MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 19/1978.

TALAJMECHANIKAI FÜGGVÉNYEK SZINTVONAL MEGHATÁROZÁSA

Abaffy József – Varga Gyula

1. Bevezetés

A terepen végzett furások eredményeként adódó talajminták analizálása sok szempontból fontos a geotechnika számára. A minták különböző szempontok szerinti vizsgálata az altalaj összetételére, kémiai, mechanikai, hidrológiai és egyéb tulajdonságaira enged kvalitativ és kvantitativ következtetéseket levonni. A Földmérő és Talajvizsgáló Vállalat, amely a terepen végzett furások adatait és a furásokból kapott talajminták analizálása során nyert számszerü eredményeket regisztrálja, megbizással fordult az MTA SzTAKI-hoz a kb. 70 éves adathalmaz matematikai feldolgozásának modellezésére és a felállitott modellek beprogramozására, valamint az elkészitett programok futtatására.

Minthogy a talajminták analizálása során kapott számszerü értékek a további feldolgozás pontosságigényeinél jóval pontosabbak, ezért a következőkben az adatok pontosságára vonatkozó problémákkal nem foglalkozunk.

A furások és a belőlük eredményül kapott furási paraméterek a furáspont koordinátáitól függő kétváltozós (az időtől való függésüket jelen cikkünkben nem vizsgáljuk) talajmechanikai függvényeket ($f(\underline{x})$, $\underline{x} \epsilon R^2$) definiálnak. A furási paraméterek az igy definiált talajmechanikai függvények bizonyos diszkrét pontokban felvett függvényértékeit adják meg. A továbbiakban bizonyos feltevések mellett az ilyen tipusu talajmechanikai függvények viselkedését vizsgáljuk.

2. A feladat megfogalmazása

A fentiekben emlitett $f(\underline{x})$ talajmechanikai függvények vizsgálatához előljáróban néhány olyan tulajdonságot kell róluk feltételezni, amelyek a gyakorlati tapasztalatok és elméleti meggondolások alapján teljesülnek.

a.) Legyen $D = \mathrm{dom}\ f(\underline{x})$, akkor D általában többszörösen összefüggő.

b.) D belsejében létezik grad $(f(\underline{x}))$ és az folytonos.

c.) $\|\mathrm{grad}\ f(\underline{x})\|_2 < 0.02\ f(\underline{x})$,

d.) Létezhet $D_1 \subset D$, amelyen

$$f(\underline{x}) = \text{konst} \quad \forall\ \underline{x} \epsilon D_1$$

e.) $f(\underline{x}) \geqslant 0 \quad \forall\ \underline{x} \epsilon D$

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező talajmechanikai függvények viselkedését a különböző függvényértékekhez tartozó szintvonalak mutatják a legcélszerübben. A továbbiakban feladatul tüzzük ki a talajmechanikai függvények diszkrét pontokban ismert értékei alapján az illető függvények szintvonalainak plotteren történő kirajzolását.

3. Alapvető meggondolások

A következő részben végrehajtandó interpolációs lépések megkönnyitése érdekében a terepen szabálytalanul elhelyezkedő furáspontokban ismert függvényértékek segitségével egy négyzetrács csucspontjaiban szándékozunk a vizsgált talajmechanikai függvény értékeit meghatározni ugy, hogy a rendszertelenül elhelyezkedő furáspontokban ismert függvényértékek összeségéről a rácspontbeli függvényértékek összeségére való áttérés közben az információ veszteség minimális legyen, és bizonyos pontossági követelmények is teljesüljenek. Ez utóbbi szempontot is figyelembe véve határozzuk meg a térképszelvényre eső furáspontok számának ismeretében a rácshálózat élhosszuságát.

Legyen az adott térképszelvényre eső furáspontok száma n.

Legyen

$$d_1 = h/[\sqrt{n}],$$

ahol h a négyzetalaku térképszelvény oldalhossza.

Legyen

$$m_1 = [h/d_1] + 1.$$

Ha m_1 páros, akkor legyen

$$m_1 = m_1 + 1.$$

Ezután

(3.1) $\quad m = \min(101,\ m_1)$ és

(3.2) $\quad d = h/m$

ahol d a rács élhosszusága, m a felosztás.

A (3.1) kifejezésben szereplő 101-es számot az alkalmazott gép gyorsmemóriájának nagysága indokolja.

Megjegyezzük, hogy h szokásos értéke 500 mm, valamint d legkisebb értéke 5 mm.

A négyzetrács elkészitése azt jelenti, hogy alkalmas interpolációs eljárás segitségével m^2 db d élhosszuságu résznégyzet középpontjában kell a talajmechanikai függvény értékeit kiszámitanunk. A kiszámitandó függvényértékek tárolására szolgáló mxm-es mátrix elemeit a számitás megkezdése előtt -1-es értékkel töltjük fel. A rácsszélesség kiszámitásra szolgáló képletekben figyelembe kell venni azt is, hogy n a tényleges és un. fiktiv furáspontok számának összege, ahol a fiktiv pontok az értelmezési tartomány konvex burkán belül kimaradó területek körülhatárolására szolgálnak.

Megjegyezzük, hogy a fiktiv furáspontokkal körülhatárolt területek minimális szélessége

$2.5 \times d$ és a határoló szomszédos fiktiv furáspontok egymástól való távolságának kisebbnek kell lenni d-nél. Ha ugyanis a fiktiv furáspontokkal körülhatárolt területrész átmérője kisebb, mint $2.5 \times d$, akkor ezt a területrészt a program nem észleli, hanem átinterpolálja.

Ha a szomszédos furáspontok távolsága nagyobb d-nél, akkor uj fiktiv furáspontokat kell beiktatni és az m és d meghatározására szolgáló algoritmust ismételni kell, addig, amig a feltétel nem teljesül.

4. A függvényértékek kiszámitása a résznégyzetek középpontjaiban

Legyen a Σ halmaz a következőképpen definiálva:

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{m^2} S_i$$

ahol

$$S_i = T_i \cup F_i$$

ahol

$T_i = \{ \underline{x}_j : j \epsilon K_i,$ ahol K_i az i-edik résznégyzetbe eső tényleges furások indexeinek halmaza $\}$

és

$F_i = \{ \underline{x}_j : j \epsilon J_i,$ ahol J_i az i-edik résznégyzetbe eső fiktiv furások indexeinek halmaza $\}$.

Legyen továbbá

$C = \{ \underline{c}_i : i \leqslant m^2,$ $\underline{c}_i$ az i-edik résznégyzet középpontjának vektora $\}$,

$\underline{c}_i = (c_{i,1}, c_{i,2})^T .$

Legyen P_i az i-edik résznégyzetbe eső $S_i = T_i \cup F_i$ által meghatározott halmaz poligoniális burkával megadott konvex tartomány, valamint a Q_i-t hasonlóan definiáljuk az F_i halmazra.

Ha

$\underline{c}_i \epsilon P$ és $\underline{c}_i \epsilon Q_i$, akkor

$f(c_i) \equiv -1$

különben ha

$\underline{c}_i \epsilon P_i$, $\bar{\bar{T}}_i \geqslant 4$, $\underline{c}_i \ \epsilon Q_i$ és az

(4.1) $R_i = \{ \underline{y}_j : \| \underline{y}_j - \underline{c}_i \|_2 < d/4, \quad j \epsilon K_i \}$

halmaz nem üres,
akkor

$$f(\underline{c}_i) = \sum_{j=1}^{p} f(\underline{y}_j)/p \quad \text{ahol} \quad p = \overline{\overline{R}}_i,$$

$$\underline{y}_j \epsilon R_i \quad \text{és} \quad \underline{y}_j \epsilon T_i.$$

Ha $\underline{c}_i \epsilon P_i$, $\underline{c}_i \notin Q_i$ és $R_i = \emptyset$

akkor

$$f(\underline{c}_i) = g(\underline{c}_i) \quad \text{ahol}$$

$$g(\underline{c}_i) = \overline{a} c_{i,1} + \overline{b} c_{i,2} + \overline{c}, \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \epsilon R^1, \quad \text{és}$$

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ a következő minimum feladat megoldásaként határozható meg:

$$\sum_{l \epsilon K_i} p_l (g(\underline{x}_l) - f(\underline{x}_l))^2 = \min$$

ahol

(4.2) $p_l = p_l(r_l) = \frac{1}{r_l} e^{-\alpha r_l}, \quad r_l = \| x_l - c_i \|_2$

és

$$\alpha = \frac{n}{h^2} \cdot \ln \sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

A fenti szélsőérték feladat megoldása az alábbi tulhatározott lineáris egyenletrendszer normál megoldásának a megkeresését jelenti:

(4.3) $MB\underline{w} = M\underline{z}$

ahol

$$M = \mathrm{diag}(\sqrt{p_{l_1}}, \ldots, \sqrt{p_{l_\sigma}}), \quad \sigma = \overline{\overline{K}}_i$$

$$B = \begin{pmatrix} x_{l_1,1} & x_{l_1,2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{l_\sigma,1} & x_{l_\sigma,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})^T \quad \text{és}$$

$$\underline{z} = (f(\underline{x}_{l_1}), \ldots f(\underline{x}_{l_\sigma}))^T.$$

Legyen $A \equiv MB$ és $\hat{\underline{z}} = M\underline{Z}$, ekkor (4.2) a következőképpen irható fel:

(4.4) $A\underline{w} = \hat{\underline{z}}$

Ebből $\underline{w} = A^{+}\hat{\underline{z}}$, ahol

A^{+} az A mátrix Moore-Penrose féle inverze.

A (4.1) meghatározásban a d/4 választást az alábbi becsléssel indokoljuk:

Minthogy a tekintett négyzetben fekvő összes pont figyelembevételével a négyzet középpontjában sulyozott átlagolással kiszámitott közelitő függvényérték rosszabb közelitést ad, mint a legkisebb négyzetek módszerével kapott közelités, ezért a d/4 sugaru körben elhelyezkedő pontokkal végrehajtott átlagolással számitott függvényértéknek az előbbi sulyozott átlagolással számitott függvényértékhez viszonyitott relativ hibája felső becslést ad a legkisebb négyzetek módszerével kapott függvényértékhez viszonyitott relativ hibára.

Legyen

$$\bar{f} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f(y_j)}{k} \qquad \text{ahol } k = \bar{\bar{R}}_i$$

és

$$\bar{\bar{f}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f(\underline{y}_j) + \sum_{l=k+1}^{n} p_l f(\underline{y}_l)}{k + \sum_{l=k+1}^{n} p_l} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{k} f(\underline{y}_j) + \sum_{l=k+1}^{n} p f(\underline{y}_l)}{k + (n-k)p} = \hat{f}$$

$$n = \bar{\bar{T}}_i \text{ és } p = 4/d\, e^{-\alpha d/4}$$

Az $\bar{\bar{f}}$-ban és $\hat{f}$ megfelelő részében a sulyokat azért kell elhagynunk, mert

$$p_j \to \infty \quad \text{ha} \quad \underline{y}_j \to \underline{c}_i.$$

A relativ hibára az alábbi egyenlőtlenséget irhatjuk fel:

$$\left| \frac{\bar{f} - \hat{f}}{\hat{f}} \right| \leqslant \left| \frac{k + (l-k)p}{k + (l-k)p + p(l-k)\vartheta} - 1 \right| \quad \text{ahol} \quad l = \bar{\bar{T}}_i$$

$$(\bar{\bar{T}}_i \leqslant 50) \quad \text{és} \quad \vartheta \geqslant \max_i \left| \frac{\bar{f} - f_j}{\bar{f}} \right|, \qquad j \in k_i \cap M'_i$$

$$\text{ahol } M'_i = \{ j \in k_i : \|\underline{y}_j - \underline{c}_i\|_2 < d/4 \}$$

Figyelembe véve a 2/c feltételt

$$\vartheta \approx 0.32$$

A számitást az $l = 5$, $n = 10^3$, $h = 5.10^2$mm, $d = 5$ mm értékekre elvégezve és a furáspontok elhelyezkedését egyenletes eloszlásunak feltételezve

$$\left| \frac{\bar{f} - \hat{f}}{\hat{f}} \right| < 0.11 \quad \text{adódik.}$$

Visszatérve a $\bar{\bar{T}}_i \geqslant 4$ feltételre, megjegyezzük, hogy amennyiben ez nem teljesül, a vizsgálandó résznégyzetet az őt körülvevő 8 (a tartomány határán ez 5-re, illetve sarkoknál 3-ra redukálódik) szomszédos résznégyzettel bővitjük, és a fent leirt eljárást ismételjük. Ugyancsak a fenti eljárást ismételjük akkor is az előbb leirt bővités végrehajtásával, ha az $r(A) < 3$. Ha 1 bővités nem bizonyul elegendőnek, akkor ujabb bővitést végzünk a megnagyobitott négyzetet körülvevő 16 (határoknál kevesebb) résznégyzetek hozzácsatolásával. Ha ez sem ad eredményt, akkor a résznégyzet középpontjában a függvényértéket nem tudjuk kiszámitani.

A legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása során felhasznált lineáris közelitő függvények helyett alkalmazhattunk volna kvadratikus függvényeket is. Ehhez az általános kétváltozós kvadratikus függvény 6 együtthatóját kellett volna kiszámitani, szemben a számitásainkban felhasznált lineáris függvény 3 együtthatójával, anélkül, hogy az ily módon kiszámitott függvényértékek pontossága számottevően növekedett volna, az eljárás végrehajtásához szükséges nyolcszoros müveletigény arányában. Ez a tény, tekintetbe véve azt a körülményt, hogy az eljárást maximálisan 10 000 résznégyzetre kell végrehajtani, a gépidő szükségletet jelentősen megnövelné, és ezért ezt a lehetőséget elejtettük.

5. A szintvonalak plotteren történő kirajzolása

Miután kiszámitottuk a szóbanforgó talajmechanikai függvény értékeit a résznégyzetek közzéppontjaiban (nem okvetlenül valamennyiében), a maximális és minimális függvényérték közé eső valamely paraméter értékkel (γ) hozzáfoghatunk a neki megfelelő szintvonal megkereséséhez és kirajzolásához.

Tekintsük a négyzetrács valamelyik résznégyzetét, illetve a résznégyzet csucspontjaiban a talajmechanikai függvény értékeit. Ha a négy csucspont közül egyben nincs kiszámitva a függvényérték (azaz értéke negativ), akkor az illető pontban önkényesen értéket adunk neki ugy, hogy függvényértékként a két mellette fekvő pontban ismert függvényérték összegének és a vele szemben lévő pontban felvett függvényértéknek a különbségét tulajdonitjuk. Ha a négyzet két egymás mellett lévő csucspontjában nincs kiszámitva a függvényérték, akkor csak abban az esetben rajzolhatunk szintvonalat a másik két csucsponton át, ha a függvényérték mindkettőben megegyezik a tekintett paraméterértékkel. Ha két átellenes pontban vagy kettőnél több pontban nincs kiszámitva a függvényérték, akkor az illető négyzeten át nem halad szintvonal.

A továbbiakban tekintsük azt az általános esetet, amikor a négyzet valamennnyi csucspontjában ki van számitva a függvényérték. A szintvonal négyzeten való áthaladásának a feltétele:

$$\min(t_1,t_2,t_3,t_4) \leqslant \gamma \leqslant \max(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

ahol t_i, $i = 1, \ldots, 4$-ig a függvényértékek a résznégyzet csucspontjaiban az óramutató járásával ellenkező irányban véve. A szintvonal áthaladásának elégséges feltétele

$$\min(t_1,t_2,t_3,t_4) < \max(t_1,t_2,t_3,t_4),$$

$$\gamma\epsilon[\min(t_1,t_2,t_3,t_4),\ \max(t_1,t_2,t_3,t_4)],$$

$\gamma = t_i = t_j = t_k$ különböző i,j,k-ra nem áll fenn, valamint $\gamma = t_{i_0} = t_{j_0}$ esetén $\gamma\epsilon[t_{l_1},t_{l_2}]$ ahol az l_1,l_2 indexek különböznek az $i_0 j_0$ indexektől.

Az elégséges feltétel teljesülése esetén a négyzet oldalain lineáris interpolációval megkeressük azokat a pontokat, amelyekben a függvényérték γ-val megegyezik. A figyelembe vehető lehetséges pontok száma 2,3 vagy 4.

Feltételként szabjuk ki azt, hogy a szintvonalak a szomszédos négyzetekbe való áthaladási pontokban lehetőleg egyszer folytonosan diferenciálhatók legyenek, valamint véges sok pontot kivéve bármely szintvonal tetszőleges pontjának elegendően kicsiny környezetébe eső egyéb szintvonalak konvexitása megegyezzék. Ezeknek a feltételeknek a segitségével az elemi függvények közül kiválaszthatunk olyanokat, amelyeknek a menete a tényleges szintvonalakat megközeliti. Az alkalmazott elemi függvények az alábbiak:

1.) szögfüggvények
2.) reciprok függvény
3.) $ax^p + by^p = c \quad (p\epsilon\ [1,2])$.

A plotteren való kirajzolás tényleges végrehajtásánál figyelembe kellett vennünk azt a körülményt is, hogy a CDC 3300 gépnél rendelkezésünkre álló rajzmező szélessége a térképszelvény felével egyezik meg, és ezért a rajzolást a két fél szelvényre külön-külön kellett végrehajtani. A plotter felesleges tollmozgatásainak elkerülése céljából a vizsgálandó résznégyzetek sorrendjét ugy állapitottuk meg, hogy a bal alsó sorokból elindulva az első sor végéig haladunk, majd ott a második sorba lépve visszatérünk a rajzmező bal szélére és egy sorral feljebb lépve ezt ismételjük. A különböző paraméterértékekhez tartozó szintvonalak különféle vonaltipusuak vagy szinüek lehetnek. Végül a két fél szelvény összeragasztható.

Summary

Determination of the line of levels of soil mechanics functions

József Abaffy – Gyula Varga

The paper investigates the behaviour of soil mechanics functions resulting from drillings on the terrain. It substitutes the drilling points located at haphazard by a sequare grid system and gives an algorithm to the system obtained for the levels of the soil mechanics funtion in question.

РЕЗЮМЕ

Определение линий уровня функций грунтовой механики

Йожеф Абаффи - Дюла Варга

В статье исследуется поведение линий уровня функций грунтовой механики, полученных по полевым буравлениям. Точки буравлений, расположение случайных образцов, заменяются системой квадратных сеток и для полученной системы описывается алгоритм к начертанию линий уровня функции грунтовой механики.