sztereotip fordulattal szokta bevezetni : *εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω.*

Érdekes az is, hogy miből derül ki valamely állítás téves volta az indirekt bizonyítás során. Miután fölállítottuk a bebizonyítandó tétellel ellenkező állítást, megpróbáltunk következtetéseket fűzni ehhez az utóbbi állításhoz. Később hamisnak bizonyuló állításunk — hogy ti. a hányados «páratlan szám» — egyik következménye az volt, hogy akkor az osztandónak is «páratlan számnak» kellene lennie. Ez az utóbbi állítás azonban nyilvánvaló *ellentmondás,* mert kiindulási pontunk éppen az volt, hogy *az osztandó páros szám.* A két állítást nem kapcsolhatjuk össze, mert akkor azt kellene mondanunk, hogy «az osztandó *páros szám* és egyszersmind *páratlan szám* is». A gondolatnak ez az önellentmondása mutatta, hogy állításunk, amelyből ez az önellentmondó állítás következett, téves.

Ha már most összegezzük az indirekt bizonyítási módnak említett föltűnő ismertetőjegyeit, önkéntelen is fölmerül a kérdés : mi lehetett az oka annak, hogy a görög matematikusok — *legkésőbb az i.e. 5. század első felében* — a konkrét megmutatással való bizonyítást az indirekt bizonyítási móddal cserélték föl? (A kérdésnek a kiemelt időmeghatározással való összekapcsolását a következő két tény indokolja : 1. Mint O. Becker jól sejtette,[41] a páros és páratlanról szóló tanítás 17 tétele az i.e. 5. század közepe táján, vagy még a század első felében keletkezett. Ebben a 17 tételben viszont nyolcszor vagy

[41] *O. Becker:* Grundlagen der Mathematik etc. 38.

legalábbis hatszor találkozunk indirekt bizonyítással.[42] 2. Mint már említettük, a chiosi Hippokrates az i.e. 5. század közepe táján a puszta szemléletesség helyett logikus bizonyításokra törekedett. A következőkben viszont látni fogjuk, hogy a szemléletességtől való elfordulás és az indirekt bizonyítás alkalmazása milyen szoros kapcsolatban állnak egymással.) — Az előbb föltett kérdésre aránylag könnyen felelhetünk, ha azoknak az eleatáknak a filozófiai tanítására gondolunk, akiknek működése időben is nagyon közel esik a legrégibb, ugyancsak dél-itáliai pythagoreusok működéséhez.

Mint már régen megállapították,[43] az eleai Parmenides a kutatásnak 3 útját különböztette meg : 1. «a létező van» *(τὸ ὂν ἔστιν)* 2. «a létező nincs» *(τὸ ὂν οὐκ ἔστιν)* és 3. «a létező van is meg nincs is» *(τὸ ὂν ἔστι καὶ οὐκ ἔστιν)*. Ezek közül az utak közül Parmenides a harmadikat, mint nyilvánvaló önellentmondást, éppenúgy elveti, mint ahogy Euklides IX. 21 tételének a bizonyítása is elutasítja azt a gondolatot, hogy ugyanaz a szám egyszerre páros és páratlan lehetne. Nem kétséges, hogy a görögöknél az indirekt bizonyítás módszerét — mai tudásunk szerint — Parmenides használta legelőször. Az eleaták azok, akik állításaikat a tétel ellenkezőjének a cáfolatával bizonyítják.[44] Parmenides és az eleaták voltak azok, akik világosan és egyértelműen az ellentmondásmentességet tették meg az igaz állítás kritériumának. Mint Parmenides egy alkalommal mondja : *οὐ γὰρ φατὸν οὐδὲ νοητὸν | ἔστιν ὅπως οὐκ ἔστι*, scil : *τὸ ὄν*, «mert kimondhatatlan és elgondolhatatlan az, hogy a létező ne lenne».[45] Az, amit Parmenides *οὐ φατὸν οὐδὲ νοητόν*-nak nevez, Euklidesnél *ἀδύνατον* vagy *ἄτοπον*.

Nem kétséges, hogy a logikai eljárás mind a két területen — mind a legrégibb görög deduktív matematikában, mind pedig az eleai filozófiában — egy és ugyanaz. Hiszen jellemző Parmenides módszerére, hogy tulajdonképpen egyáltalán nem bizonyítja be az *ὄν* létezését, csak megcáfolja ennek a nemlétezését, mert mint kifejti, a kutatás második és harmadik útja ellentmondásos. Így történik Euklidesnél is minden indirekt bizonyítás. Ezért tehettem legutóbb kísérletet arra, hogy a legrégibb görög matematika logikáját az eleai filozófiára vezessem vissza.[46] Tudom, hogy ez a konstrukció pusztán elvi meggondolás alapján támadható. Azt kérdezhetné valaki : miért ne volna lehetséges ugyanez megfordítva is? Miért ne tanulhatták volna az eleaták a logikát éppen a legrégibb görög matematikusoktól? Deduktív matematika és logika olyan szoros kapcsolatban állanak egymással, hogy ma már alig tudjuk elképzelni : a logika csak kívülről, másodlagosan nyomult volna be az eredetileg empirikus matematikába? Hogy ez mégis csakugyan így volt — a deduktív matematika első görög képviselői a tisztára spekulatív eleai filozófiából vették a logikát — arra döntő bizonyítékom a következő.

Ha a matematikusok a logikát saját területükön, a számokkal és geometriai idomokkal való foglalkozás közben «találták volna föl» — azaz inkább : tudatosították volna magukban, akkor egyáltalán semmi magyarázat sem lenne arra : miért jelentkezik a matematika történetében a logika megjelené-

[42] Vö. *Á. Szabó:* i. m. 140.
[43] Vö. *K. Reinhardt:* i. m. 35 kk. továbbá *Á. Szabó:* Acta Ant. Hung. 1 (1953) 377—410, 2 (1954) 17—62, 243—289 és 3 (1955) 67—103.
[44] Vö. *A. Gigon:* Der Ursprung der griechischen Philosophie, Basel 1945. 251
[45] Fr. 8, 8 kk. *(Diels)*.
[46] *Á. Szabó:* Eleatica (Acta Ant. Hung. 3 [1955] 67—103) és «Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden ?» (Acta Ant. Hung. 4 [1956] 109—152).

sével egyidőben egyersmind *anti-empirikus és szemlélet-ellenes tendencia is?* A görög tudománynak ez a tendenciája egyáltalán nem következik szükségszerűen abból a tényből, hogy egy adott időszakban újfajta bizonyítási technikát, a logikai módszert vezették be. Ellenkezőleg! Éppen azt várnánk: mennyire örülhettek az első görög matematikusok annak, hogy az, amit logikai úton bebizonyítanak, legtöbbször — bár egyáltalán nem mindig! — gyakorlattal, szemlélettel is igazolható. Ehelyett azonban a régi görög matematikusok megvetették és mellőzték mind az empíriát, mind pedig a szemléletes bizonyítást. A matematikusoknak ez az állásfoglalása csak akkor érthető igazán, ha arra gondolunk, hogyan született meg a logikai módszer az eleai filozófián belül. Az eleai logika nem a gyakorlati tapasztalat és az érzékszervek útján nyert megismerés quintesszenciája volt. Éppen megfordítva: ez a logika minden józan tapasztalat és érzéki megismerés *ellenére* jött létre. Mint Parmenides ismeretelméleti programjában hirdette: «Ne hagyd, hogy a sokat tapasztalt megszokás erre az útra kényszerítsen: céltalan látásod, zúgó hallásod és nyelved használatára. Ne ezekkel, értelmeddel döntsd el a sokat vitatott kérdést!»[47] Parmenidesnek pedig azért kellett fölállítania ezt a különös ismeretelméleti programját, mert rájött az érzéki tapasztalás tényeiben (a «keletkezés», «elmúlás», «mozgás» stb. fogalmaiban) rejlő belső ellentmondásra.[48] Csak a spekulatív értelem menthette meg az ellentmondásmentességet, mint a helyes gondolat kritériumát, és ezért lett az értelem egyedüli döntőbíró minden érzéki megismeréssel, tapasztalással szemben. Az első görög matematikusok pedig nemcsak a logikát magát vették át az eleatáktól, hanem ezt az ellenséges magatartást is minden érzéki megismeréssel, gyakorlati tapasztalással szemben; ezért fordultak el a szemlélet evidenciájától is.

Az eleai logikának a deduktív matematika első képviselőire, a pythagoreusokra gyakorolt hatása olyan messzemenő volt, hogy kezdetben egy egészen különös változást is okozott a tudomány fejlődésében. Közismert, hogy a matematikai diszciplinák közül a pythagoreusokat megelőző időben a iónok geometriája bizonyára fejlettebb volt, mint az arithmetika. Thales geometriával foglalkozott; tételei, amelyekről a későbbi hagyomány tudott, mind geometriai tételek. A legrégibb pythagoreusok viszont, úgy látszik, inkább arithmetikával és nem geometriával foglalkoztak. Mint e dolgozat elején láttuk, Jamblichos szerint a legrégibb, «pythagorasi geometriának» mégcsak ἱστορίη és nem μάθημα volt a neve. Ez az elnevezés arra mutat, hogy a geometriát még ebben az időben is *empirikus tudománynak* tartották. A pythagoreusok igazi tudománya kezdetben nem a geometria hanem az arithmetika volt. Platón is azt említi egy alkalommal, hogy legfontosabb tudományuk *a számokról szóló tanítás.*[49] Az egyik pythagoreus, Archytas pedig egyértelműen azt a gondolatot képviselte, hogy az arithmetika, vagy mint ő nevezte: a logisztika, magasabbrendű tudomány, mint a geometria. Mint írja: «A logisztika a tudományosság szempontjából rendkívül magasan áll, különösen a geometriával szemben, minthogy tárgyát ez világosabban kezeli, mint amaz, és ahol a geometria már egyáltalán nem tud tovább bizonyítani, a logisztika még mindig képes a bizonyításra . . .»[50] Ha már most azt kérdezné valaki: mi lehetett

[47] Fr. 1, 34 kk. *(Diels)*.
[48] Vö. *Á. Szabó:* Zur Gesch. der Dialektik des Denkens (Acta Ant. Hung. 2 [1954] 17—62).
[49] Platón, Epinomis 990 C.
[50] Fr. B 4 *(Diels)*. — A töredék magyarázatához *O. Neugebauer:* i. m. 145 kk.

az oka az arithmetika pozitív értékelésének, és ugyanakkor ennek a bizalmatlanságnak a geometriával és a geometriai bizonyítással szemben, akkor legkézenfekvőbb lenne a görög tudománynak arra a «szemlélet-ellenes tendenciájára» hivatkozni, amely a logikával együtt az eleai filozófia öröksége volt. — Úgy gondolom, a pythagoreusok kezdetben korlátlanul érvényesíteni akarták az eleai logikát *minden tekintet nélkül az érzéki tapasztalásra.* Ez a kísérletük azonban csak a számok birodalmában, az arithmetikában vagy más néven logisztikában sikerülhetett. Semmi akadálya sem volt annak, hogy a számokat mint tisztára gondolati elemeket kezeljék. De nem volt ilyen egyszerű a helyzet a geometriában : a geometriai idomokat valamiképpen mégiscsak szemléltetni kellett, az empíriát és a konkrét látást ezen a területen nem lehetett minden további nélkül kikapcsolni. Márpedig ez nagyon kényelmetlenül érinthette azokat az első pythagoreusokat, akik minden áron tisztára elméletiek, deduktívek akartak maradni. Ezért érezték magukat sokkal otthonosabban az arithmetikában, mint a geometriában. — Szinte már valóságos «tragédia» volt, amikor nem sokkal Archytas után mégiscsak vissza kellett térniök a geometriához. Fölismerték az irracionális mennyiségi viszonyokat, és ezért kénytelenek voltak az egész matematikát «geometrizálni».[51] Ami pedig a geometria őseredeti szemléletességét illeti, nem maradt más választásuk, minthogy ezt valahogy axiomatikusan megalapozzák, és amennyire csak lehet *elkendőzzék.* Ha már semmiképpen sem iktatható ki a geometriából a szemléletesség, legalább ne legyen feltűnő! Ezért olyan kétértelmű a *δείκνυμι* terminus Euklidesnek azokban a könyveiben, amelyek valóságos geometriai, vagy teljes egészükben «átgeometrizált» tételekkel foglalkoznak. Mert ennek a termínusnak a szerző szándéka szerint a tisztára csak logikai bizonyítást kellene jelölnie. Hiszen ő már csak gondolati úton akarja «megmutatni» tételeinek a helyességét. De a geometriában a logikai bizonyításon keresztül nagyon sokszor átcsillan az őseredeti szemléletesség, a láthatóvá tevés ; ilyenkor pedig a *δείκνυμι* szó is visszakapja eredeti matematikai jelentését : «konkréten láthatóvá tenni».

[51] *O. Neugebauer:* i. m. 249 kk.