MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 20/1978.

AZ "OPTIMALIZÁLÁS MINMÁLIS INFORMÁCIÓVAL" MÓDSZER ALLOKÁCIÓS FELADATOKRA VONATKOZÓ ALKALMAZÁSÁNAK EGY ÁLTALÁNOSITÁSA

Farkas Zoltán

Bevezetés

A gyakorlat által felvetett optimális szétosztási (allokációs) problémák jelentős részének matematikai modellje olyan tipusu szélsőértékfeladat formájában fogalmazható meg, amelyben a rendelkezésre álló információtartalom nem elegendő konkrét célfüggvény megkonstruálásához. Az ilyen esetekben használatos közelitő megoldási módszerek helyett itt egy olyan más jellegű módszer egy általánositott változatát alkalmazzuk, amelyet egy más tipusu feladatra és speciálisabb esetre DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR [1] cikkében vetett fel, és [2] -ben használta rá az "optimalizálás minimális információval" elnevezést, majd szerző [3], [4], [5]-ben kiterjesztette allokációs feladatokra is.

A közlendő algoritmusok az emlitetteknél általánosabb tipusu allokációs feladatok megoldására alkalmazhatók. Az irodalomban elég részletesen és általános formában tárgyalt ilyen problématipusok mindegyike feltételezi a célfüggvény konkrét alakjának ismeretét (ld. pl. R. BELLMAN [7] könyvének tárgyalásmódját), sőt igen erős feltételek – pl. differenciálhatóság, stb. – teljesülését (vö.: W. KARUSH [8] és T.A. SAATY – J. BRAM [9]), itt viszont ilyen jellegü feltételekkel nem élünk.

A következőkben módszert és ehhez kapcsolódó megoldási algoritmust is adunk jól meghatározott – de igen általános – tulajdonságokkal rendelkező, egyébként konkrét alakjában ismeretlen célfüggvények – bizonyos tipusu – feltételes szélsőértékhelyeinek meghatározására. Könnyen programozható algoritmus megadása a célunk.

Az ilyen megoldás legfőbb újszerüsége és legnagyobb előnye tehát az, hogy módszert és eljárást ad egy teljes függvényosztály elemei feltételes szélsőértékhelyeinek meghatározására.

Bevezetőben lássunk egy olyan allokációs probémát, amelynek kapcsán kialakitunk majd egy matematikai modellt, és ebben a felvetett problémára is érvényes megoldást (algoritmust) adunk meg.

Tételezzük fel, hogy egy termelő berendezés – mint erőforrás – m számu különféle terméket állit elő $\underline{a} \epsilon R^m$ szintü összmennyiségben, és ezekből n számu fogyasztónak szállit rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n$ szintü mennyiségeket

$$(\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i) \qquad \text{ahol az} \qquad \underline{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \epsilon R^m \qquad i = 1, \ldots, n$$

vektorokban valamely $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ komponens értéke a termelő berendezéstől az i-edik fogyasztónak a j-edik termékből szállitott mennyiség.

Gyakran igény merül fel egy-egy fogyasztó felhasználási szintjének a növelésére, miközben a többi felhasználási szint sem csökkenhet. Ennek teljesitése bizonyos beruházási ráforditást igényel, amelynek az egyes fogyasztók közötti elosztása – a termékmennyiség elosztásától függően – különböző lehet. A ráforditás mértéke – valamilyen egységben mérve – számos tényező függvénye lehet. Igy pl. függhet a fogyasztónak az erőforrástól való távolságától, a rendelkezésre álló munkaeszközök szinvonalától, stb. A ráforditások tehát a befolyásoló tényezők függvényében vizsgálhatók, azonban ezek annyira sokrétü hatást jelenthetnek, hogy konkrét függvénykapcsolatok megállapitása a legtöbb esetben nem lehetséges. Ezért más utat kell keresnünk a megoldást illetően.

A felmerülő problémák egy jelentős részénél szerencsére indokoltak és célszerünek látszik az a heurisztikus feltételezés, hogy egy $\underline{a}_1$ felhasználási szintnek valamely $\underline{b}_1 > \underline{a}_1$ szintre való növelése nem követelhet nagyobb ráforditást, mint egy $\underline{a}_2$-ről $\underline{b}_2$-re való növelés, ha itt $\underline{a}_1 < \underline{a}_2$, és még fennáll $\underline{b}_1 - \underline{a}_1 = \underline{b}_2 - \underline{a}_2$. Tehát a ráforditásokat kifejező függvénynek rendelkeznie kell azzal a tulajdonsággal, hogy nagyobb kapacitásszintnek ugyanannyival történő megnövelése nagyobb ráforditást igényel, mint egy alacsonyabb szintnek a megnövelése. Ez másképpen megfogalmazva azt jelenti, hogy egy tökéletesebb termelő berendezés fajlagos tökéletesitése nagyobb ráforditást igényel, mint egy kevésbé tökéletes berendezésé. Ez a tulajdonság fontos lesz a modellalkotás során, mert alapját képezi bizonyos lényegi összefüggések megállapitásának.

Felmerül természetesen az az alapvető kérdés, hogy egy $\underline{a}$ kapacitásszintnek egy $\underline{b} > \underline{a}$ szintre való növelése során az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ szinteket külön-külön hogyan kell megnövelni – feltéve, hogy a változatlanul hagyást igen, a csökkentés viszont nem engedjük meg – rendre valamilyen

$$\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_i, \dots, \underline{b}_n \text{ szintre } (\underline{b}_i \geqslant \underline{a}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} \underline{b}_i)$$

ahhoz, hogy ezt minimális ráforditással érjük el. Ez – a célfüggvény konkrét ismerete hiányában – azon "minimális információ" ismeretében kell megválaszolnunk, amelyet az imént vázlatosan leirtunk.

Emlitést érdemel, hogy az imént vázolt probléma egy speciális (m forráshelyü, n felvevőhelyü), de – nemlineáris célfüggvénye miatt – bizonyos értelemben általánositott szállitási feladatként is interpretálható.

Megemlitjük még, hogy az [1] alatt hivatkozott cikkbeli megbizhatóságelméleti feladat egy általánositásához juthatunk, ha a termelő berendezések különböző paramétereik szerinti müködési megbizhatóságait akarjuk adott szintről megnövelni úgy, hogy az eredő megbizhatóság egy – az eredetinél nagyobb – adott vektor. A közlendő megoldási algoritmusból levezethető erre az általánosabb esetre vonatkozó megoldás is.

A szerző ezúton is szeretne köszönetet mondani [1] cikk szerzőinek korábbi problémafelvetéseikért, és szakmai támogatásukért.

A problémakör matematikai leirása

Jelölje $M(\underline{x},\underline{y})$ egy olyan ráforditás mértékét, amelyet akkor végzünk, ha a termelési volumen $\underline{x}$ szintjét $\underline{y}$-ra módositjuk úgy, hogy az $\underline{x}$ vektorral jelölt szint egyetlen komponensét sem csökkentjük ($\underline{0} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{y} \leqslant \underline{\omega}$, $\underline{0},\underline{\omega},\underline{x},\underline{y} \epsilon R^m$, $\underline{\omega}$ adott kapacitáskorlát).

A továbbiakban az $M(\underline{x},\underline{y})$ függvényt nevezzük munka- vagy beruházási ráforditásfüggvénynek, vagy röviden csak *ráforditásfüggvénynek,* ha minden olyan $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ vektorok esetén teljesülnek rá az

1^0 $\quad 0 < M(\underline{x},\underline{y}) < \infty \qquad (\underline{0} \leqslant \underline{x} < \underline{y} < \underline{\omega})$

2^0 $\quad M(\underline{x},\underline{y}) + M(\underline{y},\underline{z}) = M(\underline{x},\underline{z}),$

feltételek, amelyekre $\underline{0} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{y} \leqslant \underline{z} < \underline{\omega}$ és $\underline{0},\underline{\omega},\underline{x},\underline{y},\underline{z} \epsilon R^m$ ($\underline{\omega}$ adott)

Megjegyzések

1. Nyilvánvaló, hogy az $M(\underline{x},\underline{y})$ függvény csak azon

$$(\underline{x},\underline{y}) \epsilon (X_{i=1}^{m}[0,\omega_i]) \times (X_{i=1}^{m}[0,\omega_i])$$

rendezett párokra van értelmezve, amelyekre az $\underline{x} \leqslant \underline{y}$ rendezési reláció teljesül, és hogy ez $m = 1$ esetén mindig fennáll. Ilyen vonatkozásban is általánositása ez az [1]-beli modellnek, amely az itteni vektorváltozók helyett skalárváltozókat használ.

2. Az $M(\underline{x},\underline{y})$ függvényre $\underline{x} < \underline{y} < \underline{z}$ esetén az alábbi tulajdonságok könnyen beláthatók:

1. $M(\underline{x},\underline{y}) < M(\underline{x},\underline{z})$
2. $M(\underline{x},\underline{z}) > M(\underline{y},z)$
3. $M(\underline{x},\underline{x}) = 0$
4. $M(\underline{x},\underline{y}) = M(\underline{0},\underline{y}) - M(\underline{0},\underline{x})$

Az $M(\underline{0},x) = H(\underline{x})$ jelölés bevezetésével a 4. tulajdonság egyszerübben igy irható fel:

4' $M(\underline{x},\underline{y}) = H(\underline{y}) - H(\underline{x})$,

tehát a $H(\underline{x})$ függvény monoton növekvő, és $H(\underline{0}) = 0$.

A 2^0 feltételből ugyanis az 1^0-et is figyelembevéve:

$$0 < M(\underline{y},\underline{z}) = M(\underline{x},\underline{z}) - M(\underline{x},\underline{y})$$

és

$$0 < M(\underline{x},\underline{y}) = M(\underline{x},\underline{z}) - M(\underline{y},\underline{z}),$$

ami ekvivalens az 1. és 2. tulajdonsággal.

Az $\underline{x} = \underline{y} = \underline{z}$ esetben a 2^0 feltétel a 3. tulajdonságot adja. Végül az $\underline{x} = \underline{0}$ választással, $\underline{y} = \underline{x}$ és $\underline{z} = \underline{y}$ helyettesitéssel a 2^0 feltétel éppen 4. alakban irható. Ennek az állitásnak a megforditottja is igaz, amelyet lemma formájában mondunk ki.

1. Lemma. *Ha valamely $M(\underline{x},\underline{y})$ függvény rendelkezik az 1.–4. tulajdonságokkal, akkor kielégiti az 1^0 és 2^0 feltételeket is. (Bizonyitás az [1]-beli analógiájára végezhető el, skalárok helyett vektorokkal.)*

2. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az $M(\underline{x},\underline{y})$ függvényre az*

$$1^0 \quad 0 < M(\underline{x},\underline{y}) < \infty, \qquad \underline{0} < \underline{x} < \underline{y} < \underline{\omega}$$

$$2^0 \quad M(\underline{x},\underline{y}) + M(\underline{y},z) = M(\underline{x},\underline{z}), \underline{0} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{y} \leqslant \underline{z} < \underline{\omega}.$$

összefüggések, ahol $\underline{0},\underline{x},\underline{y},\underline{z},\underline{\omega} \epsilon R^m$.
Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$3^0 \quad M(\underline{x},\underline{x} + \underline{\delta}) \leqslant M(\underline{y},\underline{y} + \underline{\delta})$$

egyenlőtlenség fennálljon az, hogy

$$3^{0'} \quad M(\underline{x},\underline{y}) \leqslant M(\underline{x} + \underline{\delta}, \underline{y} + \underline{\delta})$$

egyenlőtlenség teljesüljön a $\underline{0} \leqslant \underline{x} < \underline{y} < \underline{\omega}$ és $\underline{\delta} > \underline{0}$ (de $\underline{y} + \underline{\delta} < \underline{\omega}$) vektorok esetén.

Bizonyitás. Közvetlenül az értelmezésből következik, hiszen

$$3^0 \quad H(\underline{x} + \underline{\delta}) - H(\underline{x}) \leqslant H(\underline{y} + \underline{\delta}) - H(\underline{y})$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$3^0 \quad H(\underline{y}) - H(\underline{x}) \leqslant H(\underline{y} + \underline{\delta}) - H(\underline{x} + \underline{\delta})$$

3. Lemma. *A 1^0 és 2^0 feltételeknek eleget tevő függvényekre teljesüljön meg az alábbi feltétel:*

$$3^0 \quad M(\underline{x},\underline{x} + \underline{\delta}) \leqslant M(\underline{y},\underline{y} + \underline{\delta})$$

minden $\underline{0} \leqslant \underline{x} < \underline{y} < \underline{\omega}$ és tetszöleges $\underline{\delta} : \underline{0} < \underline{\delta} < \underline{y} + \underline{\delta} < \underline{\omega}$ esetén.

Ekkor $H(\underline{x})$ konvex függvény és 3^0-ban egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $H(\underline{x})$ egyúttal lineáris is.

Megjegyzés.

A 3^0 feltétel az [1] cikkbeli analóg feltétellel ellentétben megengedi az egyenlőséget is, tehát az ottaninál ilyen vonatkozásban is általánosabb feltételt fogalmaz meg.

Bizonyitás.

Az előző megjegyzésben foglaltak egyuttal azt is jelentik, hogy a bizonyitás is bővül az [1]-belihez képest. Bármely $\underline{\delta} \geqslant \underline{o}$ mellett, tetszőleges $\underline{x},\underline{y} : \underline{x} < \underline{y}$ esetén teljesül a $H(\underline{x} + \underline{\delta}) - H(\underline{x}) \leqslant H(\underline{y} + \underline{\delta}) - H(\underline{y})$ egyenlőtlenség, igy speciálisan az $\underline{x} + \underline{\delta} = \underline{y}$ feltételnek eleget tevő értékekre is teljesülnie kell.

Ez utóbbi összefüggést viszont tetszőleges $\underline{x}_1 < \underline{x}_2$ esetén kielégitik az $\underline{x} = \underline{x}_1$, $\underline{y} = (\underline{x}_1 + \underline{x}_2)/2$, $\underline{\delta} = (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)/2$ egyenlőségekkel definiált értékek. Tehát igy fennáll, hogy

$$H(\underline{x}_1 + \underline{\delta}) - H(\underline{x}_1) \leqslant H(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2} + \delta) - H(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2})$$

vagyis

$$H(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}) \leqslant \frac{H(\underline{x}_1) + H(\underline{x}_2)}{2}$$

Ez viszont éppen a konvexitás definiciója. Egyenlőség nyilván akkor és csak akkor áll, ha 3^0-ban is az áll.

Még hátra van annak belátása, hogy ez utóbbi akkor és csak akkor teljesül tetszőleges $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ vektorokra, ha $H(\underline{x})$ lineáris függvény.

Mielőtt rátérnénk a bizonyitásra megállapithatjuk, hogy $H(\underline{x})$ folytonos függvény. Az analizisből jól ismert tény ugyanis, hogy minden konvex függvény folytonos.
(Ebből már következik, hogy $M(\underline{x},\underline{y})$ is folytonos.)

Hogy lineáris $H(\underline{x})$ estén egyenlőség áll, az trivialitás. Forditott irányu állitásunk igazolásához elég bizonyitanunk, hogy az $M(\underline{x},\underline{x} + \underline{\delta}) = M(\underline{y},\underline{y} + \underline{\delta})$, vagy ami ugyanaz, a

$$H(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}) = \frac{H(\underline{x}_1) + H(\underline{x}_2)}{2}$$

függvényegyenletet kialégitő $H(\underline{x})$ függvények megoldásai eleget tesznek a

$$H(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = H(\underline{x}_1) + H(\underline{x}_2)$$

ismert Cauchy-tipusu függvényegyenletnek. Ugyanis $H(\underline{x})$ folytonos lévén ez utóbbiak – mint ismeretes – csak $H(\underline{x}) = c \cdot \underline{x}$ alaku lineáris megoldása lehetséges. (V.ö.: ACZÉL JÁNOS [6])

Viszont a feltételezés szerint:

$$H(\underline{x}_1) + H(\underline{x}_2) = 2 \cdot H(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}) = 2 \cdot H(\frac{(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) + \underline{0}}{2}) =$$

$$= 2 \cdot \frac{H(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) + H(\underline{0})}{2} = H(\underline{x}_1 + \underline{x}_2),$$

amivel állitásunkat igazoltuk.

Megjegyzés.

Ha egy függvény konvex, akkor létezik legalább egyoldali deriváltja is. Deriválhatóság azonban nyilvánvalóan nem következik a konvexitásból, mert pl. törtvonalak által meghatározott konvex függvény töréspontjaiban csakis egyoldali derivált létezik.

A továbbiakban nem használjuk fel a $H(\underline{x})$ függvényeknek még ezen utóbbi tulajdonságát sem, pusztán a III. Lemmában bizonyitottakat.

Elnevezés.

Az 1^0, 2^0, 3^0 feltételeknek eleget tevő $M(\underline{x},\underline{y})$ függvényeket nevezzük megengedett (munka-, vagy beruházási) ráforditásfüggvénynek.

Megjegyzés.

Minden monoton nemcsökkenő konvex $H(\underline{x})$ függvényből megengedett ráforditásfüggvény adódik az $M(\underline{x},\underline{y}) = H(\underline{y}) - H(\underline{x})$ definició révén.

A bevezetőben példaként leirt allokációs problémák kapcsán a megengedett ráforditásfüggvényekre általánosan megformulázható problémakör: keressük a

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(\underline{x}_i,\underline{y}_i) \qquad (\text{ahol } M_i(\underline{x}_i\underline{y}_i) = M(\underline{x}_i\underline{y}_i), \quad i = 1,2, \dots, n)$$

tipusu célfüggvények feltételes minimumhelyeit az

$$(S) \qquad \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i = \underline{y} \qquad (\text{vagy } \prod_{i=1}^{n} y_i^{(j)} = y^{(j)}, j = 1, \dots, m)$$

tipusu feltétel mellett, ahol $\underline{0} \leqslant \underline{x}_i < \underline{\omega}$, $\underline{0} < \underline{y}_i < \underline{\omega}$, $\underline{x}_i \leqslant \underline{y}_i$ ($\underline{\omega}$ adott), valamint $M_i(\underline{x}_i\,\underline{y}_i)$ megengedett ráforditásfüggvény minden $i = 1,2, \dots, n$ esetén,

$$\underline{y} \quad (\underline{y} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i, \text{ vagy } [y_i^{(j)} > \prod^{n} x_i^{(j)}]_{j=1}^{m}) \quad .$$

pedig megadott konstans vektor, az un. kapacitásvektor. Mint a későbbiek során fogjuk látni, a fenti "szorzat-tipusú" feltétellel megfogalmazható feladat visszavezethető az "összeg-tipusú" feltételes feladat megoldására.

A probléma megoldása, optimalizálási algoritmusok

Abban az esetben, ha a megengedett ráforditásfüggvény definiálásakor az $\underline{x}_i$ és $\underline{y}_i$ közt semmiféle egyenlőtlenségi reláció teljesülését nem követelnénk meg, akkor a probléma megoldása leegyszerüsödne. (A bevezetőben emlitett gyakorlati problémára vonatkozóan is lényeges kikötés volt az $\underline{a}_i \leqslant \underline{b}_i$ feltétel teljesülése!)

Különösen fennáll ez, ha az egyébként is szükségessé váló $M_i(\underline{x}_i,\underline{y}_i) = M(\underline{x}_i,\underline{y}_i)$ feltevéssel élünk $(i = 1,2, \ldots, n)$. Ekkor ugyanis a konvex függvényekre érvényes Jensen-egyenlőtlenség folytán az következne, hogy

$$(2) \qquad n \cdot H\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} H(\underline{y}_i)$$

Figyelembe véve azt, hogy $H(\underline{x})$ monoton növekvő függvény, a baloldalnak ott van minimuma, ahol a

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i$$

kifejezésnek. Az (s) tipusu feltétel mellett ez konstans, és igy az

$$(3) \qquad n \cdot H(\frac{\underline{y}}{n}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} H(\underline{y}_i)$$

egyenlőtlenség miatt az $\underline{y}_i = \frac{\underline{y}}{n}$ minimumhelyet ad $(i = 1,2, \ldots, n)$. Az $\underline{x}_i \leqslant \underline{y}_i (i = 1,2, \ldots, n)$ reláció előirása esetén azonban ennél bonyolultabb megoldó algoritmussal lehet csak meghatározni a minimumhelyet. Erre vonatkozik a következő tétel.

Tétel.

Legyen $M_i(\underline{x}_i,\underline{y}_i) = M(\underline{x}_i,\underline{y}_i)$ $i = 1,2, \ldots, n$ *megengedett ráforditásfüggvény (tehát az* $\underline{x}_i \leqslant \underline{y}_i$ *egyenlőtlenség teljesüljön minden* $i = 1,2, \ldots, n$ *eseten). Legyenek továbbá az* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n \in R^m$ $(\underline{0} \leqslant \underline{x}_1 \leqslant \ldots \leqslant \underline{x}_n < \underline{\omega})$, *valamint az* $\underline{y} \in R^m$ $(\underline{y} > \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i)$ *vektorok rögzitve. A*

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} M(\underline{x}_i, \underline{x}_i + \delta_i)$$

függvénynek a $[\underline{0},\underline{\omega}]$ *intervallumban a* $\underline{\delta}_1 \geqslant \underline{0}$, $i = 1,2, \ldots, n$, továbbá az

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1) = \underline{y}$$

feltétel teljesülése esetén felveszi minimumát, és minimuhelyeket az $M(\underline{x},\underline{y})$ *függvény konkrét alakjától függetlenül meghatározhatunk, pl. a következő algoritmussal:*

Algoritmus: a feltételeket teljesitő (4) célfüggvény minimumát a

$$(6)\qquad \underline{\delta}_i^* = \begin{cases} \frac{1}{j}(\underline{y} - \sum_{\lambda=j+1}^{n} \underline{x}_\lambda) - \underline{x}_1, & \text{ha} \quad i = 1,2,\ldots,j \\ \underline{0}, & \text{ha} \quad i = j+1,\ldots,n \end{cases}$$

vektorrendszeren biztosan felveszi, feltéve, hogy létezik olyan j küszöbindex, amellyel a

$$(7)\qquad \underline{s}_j < \underline{y} \leqslant \underline{s}_{j+1}$$

egyenlőtlenség teljesül. A legkisebb ilyen j értéket a következő vektorrendszerből határozhatjuk meg:

$$(8)\qquad \begin{array}{lcl} \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots & + \underline{x}_n & = \underline{s}_1 \\ \quad 2\underline{x}_2 + \underline{x}_3 + \ldots & + \underline{x}_n & = \underline{s}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \qquad j \cdot \underline{x}_j + \underline{x}_{j+1} + \ldots & + \underline{x}_n & = \underline{s}_j \\ \qquad (j+1)\underline{x}_{j+1} + \ldots & + \underline{x}_n & = \underline{s}_{j+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & n\underline{x}_n & = \underline{s}_n \\ & (n+1)\underline{y} & = \underline{s}_{n+1} \end{array}$$

Ha a $H(\underline{x}) = M(\underline{0},\underline{x})$ függvény mindenütt szigorúan konvex (vagy ami esetünkben ugyanaz: sehol sem lineáris), akkor (6) a tételbeli minimumfeladat egyetlen megoldása.

Bizonyitás.

Előzetesen megemlitjük, hogy a (8) egyenletek a következő rekurziv formában is megadhatók:

$$\underline{s}_1 = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$$

$$(8')\qquad \underline{s}_{i+1} = \begin{cases} (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i)i + \underline{s}_i, & \text{ha} \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ (n+1)\underline{y}, & \text{ha} \quad i = n \end{cases}$$

Ebből viszont közvetlenül következik, hogy

$$\underline{s}_1 \leqslant \underline{s}_2 \leqslant \ldots \leqslant \underline{s}_j \leqslant \underline{s}_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant \underline{s}_n \leqslant \underline{s}_{n+1}$$

Vagyis az, hogy a (7) egyenlőtlenség annak (8)-beli értelmezésével együtt valóban egy és csak egy olyan j küszöbindexet definiál, ameddig bezárólag az x_i vektorokat meg kell növelni, és a hátralévőket változatlanul kell hagyni a tételben optimálisnak mondott megoldás előállításához. Erre a megoldásra tehát teljesül:

$$(9) \qquad \frac{1}{j}(\underline{y} - \sum_{\lambda=j+1}^{n} \underline{x}_\lambda) = \underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^* = \ldots = \underline{x}_j + \underline{\delta}_j^* = \underline{z},$$

amelyre $j < n$ esetén

$$\underline{z} \leqslant \underline{x}_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant \underline{x}_n$$

$j = n$ esetén pedig $\underline{y}/n = \underline{z} > \underline{x}_n$

Igen könnyen ellenőrizhető, hogy ez megengedett (a feltételrendszert kielégitő) megoldás. Az is nyilvánvaló, hogy a (4) célfüggvénynek ugyanott van minimuma, mint a

$H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i)$ függvénynek, továbbá, hogy utóbbinak a $[\underline{0},\underline{\omega}]$ zárt intervallumban az adott feltételek mellett létezik minimuma.

A tétel most következő bizonyitása során azt a két alapvető esetet különböztessük meg, hogy $j < n$, vagy $j = n$.

Kezdjük a $j = n$ esèttel. Ekkor közvetlenül alkalmazható a Jensen-egyenlőtlenség, hiszen az $\underline{x}_i$ vektorok mindegyike megnövelve szerepel a (6) alatt megadott vektorrendszerben.

Definiálja tehát a $\underline{\delta}_i$ $i = 1, \ldots, n$ vektorrendszer a minimumfeladat tetszőleges megengedett megoldását. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^*) = n \cdot H\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^*)}{n}\right) = nH\left(\frac{\underline{y}}{n}\right) =$$

$$(10) \qquad = n \cdot H\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i)}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i)$$

vagyis (6) valóban optimális megoldást szolgáltat.

Ha a $\{\underline{\delta}_i\}$ vektorrendszer nem azonos $\{\underline{\delta}_i^*\}$-gal $(i = 1, \ldots, n)$, és a konvexitás (vagyis a 3^0 feltételi egyenlőtlenség) szigorú formájában teljesül, akkor a (10)-beli egyenlőtlenség is szigoru formában teljesül, vagyis (6) az egyedüli megoldás.

Most térjünk át a $j < n$ esetbeli bizonyitásra, amelyben az előző eset bizonyitásával ellentétben teljes indukciót használunk. Itt nyilván csak az $n \geqslant 2$ eset jön számitásba. $n = 2$ esetén (ha tehát $\underline{s}_1 < \underline{y} < \underline{s}_2$) pedig a (6) vektorrendszer a következő tulajdonságú:

$$\underline{y} - \underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^*$$

Vagyis az $\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^*$ vektort olyan $\underline{\Delta}$-val csökkentve, hogy $\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^* - \underline{\Delta} \geqslant \underline{x}_1$ maradjon, és ezzel a $\underline{\Delta}$-val növelve az $\underline{x}_2$ vektort (tehát egy tetszőleges megengedett megoldást előállitva), az $M(\underline{x})$ függvény 3^0 tulajdonsága miatt a

$$H(\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^*) + H(\underline{x}_2) \leqslant H(\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^* - \underline{\Delta}) + H(\underline{x}_2 + \underline{\Delta})$$

egyenlőtlenség adódik. Tehát a (6) algoritmus $n = 2$ esetén optimális megoldást ad, és $H(\underline{x})$ szigorú konvexitása (vagyis a 3^0-ban a szigorú egyenlőtlenség mindenütt való teljesülése) esetén ez az egyedüli megoldás.

Most tételezzük fel, hogy tetszőleges $n = k$ esetén a (6) vektorrendszer valóban optimális megoldást szolgáltat, és bizonyitsuk ezt be ezt $n = k + 1$ esetére is.

Legyen $\underline{y} = \underline{y}^{(n)}$, és jelölje a (6) algoritmus révén – az n paraméter függvényében tekintve – felirt megengedett megoldást az

$$\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(n)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

vektorrendszer, azon küszöbindexet pedig, ameddig bezárólag az $\underline{x}_i$ vektorokat meg kell növelni: j_n. Ekkor az $n = k + 1$ esetben ($j_{k+1} < k + 1$ feltételezése miatt):

$$\frac{1}{j_{k+1}} \left(\underline{y}^{(k+1)} - \sum_{\lambda = j_{k+1}+1}^{k} \underline{x}_\lambda\right) = \underline{x}_1 + \underline{\delta}_1^{(k+1)} = \underline{x}_2 + \underline{\delta}_2^{(k+1)} = \ldots = \underline{x}'_{j_{k+1}} + \underline{\delta}^{(k)}_{j_{k+1}} \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant \underline{x}_{j_{k+1}+1} \leqslant \ldots \leqslant \underline{x}_{k+1},$$

vagyis $\underline{\delta}_{k+1}^{(k+1)} = \underline{0}$ biztosan teljesül. Azt kell belátnunk, hogy a (12) vektorrendszer optimális megoldást szolgáltat.

Az $j = n$ esetére adott korábbi bizonyitás és az első indukciós feltevés alapján az a tény könnyen belátható, hogy az $\underline{x}_{k+1}$ vektor elhagyásával keletkező $\underline{y}^{(k)} = \underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1}$ kapacitásvektorral definiálható feladat (amikoris $n = k$) (6) vektorrendszer által meghatározott optimális megoldása megegyezik a (11) megengedett megoldás első k komponensével (ami egyuttal azt is jelenti, hogy a (6) algoritmus által a két szóbanforgó feladatra meghatározott küszöbindex megegyezik: $j_{k+1} = j_k$), tehát

$$\underline{x}_i^{(k+1)} + \underline{\delta}_i^{(k+1)} = \underline{x}_i^{(k)} + \underline{\delta}_i^{(k)}, \quad \text{ha} \quad i = 1,2,\ldots,k$$

Térjünk most át a célfüggvény vizsgálatára. Jelölje $F_{k+1}(\underline{y}^{(k+1)})$, illetve $F_k^*(\underline{y}^{(k)} - \underline{x}_{k+1})$ és $f_k(\underline{y}^{(k)} - \underline{x}_{k+1})$ rendre az $n = k + 1$, illetve $n = k$ esetbeli feladat egy – a (6) vektorrendszer által meghatározott – megengedett, illetve optimális és tetszőleges megengedett megoldáshoz tartozó célfüggvényértékeket (az argumentumok rendre a megfelelő kapacitásvektorok). Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} F_{k+1}(\underline{y}^{(k+1)}) &= \sum_{i=1}^{k+1} H(x_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) + H(\underline{x}_{k+1}) = \\ &= F_k^*(\underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1}) + H(\underline{x}_{k+1}) \leqslant \\ &\leqslant f_k(\underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1}) + H(\underline{x}_{k+1}) = f_{k+1}(\underline{y}^{(k+1)}) \end{aligned} \tag{13}$$

Eszerint tehát a (6) algoritmus tetszőleges olyan megengedett megoldások közül optimális megoldást ad $n = k + 1$ esetén, amelyben $\underline{\delta}_{k+1}^{(k+1)} = \underline{0}$.

Most bebizonyitjuk, hogy azon megengedett megoldások közül, amelyekben $\underline{\delta}_{k+1} > \underline{0}$, mindegyik nem kisebb (szigorú konvexitása esetén határozottan nagyobb) célfüggvényértékét szolgáltat a (6) vektorrendszer által meghatározottnál.

Legyen ugyanis egy ilyen tulajdonságú, de egyébként tetszőlegesen megengedett vektorrendszer (mint megengedett megoldás) a következő:

$$\underline{x}_1 + \underline{\delta}_1,\ \underline{x}_2 + \underline{\delta}_2, \ldots, \underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1},$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{k} (\underline{x}_i + \underline{\delta}_i) = \underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1} - \underline{\delta}_{k+1}, \quad \text{és} \quad \underline{\delta}_{k+1} > \underline{0}$$

A célfüggvényre áttérve, használjuk a korábbi jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(\underline{y}^{(k+1)}) &= f_k(\underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1} - \underline{\delta}_{k+1}) + H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) \overset{\text{def}}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i) + H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) \geqslant \text{(indukciós feltevés)} \\
&\geqslant F_k^*(\underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1} - \underline{\delta}_{k+1}) + H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) \overset{\text{def}}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{j_k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) + \sum_{i=j_k+1}^{k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) + H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) \geqslant \qquad (14) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{j_k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) + \sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) + \sum_{i=j_{k+1}+1}^{k} H(\underline{x}_i) + H(\underline{x}_{k+1}) \overset{\text{def}}{=} \\
&= F_k^*(\underline{y}^{(k+1)} - \underline{x}_{k+1}) + H(\underline{x}_{k+1}) \overset{\text{def}}{\geqslant} F_{k+1}^*(\underline{y}^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

A (14) egyenlőtlenség közül csak a második szorul bizonyitásra. Ez viszont pontosan akkor teljesül ha

$$
\sum_{i=1}^{j_k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) + \sum_{i=j_k+1}^{k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) + H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) \geqslant
$$

$$
\geqslant \sum_{i=1}^{j_k} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) + \sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) + \sum_{i=j_{k+1}+1}^{k} H(\underline{x}_i) + H(\underline{x}_{k+1}).
$$

Mivel $i > j_k$ esetén $\underline{\delta}_i^{(k)} = \underline{0}$, továbbá $i > j_{k+1}$ esetén $\underline{\delta}_i^{(k+1)} = \underline{0}$, ezért elegendő a következő egyenlőtlenséget igazolni:

$$
H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) - H(\underline{x}_{k+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{j_{k+1}} (H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) - H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)})). \qquad (15)
$$

Ehhez osszuk fel az $[\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}]$ intervallumot rendre a

$$
\underline{\delta}_1^{(k+1)} - \underline{\delta}_1^{(k)}, \underline{\delta}_2^{(k+1)} - \underline{\delta}_2^{(k)}, \ldots, \underline{\delta}_i^{(k+1)} - \underline{\delta}_i^{(k)}, \ldots, \underline{\delta}_{j_{k+1}}^{(k+1)} - \underline{\delta}_{j_{k+1}}^{(k)}
$$

hosszuságú

$$
[\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_0, \underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_1], \ldots, [\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_{i-1}, \underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_i], \ldots, [\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_{j_{k+1}-1}, \underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_{j_{k+1}}]
$$

intervallumokra, ahol a $\underline{\Delta}_i$ vektorokat a következő rekurziv összefüggéssel adhatjuk meg:

$$\underline{\Delta}_0 = \underline{0},\ \underline{\Delta}_i = \underline{\Delta}_{i-1} + (\underline{\delta}_i^{(k+1)} - \underline{\delta}_i^{(k)}), \qquad i = 1,2,\ldots, j_{k+1}$$

Ez a konstrukció lehetővé teszi a következő azonosság felirását:

$$(16) \qquad H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\delta}_{k+1}) - H(\underline{x}_{k+1}) \equiv \sum_{i=1}^{j_{k+1}} (H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_i) - H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_i - (\underline{\delta}_i^{(k+1)} - \underline{\delta}_i^{(k)}))).$$

Mivel a H függvény konvexitásából, valamint a $j_{k+1} < n$ feltevésből következik, hogy

$$(17) \qquad H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k+1)}) - H(\underline{x}_i + \underline{\delta}_i^{(k)}) \leqslant H(\underline{x}_{k+1} + \underline{\Delta}_i) - H(\underline{x}_i + \underline{\Delta}_i - (\underline{\delta}_i^{(k+1)} - \underline{\delta}_i^{(k)})),$$

ezért (16)-nak a (15)-be való helyettesitésekor tagonkénti (17) tipusu egyenlőtlenségeket konstatálhatunk. Ezáltal tehát igazoltuk magát a (15) egyenlőtlenséget is.

Szigorú konvexitás esetén (14)-ben a (17)-beli egyenlőtlenség szigoru értelemben való teljesülése miatt szigorú egyenlőtlenség áll, tehát a (6) vektorrendszer szolgáltatja az egyetlen optimális megoldást. Emiatt (11) valóban optimális megoldása a feladatnak, és szigorú konvexitása esetén az egyetlen. Ezzel a tétel állitását igazoltuk.

Megjegyzések.

1. Könnyen belátható, hogy a tételben közölt feltételeket teljesitő

$$\underline{y}_i = (\underline{y}_i^{(1)}, \underline{y}_i^{(2)}, \ldots, \underline{y}_i^{(m)})^T, \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

vektorokra előirt

$$(\mathrm{P}) \qquad \prod_{i=1}^{n} y_i^{(j)} = y^{(j)} \qquad j = 1,2,\ldots, m$$

feltételrendszer mellett a (4) célfüggvényre megfogalmazott szélsőértékfeladat visszavezethető a tételben megfogalmazottra, és igy az [1]-beli megbizhatóságielméleti feladat egy általánositásának megoldását nyerhetjük. Ehhez elegendő a $z_i^{(j)} = \log y_i^{(j)} (j = 1,2,\ldots,m)$ uj változókat bevezetni, mert ekkor a (P) feltételrendszer a

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^j = \log y^{(j)} \qquad j = 1,2,\ldots, m.$$

(S) tipusba megy át, és a célfüggvény igy módosul:

$$\sum_{i=1}^{n} H(\underline{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} H((e^{z_i^{(1)}}, e^{z_i^{(2)}}, \ldots, e^{z_i^{(m)}})^T) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{H}((z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, \ldots, z_i^{(m)})^T) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{H}(\underline{z}_i).$$

$\widetilde{H}(\underline{z}_i)$ $\underline{z}_i$-nek monoton nemcsökkenő konvex függvénye (hiszen monoton nemcsökkenő konvex függvény monoton nemcsökkenő konvex függvényéről van szó), vagyis $M(\underline{z}_i, \underline{z}_i + \underline{\delta}_i)$ megengedett ráforditásfüggvény. A megoldás az [1]-beli feladat megoldásával vektorkomponenensenként megegyező, a tételben szereplő algoritmus értelemszerű átirása miatt.

2. A tételben a vektorok monotonitására, és az univerzális küszöbindexek létezésére vonatkozó viszonylag erős feltételeket gyengithetjük azáltal, hogy az $M(\underline{x}, \underline{y})$ megengedett ráforditásfüggvényt a következő lineáris kombinációként állithatjuk elő:

$$M(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^{(j)} M(x^{(j)}, y^{(j)}) \qquad j = 1,2, \ldots, m$$

Ekkor ugyanis az optimumfeladat önálló, külön-külön megoldható egy-feltételes optimumfeladatokra bontható fel, a következő átalakithatóság miatt:

$$\sum_{i=1}^{n} M(\underline{x}_i, \underline{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda^{(j)} M(x_i^{(j)}, y_i^{(j)}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^{(j)} \Big(\sum_{i=1}^{n} M(x_i^{(j)}, y_i^{(j)}\Big),$$

továbbá a feltételrendszer

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^{(j)} = y^{(j)} \quad \Big(\text{vagy } \prod_{i=1}^{n} y_i^{(j)} = y^{(j)}\Big) \qquad j = 1,2, \ldots, m$$

alakja miatt. Ezek a feladatok a következők:

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i^{(j)}, y_i^{(j)}) \to \min (j = 1,2, \ldots, m)$$

feltéve, hogy a (18) feltételek teljesülnek. Igy az $\{ x_i^{(j)} \}$ értékrendszerek minden $j = 1,2, \ldots, m$ esetén monoton sorozatba rendezhetők, és a küszöbindexek külön-külön határozandók meg az egyes részfeladatokra vonatkozóan. Ezek igy $k(j)$ alakúak lesznek ($j = 1,2, \ldots, m$), és egymással nem kell feltétlenűl egyenlőeknek lenniük.

3. Az $M(\underline{x}, \underline{y})$ megengedett ráforditásfüggvényekre felirt matematikai modellben megfogalmazott minimumfeladatra tehát olyan megoldást találunk, amelynek algoritmikus megadásához nincs szükség a célfüggvény konkrét ismeretére, és általában teljesiti a bevezetőben már emlitett tulajdonságokat. Igy a gyakorlati felhasználás számára jól kezelhető, rá számitógépes program igen könnyen készithető.

Az általánositás további lépése lenne különböző $M_i(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$ $i = 1,2, \ldots, n$ függvények valamint általánosabb tipusú feltételek melletti megoldás kidolgozása, amely azonban nem mindig látszik megvalósithatónak.

I r o d a l o m

[1] Dobó A., Szajcz S., A megbizhatóság növelésnek egy optimális elosztásáról. MTA III. Osztályának Közleményei. 1965. IV. kötet, 3.szám

[2] Dobó,A., Szajcz S., Optimális algoritmusok kialakitásáról. Matematika Alkalmazása 4. KGM ISZSZI Bp. 1971.

[3] Farkas Z., Munkaráforditások egy optimális elosztásáról. Diplomamunka. ELTE, 1967.

[4] Farkas Z., Erőforrások optimális szétosztása (Algoritmusok) Tanulmány. Készült a "Számitógépek alkalmazása" KGM – célprogram keretében, 1968-ban. 43. o.

[5] Farkas Z., Erőforrások optimális szétosztásáról Vállalatvezetés és vállalatszervezés 1. évf. (1969) 3.sz.

[6] Aczél J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Stuttgart, 1962.

[7] Bellman, R., Dynamical Programming, Princeton Unversity Press Princeton, New Jersey, 1957.

[8] Karush, W., A General Algorithm for the Optimal Distribution of Effort. Management Science 9(1962) 1

[9] Saaty, T.A. Bram, J., Nonlinear Mathematics. Mc Graw-Hill Inc. 1964. 116.o.

Р Е З Ю М Е

Обобщенное применение метода "Оптимизация с минимальной информацией" на проблемах распределений.

Золтан Фаркаш

В настоящей статье изложен один из результатов автора, связанный с методом "оптимизация с минимальной информацией". Это является решением следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} M(\underline{x}_i,\underline{y}_i) \to \min, \qquad \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i = \underline{y},\ \underline{x}_1 \leqslant \underline{x}_2 \leqslant \ldots \leqslant \underline{x}_n,$$

$$\underline{x}_i,\underline{y}_i \in E^n, \quad \underline{x}_i \leqslant \underline{y}_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n;$$

и функция $M(\underline{x},\underline{y})$ не известна только даны некоторые алгебраические свойства этой функции. Данный модел можно использовать в общих случаях. Например, модел можно интерпретировать обобщенной транспортной задачей, а алгоритм обобщенным решением некоторых проблем теории надежности /см. лит. [1]/.

S u m m a r y

A generalized application of the method "Optimization with minimal information" to allocation problems

Zoltán Farkas

One of the author's mathematical result sonnected with the method "optimization by minimal information"is described. The problem solved is one of the generalized resource allocation problems as follows

$$\sum_{i=1}^{n} M(\underline{x}_i,\underline{y}_i) \to \min, \text{ if } \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i = \underline{y}, \text{ where } \underline{x}_1 \leqslant \underline{x}_2 \leqslant \ldots \leqslant \underline{x}_n,$$

$$\underline{x}_i, \underline{y}_i \in E^n, \ \underline{x}_i \leqslant \underline{y}_i, \quad i = 1,2, \ldots, n;$$

and the objectiv function is not known, only well – defined properties are fulfilled by the function $M(\underline{x},\underline{y})$. A general model and solution algorithm is given, which can be use under general conditions. Model can be interpret for instance as certain generalization of the transportation problem and algorithm gives a generalized solutions of some reliability theory problems (see e.g. ref. [1]).